

Ю. Е. ВОСКОБОЙНИКОВ  
(Новосибирск)

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ  
НА ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ ФУНКЦИЙ

**Постановка задачи.** Для многих линейных измерительных систем связь результата измерения  $f(x)$  с входным сигналом  $\varphi(y)$  описывается интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода:

$$\int_0^x K(x-y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in [0, b_f], \quad (1)$$

где аппаратная функция  $K(x, y)$  считается известной. Задача восстановления сигнала  $\varphi(y)$  по измеренному  $f(x)$  получила название обратной измерительной задачи (или задачи редукции к идеальному измерителю) и является некорректно поставленной [1]. Существуют эффективные линейные алгоритмы [1, 2] построения устойчивых регуляризованных решений уравнений (1) при различной «количественной» априорной информации о погрешностях измерения  $f(x)$  и об искомой функции  $\varphi(y)$ . Учет дополнительной «качественной» информации о поведении функции  $\varphi(y)$  (например, неотрицательность  $\varphi(y)$ , возрастание или убывание ее на определенных участках) позволяет восстанавливать высокочастотные составляющие  $\varphi(y)$ , отсутствующие в правой части  $f(x)$  («эффект сверхразрешения») [3]. В [4] предложен «быстрый» регуляризирующий алгоритм построения неотрицательных решений. В данной работе этот подход распространяется на более общий случай априорных ограничений.

**Линейный регуляризирующий алгоритм (РА).** Регуляризованное решение уравнения (1) будем строить при следующих предположениях [2]: а) функции  $\varphi(y)$ ,  $K(x)$  финитны и обращаются в нуль вне интервалов  $[0, b_\varphi]$ ,  $[0, b_K]$  соответственно; б) вместо точной правой части  $f$  доступна для наблюдения сумма  $\tilde{f}(x) = f(x) + \eta(x)$ , где  $\eta(x)$  — стационарный шум измерения с нулевым средним, не коррелированный с  $f(x)$ ; в) реализация  $\tilde{f}(x)$  измеряется на интервале  $[0, b_f]$  с шагом дискретизации  $\Delta$  в узлах  $x_j = (j-1)\Delta$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_f$ , и формируется вектор измерений  $\tilde{\mathbf{f}} = [\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2), \dots, \tilde{f}(x_{N_f})]^T$ , где  $T$  — символ транспонирования. При этом  $b_f \geq b_\varphi + b_K$ .

Используя квадратурную формулу трапеций, получаем конечномерный (матричный) аналог

$$\mathbf{K}\varphi = \mathbf{f} \quad (2)$$

интегрального уравнения (1), где проекции  $\varphi(j)$  вектора  $\varphi = [\varphi(1), \dots, \varphi(N_\varphi)]^T$  отождествляются со значениями искомой функции  $\varphi(y)$  в узлах  $y_j = (j-1)\Delta$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_\varphi$ . Размеры  $N_f$ ,  $N_\varphi$  векторов  $\mathbf{f}$ ,  $\varphi$  определяются соотношениями  $N_f = \text{ent}[b_f/\Delta] + 1$ ;  $N_\varphi = \text{ent}[b_\varphi/\Delta] + 1$ , где  $\text{ent}[z]$  — целая часть числа  $z$ . Шаг  $\Delta$  выбирается из условия малости ошибки аппроксимации уравнения (1) системой (2) по сравнению с погрешностями измерения  $\eta(x)$ .

«Быстрый» алгоритм построения регуляризованного решения (2) на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ) состоит из следующих шагов [2]:

**Шаг 1.** Выбирается наименьшая величина  $N$ , позволяющая использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье и удовлетворяющая условию  $N \geq N_f + N_K + N_\eta - 2$ , где  $N_K$  — количество отсчетов ядра  $K(x)$ ;  $N_\eta = \text{ent}[\tau_\eta/\Delta]$ ;  $\tau_\eta$  — интервал корреляции шума измерения.

**Шаг 2.** Формируются периодические (с периодом  $N$ ) последовательности

$$\tilde{f}_p(j) = \begin{cases} \tilde{f}(x_{j+1}), & 0 \leq j \leq N_f - 1; \\ 0, & N_f \leq j \leq N - 1; \end{cases}$$

$$K_p(j) = \begin{cases} K(j\Delta)\Delta, & 0 \leq j \leq N_K - 1; \\ 0, & N_K \leq j \leq N - 1. \end{cases}$$

**Шаг 3.** Вычисляется прямое ДПФ последовательности  $\{\tilde{f}_p(j)\}$  и обратное ДПФ последовательности  $\{K_p(j)\}$ :

$$\tilde{F}_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}_p(j) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N}lj\right), \quad 0 \leq l \leq N-1; \quad (3)$$

$$\lambda_K(l) = \sum_{j=0}^{N-1} K_p(j) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} lj\right), \quad 0 \leq l \leq N-1, \quad (4)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ .

**Шаг 4.** Вычисляются коэффициенты ДПФ регуляризованного решения:

$$\Phi_{p\alpha}(l) = \frac{\lambda_K(l)}{|\lambda_K(l)|^2 + \alpha\lambda_Q(l)}, \quad 0 \leq l \leq N-1. \quad (5)$$

**Шаг 5.** Обратным ДПФ (4) по коэффициентам  $\{\Phi_{p\alpha}(l)\}$  вычисляется периодическая последовательность  $\{\varphi_{p\alpha}(j)\}$ .

**Шаг 6.** Формируется  $N_\varphi$ -мерный вектор  $\varphi_\alpha$  искомого регуляризованного решения системы (2):

$$\varphi_\alpha(j) = \varphi_{p\alpha}(j-1), \quad 1 \leq j \leq N_\varphi,$$

$j$ -я проекция которого является оценкой для значения  $\varphi((j-1)\Delta)$ .

Последовательность  $\{\lambda_K(l)\}$ , входящая в (5), определяется имеющейся априорной информацией о статистических характеристиках шума измерения и гладкости искомого решения. Возможны различные подходы (детерминированный, статистический) к формированию этой последовательности (подробнее см. [2, с. 173, 180]). Выбор конкретного способа формирования зависит от полноты имеющейся априорной информации. Оценка оптимального (при фиксированной последовательности  $\{\lambda_Q(l)\}$ ) значения параметра регуляризации  $\alpha$  при известной дисперсии шума осуществляется на основе критерия оптимальности [2], а в случае слабо коррелированного шума с неизвестной дисперсией на основе метода перекрестной значимости [2, 5]. Выбор  $\alpha$  может также происходить по заданным точностным характеристикам РА [6]. В дальнейшем будем полагать, что параметр  $\alpha$  определен.

Введем в рассмотрение следующие две характеристики:

$$\begin{aligned} M_{ст}(\alpha) &= \sum_{l=0}^{N/2} \frac{|\lambda_K(l)|^2}{|\lambda_K(l)|^2 + \alpha\lambda_Q(l)}; \\ M_{св}(\alpha) &= \sum_{l=0}^{N/2} \frac{\alpha\lambda_Q(l)}{|\lambda_K(l)|^2 + \alpha\lambda_Q(l)}, \end{aligned} \quad (6)$$

для которых справедливы соотношения

$$\begin{aligned} M_{ст}(\alpha) + M_{св}(\alpha) &= N/2 + 1 \text{ для любого } \alpha \geq 0; \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} M_{ст}(\alpha) &= N/2 + 1; \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} M_{ст}(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Величину  $M_{ст}(\alpha)$  можно интерпретировать как «обобщенное число» коэффициентов ДПФ вектора  $\varphi$ , не искажаемых РА (значение  $|\lambda_K(l)|^2 / (|\lambda_K(l)|^2 + \alpha\lambda_Q(l)) \approx 1$  свидетельствует о сохранении  $l$ -го коэффициента ДПФ искомого решения).

**З а м е ч а н и е 1.** Число коэффициентов  $\Phi_{p\alpha}(l)$ , определяемых на шаге 4, равно  $N$ . Однако свойство  $\Phi_{p\alpha}(l) = \Phi_{p\alpha}^*(N-l)$ ,  $l = N/2 + 1, \dots, N-1$ , уменьшает число независимых коэффициентов до  $N/2 + 1$ . Поэтому при численной реализации алгоритма используются только первые  $N/2 + 1$  коэффициентов ДПФ.

Характеристика  $M_{св}(\alpha)$  определяет «обобщенное число» коэффициентов ДПФ, практически исключаемых из решения (переходят в систематическую ошибку РА [2, с. 179]). Эти проекции можно доопределить, но уже исходя не из правой части (1), а из дополнительной априорной информации об искомом решении.

**Априорные ограничения.** Достоверная априорная информация об искомом решении  $\varphi(y)$  определяет ограничения, которым должно удовлетворять регуляризованное решение. Так как построенное решение  $\varphi_\alpha$  является вектором, то ограничения определим в терминах векторных пространств. Прежде всего для сохранения «низкочастотных» информативных составляющих регуляризованного решения  $\varphi_\alpha$  введем допустимое множество

$$\Phi_1 = \{\varphi : (FR_N\varphi)(l) = \Phi_{p\alpha}(l), \quad 0 \leq l \leq M_{ст}(\alpha) - 1\}, \quad (7)$$

где  $(FR_N\varphi)(l)$  —  $l$ -й коэффициент ДПФ вектора  $R_N\varphi$ ;  $F$  — матричный оператор прямого ДПФ (3). Оператор  $R_N$  строит вектор размерности  $N$  добавлением нулевых проекций к  $N_\varphi$ -мерному вектору  $\varphi$ ,  $\Phi_{p\alpha}(l)$  — коэффициенты ДПФ регуляризованного решения  $\varphi_\alpha$ . Величина  $M_{ст}(\alpha)$ , определяемая (6), делит индексы  $0 \leq l \leq N/2$  коэффициентов ДПФ решения (см. замечание 1) на два множества:

$$L_1 = \{l : 0 \leq l \leq M_{ст}(\alpha) - 1\}; \quad L_2 = \{l : M_{ст}(\alpha) \leq l \leq N/2\}.$$

Коэффициенты ДПФ  $\Phi_p(l)$ ,  $l \in L_2$ , формируются (а точнее, доопределяются) другими априорными ограничениями, типичными из которых являются следующие:

1. Отличие  $\varphi(y)$  от нуля только на конечном интервале значений аргумента  $y$  определяет допустимое множество

$$\Phi_2 = \{\varphi : \varphi(j) = 0, j \notin J_\varphi\}, \quad (8)$$

где  $J_\varphi$  — набор индексов проекций вектора  $\varphi$ .

2. Принадлежность  $\varphi(y)$  интервалу  $[\varphi_{\min}(y), \varphi_{\max}(y)]$  обуславливает множество

$$\Phi_3 = \{\varphi : \varphi_{\min}(j) \leq \varphi(j) \leq \varphi_{\max}(j)\}, \quad (9)$$

что множества  $\Phi_1, \dots, \Phi_{3+m}$  являются выпуклыми и замкнутыми.

Непосредственное введение через элементы последовательности  $\{\lambda_Q(i)\}$  в алгоритм построения  $\varphi_\alpha$  априорных ограничений (8)–(10) не представляется возможным. Поэтому в данной работе (по аналогии с [4]) для учета этих ограничений используется так называемый «метод проекций на выпуклые множества» [7, 8], заключающийся в отыскании общей точки  $\varphi_\alpha^*$  пересечения множеств  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{3+m}$ , т. е.  $\varphi_\alpha^* \in \Phi^* := \bigcap_{i=1}^{3+m} \Phi_i$ .

**Нелинейный алгоритм построения регуляризованного решения.** В методе проекций на выпуклые множества [7, 8] строится последовательность элементов  $\varphi_\alpha^{(0)}, \varphi_\alpha^{(1)}, \dots, \varphi_\alpha^{(n)}$  и для получения следующего элемента  $\varphi_\alpha^{(n+1)}$  выбирается некоторое множество  $\Phi_{i(n)}$  и делается шаг по направлению к проекции на это множество, т. е.

$$\varphi_\alpha^{(n+1)} = \varphi_\alpha^{(n)} + \mu_n (\mathbf{P}_{i(n)} \varphi_\alpha^{(n)} - \varphi_\alpha^{(n)}), \quad 0 < \mu_n < 2. \quad (11)$$

В частном случае при  $\mu_n = 1$ ,  $\varphi_\alpha^{(n+1)} = \mathbf{P}_{i(n)} \varphi_\alpha^{(n)}$ , т. е. в качестве  $\varphi_\alpha^{(n+1)}$  берется проекция  $\varphi_\alpha^{(n)}$  на множество  $\Phi_{i(n)}$ . Если множество  $\Phi^*$  не пусто, то при определенном выборе номера  $i(n)$  последовательность векторов  $\varphi_\alpha^{(n)}$  покомпонентно сходится к вектору  $\varphi_\alpha^* \in \Phi^*$ .

Возникает вопрос о сходимости процедуры (11), если отсутствует элемент, общий для всех множеств  $\Phi_i$ , т. е. множество  $\Phi^*$  пусто. Введем два множества  $\Phi_1^* = \Phi_1$ ;  $\Phi_2^* = \bigcap_{i=2}^{3+m} \Phi_i$ . Решение уравнения (1) на выпуклых множествах  $\Phi_2, \dots, \Phi_{3+m}$  подразумевает, что: а) ограничения (8)–(10) совместны, т. е. найдется элемент  $\varphi \in \Phi_2^*$ , одновременно удовлетворяющий (8)–(10); б) вектор решения  $\bar{\varphi}_0$ , построенный при  $\alpha=0$  и точной правой части системы (2), принадлежит  $\Phi_2^*$ . Тогда множество  $\Phi_1^*$  состоит из одного элемента  $\bar{\varphi}_0$  (так как  $M_{CT}(\alpha) = N/2 + 1$ ) и пересечение  $\Phi^* = \Phi_1^* \cap \Phi_2^*$  также состоит из одного элемента  $\bar{\varphi}_0$ . Если  $\alpha > 0$ , то множества  $\Phi_1^*$  и  $\Phi_2^*$  могут не иметь общей точки. Это зависит от  $M_{CT}(\alpha)$  и  $\Phi_2^*$ . Если  $\Phi_1^*$  и  $\Phi_2^*$  не имеют общего элемента, то найдутся два вектора  $\varphi_1^* \in \Phi_1^*$ ,  $\varphi_2^* \in \Phi_2^*$  такие, что  $\varphi_2^* = \mathbf{P}_{\Phi_2^*} \varphi_1^*$ ,  $\varphi_1^* = \mathbf{P}_{\Phi_1^*} \varphi_2^*$ , где  $\mathbf{P}_{\Phi_i^*}$  — оператор проектирования на множество  $\Phi_i^*$ . Векторы  $\varphi_1^*$ ,  $\varphi_2^*$  падают на минимальном расстоянии друг от друга и принадлежат границам множеств  $\Phi_1^*$ ,  $\Phi_2^*$ . Если множество  $\Phi^* = \Phi_1^* \cap \Phi_2^*$  не пусто, то  $\varphi_\alpha^* = \varphi_1^* = \varphi_2^*$ .

**Утверждение.** При любом начальном приближении  $\varphi_\alpha^{(0)}$  для последовательности  $\{\varphi_\alpha^{(n)}\}$ , порождаемой (11), с выбором

$$i(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_\alpha^{(n)} \in \Phi_i, \quad 2 \leq i \leq 3+m; \\ i^*(n), & \text{если } \varphi_\alpha^{(n)} \in \Phi_1, \end{cases} \quad (12)$$

где  $i^*(n)$  падают из условия (13), имеет место покомпонентная сходимость:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{(n)} &\rightarrow \varphi_1^*, & \text{если } \varphi_\alpha^{(n)} \in \Phi_1; \\ \varphi_\alpha^{(n)} &\rightarrow \varphi_2^*, & \text{если } \varphi_\alpha^{(n)} \in \Phi_i, \quad 2 \leq i \leq 3+m. \end{aligned}$$



Результаты вычислительного эксперимента:  
1 — точное решение  $\varphi(y)$ ; 2 — регуляризованное решение  $\varphi_\alpha(y)$ ; 3 — регуляризованное решение  $\varphi_\alpha^*(y)$

Доказательство этого утверждения осуществляется аналогично доказательству теоремы 2 из [7]. Таким образом, имеются два предельных вектора  $\Phi_1^*$ ,  $\Phi_2^*$ . Исходя из специфики решаемой задачи, для которой критерием приемственности построенного решения являются ограничения (8)–(10), в качестве  $\Phi_\alpha^*$  будем принимать элемент из  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\Phi_2^*$ . Изложим вычислительную схему нелинейного регуляризирующего алгоритма, состоящего из следующих шагов:

**Шаг 0.** Строится линейное регуляризованное решение  $\varphi_\alpha$ , которое принимается в качестве  $\varphi_\alpha^{(0)}$ . Номер итерации  $n = 0$ .

**Шаг 1.** По элементу  $\varphi_\alpha^{(n)}$  вычисляется

$$\varphi_\alpha^{(n+1)} = \varphi_\alpha^{(n)} + \mu_n' (\mathbf{P}_{i(n)} \varphi_\alpha^{(n)} - \varphi_\alpha^{(n)}), \quad 0 < \mu_n' < 2,$$

где номер  $i(n)$  выбирается из условия

$$\rho(\varphi_\alpha^{(n)}, \Phi_{i(n)}) = \sup \rho(\varphi_\alpha^{(n)}, \Phi_j), \quad 2 \leq j \leq 3 + m. \quad (13)$$

**Шаг 2.** Если  $n = 0$ , то осуществляется переход к шагу 3. В противном случае проверяется условие  $\|\varphi_\alpha^{(n+1)} - \varphi_\alpha^{(n-1)}\| / \|\varphi_\alpha^{(n+1)}\| < \varepsilon_1 = 10^{-2}$ . При выполнении условия происходит переход к шагу 5.

**Шаг 3.** По элементу  $\varphi_\alpha^{(n+1)}$  строится

$$\varphi_\alpha^{(n+2)} = \varphi_\alpha^{(n+1)} + \mu_n'' (\mathbf{P}_1 \varphi_\alpha^{(n+1)} - \varphi_\alpha^{(n+1)}), \quad 0 < \mu_n'' < 2.$$

**Шаг 4.** Полагается  $n = n + 2$  и выполняется переход к шагу 1.

**Шаг 5.** В качестве  $\varphi_\alpha^*$  принимается элемент  $\varphi_\alpha^{(n+1)}$ , и на этом работа алгоритма заканчивается.

**З а м е ч а н и е 2.** Параметры релаксации  $\mu_n'$ ,  $\mu_n''$  можно задавать как

$$\mu_n' = \mu_n'' = 1 + \frac{1}{n+1} = 10^{-2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**З а м е ч а н и е 3.** Аналогично [7] для ускорения сходимости рекомендуется на начальных итерациях, например, при  $n = 2, 4, \dots$  вместо шага 3 выполнить следующее построение:

$$\varphi_\alpha^{(n+2)} = \varphi_\alpha^{(n-1)} + \mu_n^* (\varphi_\alpha^{(n+1)} - \varphi_\alpha^{(n-1)}), \quad (14)$$

где  $\mu_n^*$  определяется соотношением

$$\mu_n^* = \|\varphi_\alpha^{(n)} - \varphi_\alpha^{(n-1)}\|^2 / (\varphi_\alpha^{(n-1)} - \varphi_\alpha^{(n+1)})^T (\varphi_\alpha^{(n-1)} - \varphi_\alpha^{(n)}),$$

при этом коэффициенты релаксации  $\mu_n' = \mu_n'' = 1$ . Как показал вычислительный эксперимент, использование (14) сокращает количество итераций в 3–5 раз и общее число итераций не превосходит 20.

Определим операторы проектирования и расстояния  $\rho(\varphi, \Phi_j)$ , используемые в приведенном алгоритме:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P}_2 \varphi\}_j &= \begin{cases} \varphi(j), & \text{если } j \in J_\varphi; \\ 0, & \text{если } j \notin J_\varphi; \end{cases} \\ \rho(\varphi, \Phi_2) &= \left( \sum_{j \in J_\varphi} \varphi^2(j) \right)^{1/2}; \\ \{\mathbf{P}_3 \varphi\}_j &= \begin{cases} \varphi_{\min}(j), & \text{если } \varphi(j) < \varphi_{\min}(j); \\ \varphi_{\max}(j), & \text{если } \varphi(j) > \varphi_{\max}(j); \\ \varphi(j), & \text{если } \varphi_{\min}(j) \leq \varphi(j) \leq \varphi_{\max}(j); \end{cases} \end{aligned}$$

$$\rho(\Phi, \Phi_3) = \left[ \sum_{j=1}^{N_\Phi} (\min^2(0, \Phi_{\max}(j) - \Phi(j)) + \min^2(0, \Phi(j) - \Phi_{\min}(j))) \right]^{1/2};$$

$$P_{3+i}\Phi = \begin{cases} \Phi, & \text{если } G_i\Phi \leq g_i; \\ \Phi + G_i(g_i - G_i\Phi) / \|G_i\|^2, & \text{если } G_i\Phi > g_i, \quad 1 \leq i \leq m; \end{cases}$$

$$\rho(\Phi, \Phi_{3+i}) = \begin{cases} 0, & \text{если } G_i\Phi \leq g_i; \\ \|g_i - G_i\Phi\| / \|G_i\|, & \text{если } G_i\Phi > g_i, \quad 1 \leq i \leq m; \end{cases}$$

$$P_1\Phi = S_{N_\Phi} \Phi_{PM}.$$

где  $\Phi_{PM}$  — вектор размерности  $N$ , коэффициенты ДПФ которого определяются как

$$\Phi_{PM}(l) = \begin{cases} \Phi_{p\alpha}(l), & 0 \leq l \leq M_{ст}(\alpha) - 1; \\ \Phi_p(l), & M_{ст}(\alpha) \leq l \leq N/2; \end{cases}$$

$\Phi_p(l)$ ,  $\Phi_{p\alpha}(l)$  — коэффициенты ДПФ вектора  $R_N\Phi$  и регуляризованного решения  $\Phi_\alpha$  соответственно; оператор  $S_{N_\Phi}$  преобразует  $N$ -мерный вектор в вектор размерности  $N_\Phi$  отбрасыванием последних  $N - N_\Phi$  проекций.

**Результаты вычислительного эксперимента.** В качестве решения  $\varphi(y)$  бралась функция

$$\varphi(y) = \text{const} \left( \frac{1}{y} \right)^2 \exp \left[ - \left( \frac{L}{y\gamma} - S \right)^2 \right]$$

с параметрами  $L = 0,5$  м,  $\gamma = 50$  м/с,  $S = 10$ , часто встречающаяся при исследованиях разреженного газа [9]. Шаг  $\Delta = 0,5 \cdot 10^{-5}$ ,  $N_\Phi = 140$ ,  $N = 256$ . Ядро  $K(x)$  задавалось трапециевидальной формы с  $N_K = 45$ , отношение полуширин ядро/сигнал  $\sim 2,5$ , что соответствует плохой обусловленности системы (2). Правая часть искажалась шумом с относительным уровнем 5%. По этим данным строились два регуляризованных решения  $\Phi_\alpha$ ,  $\Phi_\alpha^*$ . Параметр регуляризации  $\alpha$  находился из ограничения на ширину функции рассеяния РА ( $\Delta_{пр} = 5 \cdot 10^{-5}$ ) [6]. Решение  $\Phi_\alpha$  (см. рисунок) имеет отрицательные значения на «крыльях» функции  $\varphi(y)$ , типичные для линейных РА. При построении  $\Phi_\alpha^*$  учитывались естественные априорные ограничения: а) положительность проекций  $\varphi(j) \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq N_\Phi$ ; б)  $\varphi(j+1) - \varphi(j) \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq M-1$ ; в)  $\varphi(j+1) - \varphi(j) \leq 0$ ,  $M \leq j \leq N_\Phi - 1$ .

Помер  $M$  максимальной проекции вычислялся по  $\Phi_\alpha$ . Решение  $\Phi_\alpha^*$ , приведенное на рисунке, имеет более высокую точность и, что самое главное (с точки зрения экспериментатора), отвечает «качественным» требованиям (положительность, наличие одного максимума) исследуемого процесса.

Предложенный в работе нелинейный регулярирующий алгоритм обладает высокой вычислительной эффективностью. Так, для построения решения  $\Phi_\alpha^*$  рассмотренного примера потребовалось  $\approx 5$  с машинного времени (ЭВМ БЭСМ-6). Объем оперативной памяти для хранения исходных и рабочих массивов равен  $6N$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. И., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
2. Воскобойников Ю. Е., Преображенский П. Г., Седельников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. — Новосибирск: Наука, 1984.
3. Тихонов А. И., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регулярирующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука, 1983.
4. Брошников А. В., Воскобойников Ю. Е., Преображенский П. Г. Нелинейный регулярирующий алгоритм редукции к идеальному спектральному прибору // Оптика и спектроскопия. — 1988. — 64, вып. 4.
5. Воскобойников Ю. Е., Преображенский П. Г. Выбор параметра регуляризации при решении обратных измерительных задач с неизвестными характеристиками шума измерения // Автометрия. — 1984. — № 2.
6. Воскобойников Ю. Е. Решение обратных измерительных задач с заданными точностными характеристиками // Автометрия. — 1983. — № 2.
7. Гурин Л. Г., Поляк Б. Т., Райк Э. В. Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1967. — № 6.
8. Youla D. C., Webb H. Image restoration by the method of convex projection. P. I // IEEE Trans. on Medical Imaging. — 1982. — M11, N 2. — P. 81.
9. Воскобойников Ю. Е., Зарвин А. Е., Седельников А. И., Томсонс Я. Я. Об уменьшении погрешностей определения функции распределения скоростей молекул // Диагностика потоков разреженного газа. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1979.

Поступило в редакцию 3 июня 1988 г.