

вычислительных комплексов (АВК), состоящих из измерительных и автоматизированных систем обработки информации. Для повышения точности измерения АВК целесообразно применять коррекцию зондовой системы в сочетании с обработкой результатов измерений автоматизированной вычислительной системой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грищенко В. Л., Матвеева И. А. Контрастно-частотные характеристики оптоэлектрических систем с индукционным преобразованием // Автометрия.— 1983.— № 5.
2. Матвеева И. А., Пронин В. П., Шехтман Л. А. К теории измерения поверхностных зарядов методом электростатической индукции // ЖТФ.— 1977.— 47, № 7.
3. Герштейн Г. М. Моделирование полей методом электростатической индукции.— М.: Наука, 1970.
4. Матвеева И. А. Метрологические свойства зондовых систем для измерения поверхностных зарядов // Радиотехника и электроника.— 1982.— 27, № 4.
5. А. с. 617867 СССР. Устройство для измерения гармонических составляющих зарядного рельефа/А. П. Клепов, И. А. Матвеева, В. П. Пронин.— Опубл. 30.07.78. Бюл. № 28.
6. Трансер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике.— М.: Госиздат. техн.-теор. лит., 1956.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1986.
8. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ.— Киев: Наук. думка, 1978.

Поступила в редакцию 5 августа 1988 г.

УДК 535.8

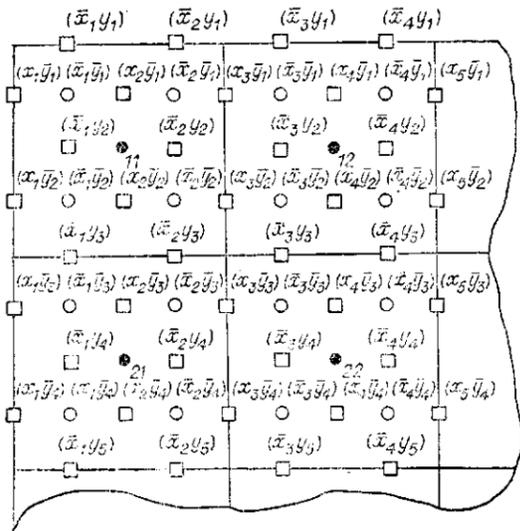
Д. А. БЕЗУГЛОВ
(Ростов-на-Дону)

СПИТЕЗ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ПРЕДМЕТНОГО ПОЛЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ ДАТЧИКА ГАРТМАНОВСКОГО ТИПА МЕТОДОМ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

Основным элементом адаптивных оптических систем (АОС) фазового сопряжения является датчик волнового фронта. С его помощью проводят измерения фазы в различных точках входного зрачка с последующим «сшиванием» измерений и формированием распределения фазы волнового фронта по всему зрачку. В силу специфики квадратичного детектирования в оптике чаще всего используются датчики интерференционного и гартмановского типа [1, 2], которые позволяют измерять разности фаз между соседними участками апертуры или локальные наклоны волнового фронта, пропорциональные величинам вида $k^{-1} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_{ij}}$, $k^{-1} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_{ij}}$, где k — волновое число; $\varphi(x, y)$ — функция, описывающая распределение фазы на апертуре.

Известен алгоритм [3, 4] восстановления волнового фронта, предполагающий при обработке результатов измерений, например от n^2 субапертур, решение системы из $(n+1)^2$ линейных алгебраических уравнений. Для решения такой системы потребуется не менее $2(n+1)^6/3$ операций, что существенно ограничивает применение указанного алгоритма в реальном масштабе времени для больших n . Таким образом, задача синтеза алгоритма восстановления фазового фронта, позволяющего существенно сократить вычислительные затраты, является актуальной.

В данной работе рассмотрен метод восстановления фазового фронта с использованием двумерных параболических нормализованных B -сплайнов на неподвижной сетке из пространства $S_2[\Delta_{2n+1, 2p+1}(a \times b)(c \times d)]$.



Пусть задана прямоугольная апертура размером $[a \times b] [c \times d]$, состоящая из $n \times p$ одинаковых прямоугольных субапертур размером $2h_1 \times 2h_2$, на каждой из которых измеряется величина локальных наклонов фазового фронта в двух перпендикулярных плоскостях X и Y . Несмотря на то что в оптике рассматривают в основном круглые апертуры, в последнее время наметился отход от классических позиций и различные оптические элементы (гартмановские датчики, матрицы фотоприемников, адаптивные зеркала, различные призмы и т. д.) выполняются в виде

прямоугольных апертур. Каждую субапертуру будем характеризовать парой индексов i, j , где i — номер строки, j — номер столбца ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, p}$). Измеренные значения частных производных $k^{-1} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_{ij}}$ и $k^{-1} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_{ij}}$ соответствуют середине ij -й субапертуры. Введем на X и Y множество узлов коллокации и множество узлов сплайна с равномерными шагами h_1 по координате x и h_2 по координате y (см. рисунок):

$$\Delta \begin{cases} x_{-1} < x_0 < x_1 = a < \dots < x_{2n} = b < x_{2n+1} < x_{2n+2} < x_{2n+3}; \\ y_{-1} < y_0 < y_1 = c < \dots < y_{2n} = d < y_{2n+1} < y_{2n+2} < y_{2n+3}; \end{cases}$$

$$\bar{\Delta} \begin{cases} \bar{x}_{-1} < \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_{2n} < \bar{x}_{2n+1} < \bar{x}_{2n+2}; \\ \bar{y}_{-1} < \bar{y}_0 < \bar{y}_1 < \dots < \bar{y}_{2n} < \bar{y}_{2n+1} < \bar{y}_{2n+2}; \end{cases}$$

$\Delta, \bar{\Delta}$ — множество узлов сплайна и коллокации соответственно.

Элементы Δ и $\bar{\Delta}$ связаны соотношениями

$$\bar{x}_l = (x_l + x_{l+1})/2; \bar{y}_m = (y_m + y_{m+1})/2; l = \overline{-1, 2n+2}; m = \overline{-1, 2p+2}.$$

Нумерация узлов сплайна для ij -й субапертуры подчиняется следующему правилу:

$$\begin{aligned} \text{при } l = 2i - 1 \quad m = 2j - 1 & \text{ — левая верхняя точка;} \\ \text{при } l = 2i - 1 \quad m = 2j & \text{ — правая верхняя точка;} \\ \text{при } l = 2i \quad m = 2j - 1 & \text{ — левая нижняя точка;} \\ \text{при } l = 2i \quad m = 2j & \text{ — правая нижняя точка.} \end{aligned} \quad (1)$$

Так как значения локальных наклонов волнового фронта измерены в одной плоскости, значения фазы в узлах сплайна с учетом (1) можно выразить через значения ее частных производных в виде

$$\varphi_{l,m}(x, y) = \frac{k^{-1} \partial \varphi(x, y)}{2 \partial x_{ij}} h_1 + \frac{k^{-1} \partial \varphi(x, y)}{2 \partial y_{ij}} h_2.$$

При этом искомый волновой фронт может быть синтезирован в виде системы двумерных параболических нормализованных B -сплайнов дефекта 1 [5]:

$$S_2(x, y) = \sum_{l=0}^{2n+1} \sum_{m=0}^{2p+1} b_{l,m} B_l(x, \bar{x}_l) B_m(y, \bar{y}_m), \quad (2)$$

где $b_{l,m}$ — коэффициенты сплайна;

$$\begin{aligned}
 B_l(x, \bar{x}_l) &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} + \frac{x - \bar{x}_l}{h_1} \right]^2 B_{0,l-1} + \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{x - \bar{x}_l}{h_1} \right)^2 \right] B_{0,l} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{x - \bar{x}_l}{h_1} \right]^2 B_{0,l+1}; \\
 B_m(y, \bar{y}_m) &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} + \frac{y - \bar{y}_m}{h_2} \right]^2 B_{0,m-1} + \left[\frac{3}{4} - \left(\frac{y - \bar{y}_m}{h_2} \right)^2 \right] B_{0,m} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} - \frac{y - \bar{y}_m}{h_2} \right]^2 B_{0,m+1}; \\
 B_{0,l} &= \begin{cases} 1 & \text{для } x \in [x_l, x_{l+1}); \\ 0 & \text{для } x \notin [x_l, x_{l+1}); \end{cases} \\
 B_{0,m} &= \begin{cases} 1 & \text{для } y \in [y_m, y_{m+1}); \\ 0 & \text{для } y \notin [y_m, y_{m+1}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

С учетом того, что средняя фаза на апертуре равна нулю, $\langle \varphi \rangle = 0$ [3], краевые условия запишем в виде

$$\begin{aligned}
 S_2(x, y)|_{x=a} = S_2(x, y)|_{x=b} &= 0; \\
 S_2(x, y)|_{y=c} = S_2(x, y)|_{y=d} &= 0.
 \end{aligned}$$

Для нахождения коэффициентов $b_{l,m}$ введем систему сплайн-функций

$$v_l(y, \bar{y}) = \sum_{m=0}^{2p+1} b_{l,m} B_m(y, \bar{y}_m), \quad l = \overline{0, 2k+1}.$$

Тогда сплайн $S_2(x, y)$ может быть выражен формулой

$$S_2(x, y) = \sum_{l=0}^{2n+1} v_l(y, \bar{y}_m) B_l(x, \bar{x}_l). \quad (3)$$

Для нахождения коэффициентов сплайна (3) необходимо решить $2n+2$ одномерных задач. Рассмотрим решение одной l -й задачи. В соответствии с [5] оно запишется в виде

$$\begin{aligned}
 v_{0,l} + v_{1,l} &= 0; \\
 v_{m-1,l} + 6v_{m,l} + v_{m+1,l} &= 8\varphi_{l,m}(x, y); \\
 v_{2p,l} + v_{2p+1,l} &= 0, \quad m = \overline{1, 2p}; \quad l = \overline{0, 2n+1}.
 \end{aligned}$$

Матрица системы имеет доминирующую главную диагональ, поэтому коэффициенты $\{v_{m,l}\}$ могут быть легко вычислены методом прогонки. Окончательное вычисление коэффициентов сплайна (2) проведем, решив $2p+2$ одномерных задач вида

$$\begin{aligned}
 b_{0,m} + b_{1,m} &= 0; \\
 b_{l-1,m} + 6b_{l,m} + b_{l+1,m} &= 8v_{l,m}; \\
 b_{2n,m} + b_{2n+1,m} &= 0, \quad l = \overline{1, 2n}; \quad m = \overline{0, 2p+1}.
 \end{aligned}$$

Среднее значение фазы на ij -й субапертуре в терминах сплайнов будет иметь вид

$$\langle \varphi_{ij} \rangle = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+2}} \int_{y_{2j-1}}^{y_{2j+2}} S_2(x, y) dx dy.$$

После интегрирования с учетом (2) получим

$$\langle \varphi_{ij} \rangle = \frac{1}{64h_1 h_2} \left[11 \frac{47}{72} (b_{2i-2, 2j-1} + b_{2i+1, 2j-2} + b_{2i-2, 2j+1} + b_{2i+1, 2j+1}) + \right.$$

n	Q ₁	Q ₂ , q = 35								
		N=4	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10	N=11	N=12
4	3,0	0,9	0,7	0,6	0,6	0,5	0,4	0,4	0,4	0,3
7	17,8	4,8	4,0	3,5	3,1	2,7	2,5	2,3	2,1	1,9
10	61,2	16,0	13,5	11,6	10,2	9,1	8,2	7,5	6,9	6,4
13	156,9	40,6	34,1	29,3	25,8	23,0	20,7	18,9	17,3	16,0
16	336,1	86,1	72,3	62,2	54,7	48,7	44,0	40,0	36,8	34,0
19	637,4	162,3	136,1	117,2	102,9	91,7	82,7	75,4	69,2	63,9
22	1106,5	280,4	235,1	202,4	177,7	158,4	142,9	130,1	119,4	110,4

$$\begin{aligned}
& + 17 \frac{25}{72} (b_{2i-1,2j-2} + b_{2i,2j-1} + b_{2i-2,2j-1} + b_{2i+1,2j-1} + b_{2i-2,2j} + \\
& + b_{2i+1,2j} + b_{2i-1,2j+1} + b_{2i,2j+1}) + 19 \frac{69}{72} (b_{2i-1,2j-1} + b_{2i,2j-1} + b_{2i-1,2j} + b_{2i,2j}) \Big].
\end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, вычислив коэффициенты сплайна S_2 , можно легко получить значение средней фазы на субапертуре.

При построении АОС часто используют представление фазового фронта в базисе ортогональных полиномов Цернике [4]:

$$\varphi(x, y) = \sum_{r=1}^N z_r(x, y) a_r,$$

где $z_r(x, y)$ — полиномы Цернике, представленные в декартовой системе координат; a_r — коэффициенты разложения.

Численно-аналитическое представление фазового фронта в виде системы сплайн-функций позволяет перейти к такому представлению. При этом коэффициенты разложения в ортогональном базисе будут иметь вид

$$a_r = \iint z_r(x, y) S_2(x, y) dx dy$$

или с учетом (2)

$$a_r = \sum_{l=0}^{2n+1} \sum_{m=0}^{2p+1} \iint z_r(x, y) B_l(x, \bar{x}_l) B_m(y, \bar{y}_l) b_{l,m} dx dy. \quad (5)$$

Объем вычислительных затрат для построения двумерного параболического сплайна равен [5]

$$Q_1 = 177n^2 + 160n.$$

При нахождении коэффициентов разложения в базисе полиномов Цернике объем вычислительных затрат равен

$$Q_2 = 160(n^2 + n) + 4Nn^2q,$$

где q зависит от номера полинома и его значение приблизительно равно $20 \div 40$.

В таблице приведены результаты расчета выигрыша в вычислительных затратах для Q_1 и Q_2 по сравнению с алгоритмом [3, 4].

Приведем пример реализации алгоритма (5). Пусть после вычисления коэффициентов сплайна необходимо получить выражение для разложения фазового фронта в виде суммы первых трех полиномов Цернике:

$$z_1(x, y) = 1; z_2(x, y) = 2x; z_3(x, y) = 2y.$$

Тогда в соответствии с (2) получим

$$\begin{aligned}
a_1 = \frac{1}{64h_1 h_2} \sum_{l=1}^{2n} \sum_{m=1}^{2p} \Big[& 46 \frac{11}{48} (b_{l-1,m-1} + b_{l+1,m-1} + b_{l+1,m-1} + b_{l+1,m+1}) + \\
& + 22 \frac{14}{48} (b_{l,m-1} + b_{l-1,m} + b_{l+1,m} + b_{m,l+1}) + 10 \frac{5}{48} b_{l,m} \Big];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & \frac{1}{64h_1h_2} \sum_{l=1}^{2n} \sum_{m=1}^{2p} \left[b_{l-1,m-1} \left(46 \frac{11}{18} h_1 + 9 \frac{1}{3} \bar{x}_l \right) + 22 \frac{14}{18} h_1 b_{l-1,m} + \right. \\
& + b_{l-1,m+1} \left(46 \frac{11}{18} h_1 - 9 \frac{1}{3} \bar{x}_l \right) + b_{l,m-1} \left(22 \frac{14}{18} h_1 + 5 \frac{1}{3} \bar{x}_l \right) + \\
& + 10 \frac{8}{18} b_{l,m} h_1 + b_{l,m+1} \left(22 \frac{14}{18} h_1 - 5 \frac{1}{3} \bar{x}_l \right) + b_{l+1,m-1} \left(46 \frac{11}{18} h_1 + 9 \frac{1}{3} \bar{x}_l \right) + \\
& \left. + 22 \frac{14}{18} b_{l+1,m} h_1 + b_{l+1,m+1} \left(46 \frac{11}{18} h_1 - 9 \frac{1}{3} \bar{x}_l \right) \right]; \quad (6) \\
a_3 = & \frac{1}{64h_1h_2} \sum_{l=1}^{2n} \sum_{m=1}^{2p} \left[b_{l-1,m-1} \left(46 \frac{11}{18} h_2 + 9 \frac{1}{3} \bar{y}_m \right) + b_{l-1,m} \left(22 \frac{14}{18} h_2 + 5 \frac{1}{3} \bar{y}_m \right) + \right. \\
& + b_{l-1,m+1} \left(46 \frac{11}{18} h_2 + 9 \frac{1}{3} \bar{y}_m \right) + 22 \frac{14}{18} h_2 b_{l,m-1} + 10 \frac{8}{18} b_{l,m} h_2 + \\
& + 22 \frac{14}{18} b_{l,m+1} h_2 + b_{l+1,m-1} \left(46 \frac{11}{18} h_2 - 9 \frac{1}{3} \bar{y}_m \right) + \\
& \left. + b_{l+1,m} \left(22 \frac{14}{18} h_2 - 5 \frac{1}{3} \bar{y}_m \right) + b_{l+1,m+1} \left(46 \frac{11}{18} h_2 - 9 \frac{1}{3} \bar{y}_m \right) \right].
\end{aligned}$$

В соответствии с (6) алгоритм был реализован на ЭВМ серии ЕС на языке PL-1 в виде управляющей программы.

ВЫВОДЫ

Предложенный алгоритм синтеза волнового фронта по результатам измерений датчика гартмановского типа позволяет существенно сократить объем вычислительных затрат. Это достигается тем, что вместо решения одной системы из $(n+1)^2$ линейных алгебраических уравнений производится решение $2n+2$ систем размерности $4n+4$. При этом при организации вычислительного процесса возможно использование метода прогонки. Дальнейшее снижение вычислительных затрат может быть получено за счет учета симметрии в выражениях (4), (6) при организации вычислительного процесса. Структура синтезированного алгоритма такова, что он легко реализуется на ЭВМ, при этом возможна организация вычислительного процесса с использованием параллельных схем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rimmer M. P. Method for evaluating lateral shearing interferograms // Appl. Opt.— 1974.— 13, N 3.— P. 623.
2. Yellin M. Efficient wavefront sensor for compensated imaging // JOSA.— 1975.— 65, N 2.— P. 271.
3. Устинов Н. Д., Матвеев И. Н., Протопонов В. В. Методы обработки оптических полей в лазерной локации.— М.: Наука, 1983.
4. Адаптивная оптика: Сб. ст./Под ред. Э. А. Витриченко.— М.: Мир, 1980.
5. Завьялов Ю. С., Квасов В. И., Мирошниченко В. А. Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 13 октября 1988 г.