УДК 621.391.81

А. И. ЛИТВИН
(Томск)

СТРУКТУРА АЛГОРИТМОВ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША — ПЭЛИ

В работе [1] подробно рассматривается генератор сигналов с использованием системы ортогональных дискретных преобразований (ОДП) Уолша — Пэли, который можно использовать в качестве имитатора электрического эхосигнала при лазерном зондировании атмосферы. Этот сигнал аналитически можно представить в виде

$$u(t) = u_0(1 - e^{\beta t}) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < 1 \text{ мкс},$$
$$u(t) = u_0 e^{-\alpha t}/t^2 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant t < 15 \text{ мкс},$$

где u_0 — амплитудное значение электрического эхосигнала, определяемое состоянием атмосферы; α, β — коэффициенты, характеризующие определенные параметры состояния атмосферы. Погрешность воспроизведения данного сигнала может быть получена с помощью ЭВМ и с высокой точностью (не превышает 5 % при $N = 16$).

Однако применение алгоритмов ОДП, например быстрого преобразования Уолша — Пэли (БПУП), наталкивается на существенный недостаток: требуется иметь на входе более половины отсчетов сигнала, чтобы начать вычисление спектральных коэффициентов БПУП. Запаздывание начала вычислений снижает эффективность этого преобразования. Исследуя структуру ряда алгоритмов ОДП Уолша — Пэли, можно прийти к выводу, что эти алгоритмы реализуются в векторном режиме на вычислительных комплексах типа ОКМД (одна команда, много данных) [2, 3]. Поэтому целью данной статьи является исследование структуры алгоритмов БПУП для их реализации в режиме реального времени, а также в векторном режиме.

Воспользуемся понятиями кронекеровского произведения матриц и кронекеровского произведения матриц по строкам.

Кронекеровское произведение матриц $C = A \otimes B$ будем понимать согласно определениям [4, 5], т. е. каждый элемент матрицы A перемножается на матрицу B.

Используем понятие кронекеровского произведения матриц по строкам [6, 7]:

$$C = A \mathbin{\overline{\otimes}} B, \tag{1}$$

где матрица A кронекеровски перемножается на первую строку, затем на вторую строку матрицы B и т. д. Символы $\otimes$, $\overline{\otimes}$ означают соответственно кронекеровское произведение матриц и кронекеровское произведение матриц по строкам.

Пусть $N = 2^n$, где n — целое положительное число; $E_{2(j-1)}$ — единичная матрица порядка $2^{(j-1)}$; $H(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ — стандартная матрица Уолша второго порядка.

Используя введенные обозначения и определения, матрицы Уолша — Пэли можно представить в виде

$$H_p(N) = \prod_{j=1}^{n} E_{2(j-1)} \otimes \left(E_{2(n-j)} \mathbin{\overline{\otimes}} H(2)\right); \tag{2}$$

$$H_p(N) = \prod_{j=1}^{n} E_{2(n-j)} \otimes \left(H(2) \mathbin{\overline{\otimes}} E_{2(j-1)}\right). \tag{3}$$

Доказательства представлений матриц Уолша — Пэли в виде формул (2) и (3) проводились путем сравнения с известными алгоритмами вычислений спектральных коэффициентов Уолша — Пэли, описанных в [4, 5]. Примеры: $N=8$, $n=3$,

$$H_p(8)=\left[\begin{array}{c|c}\begin{matrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{matrix} & 0\\ \hline 0 & \begin{matrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{matrix}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}\begin{matrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&-1&0&0\\0&0&1&-1\end{matrix} & 0\\ \hline 0 & \begin{matrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&-1&0&0\\0&0&1&-1\end{matrix}\end{array}\right]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\ \hline 1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\ \hline 0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{array}\right]\times$$

$$\times\left[\begin{array}{c|c}\begin{matrix}1&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\end{matrix} & 0\\ \hline 0 & \begin{matrix}1&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\end{matrix}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}\begin{matrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{matrix} & 0\\ \hline 0 & \begin{matrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{matrix}\end{array}\right].$$

Отметим, что предложенные алгоритмы Уолша — Пэли удобны для реализации их в режиме реального времени, так как для начала вычислений спектральных коэффициентов достаточно иметь на входе только два отсчета сигнала.

Алгоритмы БПУП, представленные в виде формул (2), (3), можно использовать для работы в векторном режиме. Векторизуем эти алгоритмы с помощью алгоритма расщепления, который представляет собой способ вычислений преобразования длины N в виде двух преобразований длиной $N/2$ [3, 7].

Пусть задана входная последовательность $\{X_k\}$, $k=\overline{0,\ N-1}$. Требуется вычислить ее образ с помощью БПУП длиной $N/2$. Положим:

1. $A_k=X_k$, $B_k=X_{k+N/2}$, $k=\overline{0,\ N/2-1}$.

2. К последовательностям $\{A_k\}$ и $\{B_k\}$ применим БПУП длиной $N/2$:

$$\left.\begin{aligned}Y_i&=\sum_{k=0}^{N/2}A_k\,\mathrm{Walp}(k,\ i);\\ Z_i&=\sum_{k=0}^{N/2}B_k\,\mathrm{Walp}(k,\ i);\end{aligned}\right\}\quad i=\overline{0,\ N/2-1},$$

где $\mathrm{Walp}(k,\ i)$ — функция Уолша — Пэли [4, 5].

3. Используя последовательности $\{Y_i\}$ и $\{Z_i\}$, найдем последовательность $\{X_i\}$ длиной N по формулам

$$\left.\begin{aligned} X_{2i} &= Y_i + Z_i; \\ X_{2i+1} &= Y_i - Z_i; \end{aligned}\right\} \quad i = \overline{0, N/2 - 1}.$$

Используя алгоритм БПУП, представленный в виде формулы (3), можно значительно усилить алгоритм расщепления. Покажем это на примере при $N = 8$:

1-я итерация	2-я итерация	3-я итерация
1 + 2	1 + 3	1 + 5
1 − 2	1 − 3	1 − 5
3 + 4	2 + 4	2 + 6
3 − 4	2 − 4	2 − 6
5 + 6	5 + 7	3 + 7
5 − 6	5 − 7	3 − 7
7 + 8	6 + 8	4 + 8
7 − 8	6 − 8	4 − 8

Массив исходных данных обрабатывается с помощью матрицы $H(2)$. Затем выходные данные группируются по 4,8 элементов и т. д., согласно итерациям. В каждой группе итерации вычисления происходят по формулам

$$\left.\begin{aligned} Y_{2i} &= X_i + X_{i+k/2}; \\ Y_{2i+1} &= X_i - X_{i+k/2}; \end{aligned}\right\} \quad i = \overline{0, k/2 - 1},$$

где $k = 2^j$ — число элементов в группе; j — номер итерации.

Алгоритмы векторизации БПУП можно упростить путем их представления в виде умножения входных данных на матрицу $H(2)$. Чтобы не «потерять» конечный результат, будем производить перестановку входных данных на каждой итерации способом «идеального перемешивания» [5], т. е. входные данные на каждой итерации разбиваются на верхнюю и нижнюю части и элементы нижней половины вставляются между элементами верхней половины. Например, входные элементы, пронумерованные в виде $x_0x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, будут «перетасованы» в другом виде $(x_0x_4x_1x_5x_2x_6x_3x_7)$. Совмещая способ «идеального перемешивания» с обменом данных между нужными парами процессоров, можно добиться увеличения быстродействия алгоритмов БПУП. Оптимальное число процессоров распараллеливания вычислительного процесса на всех итерациях равно $N/2$.

Таким образом, исследование структуры алгоритмов БПУП показало возможность использования алгоритмов преобразования Уолша — Пэли в режиме реального времени, а также в векторном режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Губерт В. Ф., Семкина Л. И.** Генератор сигналов специальной формы с использованием системы ортогональных функций Уолша // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1987.— № 9.
2. **Варченко В. С., Натансон Л. Г.** Разработка и реализация векторного Фортрана для М-10 // Программирование.— 1986.— № 4.
3. **Шварцтраубер П.** Векторизация быстрого преобразования Фурье // Параллельные вычисления.— М.: Наука, 1986.
4. **Салыхов Р. Х., Чеголин П. М., Шмерко В. П.** Методы и средства обработки сигналов в дискретных базисах.— Минск: Наука и техника, 1987.
5. **Лабунец В. Г.** Алгебраическая теория сигналов и систем.— Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та. 1984.
6. **Зайцев Н. П., Кожуховский А. Д., Литвин И. А.** Об алгоритмах быстрых преобразований Уолша.— Томск, 1986.— Деп. в ВИНИТИ 21.05.86, № 3764-В-86.

7. **Маликов В. Т., Кожуховский А. Д., Литвин А. И.** Тестовый контроль ЭВМ // Тез. докл. VIII Всесоюз. науч.-техн. конф. «Измерительные информационные системы».— Ташкент: ЦП НТО «ПРИБОРПРОМ», 1987.

Поступило в редакцию 13 октября 1989 г.

УДК 519.24

Я. А. БЕДРОВ

(Ленинград)

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАИБОЛЕЕ ТИПИЧНОЙ КРИВОЙ ПАТТЕРНА

В практике экспериментальных исследований в области физиологии и медицины достаточно часто встречается случай, когда результаты наблюдений могут быть представлены в виде кривых, характеризующих зависимость изучаемого процесса от некоторого параметра (например, времени). Характерной особенностью этих областей экспериментальных исследований является то, что, как правило, результаты экспериментов плохо воспроизводимы. При повторном проведении эксперимента на одном и том же объекте (человек, животное) и особенно при проведении его на разных объектах получаемые кривые (даже при отсутствии ошибок измерения) сохраняют только свои качественные особенности, но не являются количественно одинаковыми.

Простейшими примерами подобных ситуаций могут служить случаи, когда кривые отличаются друг от друга масштабами их значений или масштабами значений аргумента, или сдвигами по оси значений аргумента, или различными комбинациями этих факторов.

Возможной модельной интерпретацией такого поведения кривых будет предположение о том, что они могут быть представлены как результат действия на некоторую исходную кривую $y(t)$ деформирующего оператора, зависящего от случайных параметров. Рассмотрим самый простой случай, когда значения случайных параметров статистически независимы, а их распределения симметричны и одномодальны. Поставим следующий вопрос: дает ли оценка среднего значения, полученная по выборке таких деформированных кривых, представление о некоторой типичной наиболее часто встречающейся кривой?

Ограничимся случаем, когда наблюдаемые кривые гладкие и могут быть достаточно хорошо представлены векторами их значений на некоторой равномерной сетке значений аргумента. Существенными для ответа на поставленный вопрос являются два момента.

1. Факт сохранения при деформациях качественного характера кривых позволяет предположить, что число случайных параметров деформирующего оператора невелико по сравнению с размерностью векторов.

2. Приведенные простейшие примеры возможных деформаций показывают, что деформирующий оператор может быть нелинейным относительно случайных параметров.

Следствиями этих фактов будут следующие утверждения.

Распределение наблюдаемого случайного вектора вырождено, поскольку все его выборочные значения принадлежат некоторому многообразию, размерность которого равна числу случайных параметров.

Только в частных случаях, когда деформирующий оператор линеен относительно случайных параметров, это многообразие будет подпространством линейного пространства.