УДК 621.391 : 510.53

В. П. БАКАЛОВ
(Москва)

УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННЫХ МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ И АДДИТИВНЫХ ПОМЕХ

Для большинства пространственно-ограниченных многомерных сигналов (полей, изображений) возможно решение уравнения свертки с неизвестным ядром, относящимся к тому же классу функций [1]. Это означает, что допустимо точное восстановление указанных сигналов (и помех), искаженных сверткой с неизвестной функцией или мультипликативной помехой в области спектров. Известны алгоритмы, позволяющие практически осуществить такое восстановление [2, 3]. При действии шумов, искажающих регистрируемую свертку, целесообразна статистическая постановка задачи восстановления пространственно-ограниченных сигналов при совместном действии мультипликативных и аддитивных помех.

Пусть $g_1(x)$, $g_2(x)$ — восстанавливаемые пространственно-ограниченные комплексные сигнал и искажающая функция, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $k\geqslant 2$. Пространственная ограниченность означает, что известны носители η_1 и η_2, за пределами которых любые реализации $g_1(x)$ и $g_2(x)$ тождественно равны нулю:

$$\begin{aligned} g_1(x)&\equiv 0, \quad x\not\subset \eta_1;\\ g_2(x)&\equiv 0, \quad x\not\subset \eta_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Восстановление возможно также и при других ограниченных носителях ξ_1 и ξ_2 при условии

$$\begin{aligned} g_1(x)&\equiv 0, \quad x\not\subset \xi_1, \quad \xi_1\supset\eta_1;\\ g_2(x)&\equiv 0, \quad x\not\subset \xi_2, \quad \xi_2\supset\eta_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Восстановление при отсутствии помех, искажающих свертку, соответствует решению относительно $g_1(x)$ и $g_2(x)$, удовлетворяющих (1) или (2), интегрального уравнения свертки:

$$s(x)=\int_{-\infty}^{\infty} g_1(y)\, g_2(x-y)\, dy, \tag{3}$$

где $dy=dy_1dy_2, \ldots, dy_k$; $y-x=((y_1-x_1), (y_2-x_2), \ldots, (y_k-x_k))$.

В предположении, что $g_1(x)$ и $g_2(x)$ имеют спектры Фурье $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$, восстановление соответствует решению уравнения (при условии (1) или (2))

$$S(\omega)=G_1(\omega)\, G_2(\omega), \tag{4}$$

где $S(\omega)$ — спектр $s(x)$; $\omega=(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$.

При точно известных $s(x)$ или $S(\omega)$ статистическая постановка задачи неправомерна, так как возможно точное решение (3) или (4) (в смысле, указанном в [1]).

Рассмотрим статистическую постановку задачи. Пусть регистрируется $s_n(x)$, являющаяся аддитивной смесью свертки $s(x)$ и комплексной гауссовой помехи (поля) $n(x)$:

$$s_n(x) = s(x) + n(x),$$

и известны корреляционные функции гауссовых комплексных полей $g_1(x)$, $g_2(x)$, $n(x)$, характеризующие их статистические свойства

$$R_l(x, y) = E[g_l(x)\overset{*}{g}_l(y)], \quad l = 1, 2;$$

$$R_n(x, y) = E[n(x)\overset{*}{n}(y)]. \tag{5}$$

Здесь E — знак математического ожидания;

$$R_l(x, y) = \overset{*}{R}_l(y, x); \quad R_n(x, y) = \overset{*}{R}_n(y, x).$$

Будем предполагать, что $R_l(x, y)$ $(l = 1, 2)$ неотрицательно определены, $R_n(x, y)$ определена положительно, а $g_l(x)$, $n(x)$ имеют нулевое среднее. Положительная определенность $R_n(x, y)$ не сужает постановки задачи, так как это условие практически всегда выполняется (например, в силу наличия в $n(x)$ некоррелированной составляющей).

В соответствии со сделанными допущениями можно представить [4]

$$\begin{aligned} g_l(x) &= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, g_{lN}(x), \quad l = 1, 2; \\ n(x) &= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, n_N(x); \\ g_{lN}(x) &= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{g_{li}}\, c_{li} \Phi_{li}(x); \\ n_N(x) &= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{n_i}\, e_i \psi_i(x), \end{aligned} \tag{6}$$

где l.i.m.— предел в среднеквадратическом смысле; g_{li}, n_i, $\Phi_{li}(x)$, $\psi_i(x)$ — собственные (действительные) числа и соответственно собственные функции уравнений

$$g_{li}\Phi_i(x) = \int_{\eta_l} R_l(x, y)\, \Phi_{li}(y)\, dy, \quad l = 1, 2;$$

$$n_i\psi_i(x) = \int_{\Omega_s} R_n(x, y)\, \psi_i(y)\, dy;$$

Ω_s — носитель зарегистрированной искаженной свертки.

При этом предполагается, что на носителях η_1, η_2, Ω_s справедлива гипотеза о гауссовости полей $g_1(x)$, $g_2(x)$, $n(x)$.

В соответствии с (6) $\Phi_{li}(x)$ $(l = 1, 2)$ и $\psi_i(x)$ представляют три набора ортонормированных функций, а c_{li} и e_i — независимые гауссовы комплексные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, определяемые как

$$c_{li} = \frac{1}{\sqrt{g_{li}}} \int_{\eta_l} g_l(x)\, \overset{*}{\Phi}_{li}(x)\, dx; \quad e_i = \frac{1}{\sqrt{n_i}} \int_{\Omega_s} n(x)\, \overset{*}{\psi}_i(x)\, dx. \tag{7}$$

Функция правдоподобия для набора c_{li} $(l = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots, N)$ равна с точностью до постоянного, не зависящего от c_{li} множителя

$$p_c(s) = \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} |e_i|^2\right], \tag{8}$$

где

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{n_i}} \int_{\Omega_s} n(z)\, \overset{*}{\psi}_i(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{n_i}} \int_{\Omega_s} (s_n(z) - s(z))\, \overset{*}{\psi}_i(z)\, dz. \tag{9}$$

Апостериорная плотность вероятности для c_{li} ($l=1,\ 2;\ i=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ N$) с точностью до несущественного множителя равна

$$p_s(c) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(|c_{1i}|^2 + |c_{2i}|^2 + |e_i|^2)\right]. \qquad (10)$$

Оценки по максимуму апостериорной вероятности для коэффициентов c_{li}, если они существуют, находятся из условия максимума показателя экспоненты в (10). Так как (10) не является аналитической функцией c_{li}, оценки должны быть определены отдельно для действительных $\widehat{c}_{li}^{(R)}$ и мнимых $\widehat{c}_{li}^{(I)}$ частей оценки $\widehat{c}_{li}$. Определяя частные производные показатели экспоненты (10) и приравнивая их к нулю, получаем

$$\begin{aligned}\widehat{c}_{lk}^{(R)} &= -\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Re}\left[\frac{\partial e_i}{\partial \widehat{c}_{lk}^{(R)}}\, e_i^*\right];\\ \widehat{c}_{lk}^{(I)} &= -\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Im}\left[\frac{\partial e_i}{\partial \widehat{c}_{lk}^{(I)}}\, e_i^*\right].\end{aligned} \qquad (11)$$

Определяя оценку восстанавливаемых сигнала и помехи как

$$\widehat{g}_{lN}(x) = \sum_{i=1}^{N}\sqrt{g_{li}}\,\widehat{c}_{liN}\Phi_{li}(x),\ \ x\subset\eta_l,\ \ l=1,\ 2,$$

учитывая (9), (10), изменяя порядок вычисления интегралов и сумм и объединяя соответствующие сомножители, получим при $N\to\infty$, что оптимальные оценки $\widehat{g}_{l\mathrm{MAB}}(x)$ должны находиться из совместного решения двух интегральных уравнений (знак lim опущен):

$$\widehat{g}_{l\mathrm{MAB}}(x) = \int_{\Omega_s}\int_{-\infty}^{\infty} R_l(x,v)\,\overset{*}{\widehat{g}}_{\bar{l}\mathrm{MAB}}(y-v)\int_{\Omega_s}\big(s_n(z) - \widehat{g}_{l\mathrm{MAB}}(z)\otimes$$

$$\otimes\,\widehat{g}_{\bar{l}\mathrm{MAB}}(z)\big)\,Q(y,z)\,dydvdz,\ \ l=1,\ 2;\ \ \bar{l}=3-l;\ \ x\subset\eta_l, \qquad (12)$$

$\otimes$ — знак свертки.

При выводе (12) учтено, что

$$R_l(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i\Phi_i(x)\overset{*}{\Phi}_i(y),\ \ x,\ y\subset\eta_l;$$

$$R_n(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i\psi_i(x)\overset{*}{\psi}_i(y),\ \ x,\ y\subset\Omega_s;$$

$$Q(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}\psi_i(x)\overset{*}{\psi}_i(y),\ \ x,\ y\subset\Omega_s,$$

причем $Q(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{\Omega_s} R_n(t,z)\,Q(z,v) = \delta(t-v)$$

и $\delta(t)$ — δ-функция.

В частном случае, когда сигнал $g_1(x)$, мультипликативная помеха $g_2(x)$ и аддитивная помеха $n(x)$ есть ограниченные в пространстве реализации δ-коррелированных гауссовых комплексных полей со спектральными плотностями мощности N_1, N_2, N_n соответственно, легко показать, что (12) соответствует в спектральной области двум уравнениям:

$$\widehat{G}_{l\mathrm{MAB}}(\omega) = \frac{S_n(\omega)}{\left(\frac{N_l}{N_n}\overset{*}{\widehat{G}}_{\bar{l}\mathrm{MAB}}(\omega)\right)^{-1} + \widehat{G}_{\bar{l}\mathrm{MAB}}(\omega)},\ \ l=1,\ 2, \qquad (13)$$

при выполнении (1), где $\widehat{G}_{l\text{МАВ}}(\omega)$ — оценка спектра $g_l(x)$. Решение уравнений (13) с учетом (1) может быть получено, например, с помощью несущественной модификации итерационного алгоритма многократной инверсной фильтрации [2].

В случае, когда статистическое описание восстанавливаемого сигнала и искажающей функции не может быть задано, целесообразно использование критерия максимального правдоподобия, при котором оптимальные оценки $\widehat{g}_{1\text{мп}}(x)$ и $\widehat{g}_{2\text{мп}}(x)$, если они существуют, определяются из условия совместного равенства нулю вариаций по восстанавливаемым $g_1(x)$ и $g_2(x)$ функционала, являющегося показателем экспоненты в (8). Поскольку показатель экспоненты в (8) не является аналитической функцией $g_1(x)$ и $g_2(x)$, то вариации должны определяться и приравниваться нулю отдельно для действительных и мнимых частей $g_1(x)$ и $g_2(x)$. Объединение получающихся уравнений для действительной и мнимой частей каждой из $g_l(x)$ $(l=1,\ 2)$ дает два уравнения для оценок по максимуму правдоподобия:

$$\int\limits_{\Omega_s} g_l(z-x) \int\limits_{\Omega_s} \left(\overset{*}{s}_n(y)-\overset{*}{g}_l(y)\otimes \overset{*}{g}_{\bar{l}}(y)\right) Q(z,y)\, dz dy=0, \tag{14}$$

$$l=1,\ 2;\quad g_l(x)=\widehat{g}_{l\text{мп}}(x)$$

при действии (1) или (2).

Легко показать, что в силу пространственной ограниченности $g_l(x)$, $l=1$, 2, существования спектров, а также положительной определенности $Q(z,\ y)$ уравнения (14) обратятся в одно общее для $l=1$, 2 уравнение

$$\widehat{g}_{l\text{МП}}(x)\otimes \widehat{g}_{\bar{l}\text{МП}}(x)=s_n(x) \tag{15}$$

при условии (1) или (2).

Для решения интегрального уравнения (15) можно использовать известное итерационное или градиентные методы, применяемые для решения (3) или (4) [2, 3].

Необходимо отметить, что уравнения (12), (13), (15) в силу свойств пространственно-ограниченных многомерных сигналов могут не иметь решения, что соответствует отсутствию рассматриваемых оценок восстанавливаемых сигнала и искажающей функции. Однако в этом случае полученные уравнения можно использовать в качестве основы квазиоптимальных алгоритмов восстановления, рассматривая равенства в них как приближенные; при этом получающаяся оценка не является оптимальной, а ее свойства будут зависеть от способа решения (алгоритма) соответствующего уравнения.

Таким образом, уравнения оптимальной оценки при восстановлении пространственно-ограниченных многомерных сигналов, искаженных сверткой с неизвестной искажающей пространственно-ограниченной многомерной функцией (мультипликативной в области спектров помехой) и аддитивной помехой, есть интегральные уравнения. Оценки по максимуму апостериорной вероятности могут быть получены с помощью известных алгоритмов лишь для случая (13), когда сигнал, мультипликативная и аддитивная помехи являются реализациями δ-коррелированных полей. В общем случае, когда сигнал и помехи есть реализации неоднородных гауссовых полей (12), необходима разработка специальных алгоритмов восстановления. При восстановлении носители сигнала и мультипликативной помехи должны быть точно известны.

Оценки по максимуму правдоподобия в общем случае могут быть получены решением (15) с помощью известных алгоритмов. При этом носители восстанавливаемого сигнала и мультипликативной помехи задаются приближенно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бакалов В. П., Русских Н. П.** О возможности решения уравнения свертки при неизвестном ядре в случае многомерных пространственно-ограниченных сигналов // Автометрия.— 1985.— № 5.
2. **Бакалов В. П., Русских Н. П.** Моделирование процесса восстановления двумерных сигналов, искаженных сверткой с неизвестной функцией // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1987.— № 7.
3. **Астафьев А. В., Бакалов В. П., Русских Н. П.** Применение градиентного метода при восстановлении двумерных сигналов при неизвестных искажениях // Автометрия.— 1989.— № 1.
4. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения оценок и модуляции.— М.: Сов. радио, 1972.— Т. 1; 1977.— Т. 3.

Поступила в редакцию 8 августа 1989 г.

УДК 621.317.3

М. П. СЕЛИВАНОВА, Э. П. ТИХОНОВ

(Ленинград)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА РАДИОИЗОТОПНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ПЛОТНОСТИ

В настоящее время существует класс измерительных задач на основе априори известной, в том числе нелинейной, функциональной зависимости зондирующего сигнала (ЗС) от измеряемого параметра. К этому классу задач относится бесконтактное измерение плотности двухфазных потоков в парогенерирующих каналах посредством радиоизотопного ЗС. Решение задачи измерения связано с синтезом алгоритма измерения по известной адекватной модели, описывающей экспоненциальную зависимость ослабления ЗС от плотности [1, 2].

В связи с бурным развитием электроники в измерениях обозначился новый путь развития. Гибкие функциональные возможности микропроцессорной техники создают предпосылки к использованию более сложных, например, итерационных измерительных алгоритмов с опорным случайным процессом (ОСП) [3], реализация которых ранее была затруднительна. Под измерительным итерационным алгоритмом понимается процесс уравновешивания искомой (измеряемой) величины заданной уравновешивающей величиной, выраженной в единицах измерения, направленной на получение результата измерения минимизацией в установленном смысле отклонения между уравновешивающей и искомой величинами.

Целью работы является сравнение известного и предлагаемого итерационного на основе метода измерения с ОСП алгоритмов измерения плотности для разработки рекомендаций по их практическому применению.

В статье исследуются следующие существенные для сравнения свойства алгоритмов: а) эффект линеаризации градуировочной характеристики; б) чувствительность; в) эффективность, характеризующаяся величиной методической погрешности за заданное время измерения; г) помехоустойчивость.

Сущность измерения плотности ρ по известному алгоритму [1] состоит в том, что за время измерения t накапливают (интегрируют) количество событий k_1, соответствующее интенсивности появления, например,