УДК 519.25

Я. А. БЕДРОВ

(Ленинград)

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Одной из характерных особенностей биологических систем является существенная нестационарность их поведения. Изучение этой нестационарности составляет предмет многих экспериментальных исследований. Однако в ряде случаев ее прямое наблюдение оказывается невозможным из-за того, что в условиях стационарного поведения наблюдаемые переменные системы не остаются постоянными, а претерпевают периодические изменения достаточно сложной формы. Примеры подобного поведения постоянно встречаются при изучении сердечно-сосудистой системы и системы дыхания.

В силу этого при нестационарном поведении эти переменные сохраняют периодическую структуру изменений, которая обычно модулируется за счет нестационарности масштаба времени процесса и его значений. В случае знакопеременного процесса визуальный анализ его графика позволяет определить те моменты перехода процесса через нуль, когда (с учетом масштабов) значения производных одинаковы. Однако наличие этих меток на оси времени позволяет судить только о средней величине периода повторения процесса за время между двумя соседними отметками, в то время как на этом интервале масштаб времени может меняться сложным образом. Аналогичные затруднения возникают и при попытке определения характера поведения масштаба значений.

В связи с этим представляет практический интерес рассмотреть возможность определения по наблюдениям такого процесса характеров изменения временного и амплитудного масштабов во времени. Ниже дается формальная постановка задачи идентификации функций $A(t)$, $S(t)$ для процесса, удовлетворяющего модели

$$y(t) = A(t)\varphi(S(t)t);$$
$$\varphi(\tau + T) = \varphi(\tau);\ T = \mathrm{const},$$

где $S(t)$ — полиномиальный сплайн. Предполагается возможность визуального определения на основании графика функции $y(t)$ моментов $\{T_i\}_0^n$ его пересечения с осью абсцисс, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(S(T_i)T_i) = \varphi(S(T_0)T_0 + iT),\ i = 1, \ldots, n.$$

Задание вида одного периода функции $\varphi(t)$ осуществляется с помощью предположения о постоянстве значений функций $A(t)$, $S(t)$ на интервале $[T_0,\ T_1]$. Показана достаточность этого предположения и условия периодичности функции $\varphi(t)$ для определения коэффициентов сплайна $S(t)$. Получены уравнения, позволяющие последовательно находить значения этих коэффициентов. Показано, что условие периодичности функции $\varphi(t)$ дает возможность получить явное выражение для функции $A(t)$ через $y(t)$ и $S(t)$.

Постановка задачи и метод решения. Пусть непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет модели

$$y(t) = A(t)\varphi(S(t)t); \tag{1}$$
$$\varphi(\tau) = \varphi(\tau + T),\ T = \mathrm{const}; \tag{2}$$
$$\frac{d\,(S\,(t)\,t)}{dt} > 0,\ A\,(t) > 0 \tag{3}$$

В силу (3) каждое из уравнений

$$S(t)t = iT,\ i = 0, \ldots, n,$$

имеет единственное решение. Будем предполагать, что график функции $y(t)$ позволяет визуально определить значения $\{T_i\}_0^n$ аргумента t, удовлетворяющие условиям

$$\varphi(S(T_i)T_i) = 0,\ i = 0, \ldots, n;$$
$$\varphi(S(T_i)T_i) = \varphi(S(T_0)T_0 + iT),\quad i = 1, \ldots, n.$$

Без потери общности положим

$$S(t) = A(t) = 1,\ t \in [T_0,\ T_1], \tag{4}$$

откуда следует, что $T = T_1 - T_0$.

Будем предполагать, что функция $S(t)$, $t \in [T_0,\ T_n]$, является полиномиальным сплайном степени 3 дефекта 2 с узлами в точках $\{T_i^*\}_1^k$, $k \leqslant n-1$, где $T_1^* = T_1$, $T_i^* \in \{T_i\}_2^{n-1}$, $T_{i-1}^* < T_i^*$, $i = 2, \ldots, k$.

Требуется определить коэффициенты полиномов, образующих сплайн, и функцию $A(t)$, $t \in [T_1, T_n]$.

В силу сделанных предположений функция $S(t)$ может быть записана в форме

$$S(t) = a_i + b_i\tau + c_i\tau^2 + d_i\tau^3,$$
$$\tau = t - T^*_{i-1}, \ t \in [T^*_{i-1}, T^*_i], \ i = 2, \ldots, k+1, \tag{5}$$

Запишем их в форме

$$iT/(iT + T^*_{j-1}) - a_j - b_j iT - c_j (iT)^2 = d_j (iT)^3, \ i = 1, \ldots, n_j, \ j = 2, \ldots, k+1. \tag{6}$$

Из условий непрерывности функции $S(t)$ и ее двух первых производных в узлах $\{T_i^*\}_1^k$ получим

$$a_{j+1} = a_j + b_j\delta_j + c_j\delta_j^2 + d_j\delta_j^3;$$
$$b_{j+1} = b_j + 2c_j\delta_j + 3d_j\delta_j^2;$$
$$c_{j+1} = c_j + 3d_j\delta_j; \tag{7}$$
$$\delta_j = T^*_j - T^*_{j-1}, \ T^*_0 = T_0, \ j = 1, \ldots, k.$$

Очевидно, что выражения (7) позволяют по заданным a_j, b_j, c_j, d_j находить значения

$$a_{j+1}, \ b_{j+1}, \ c_{j+1}, \ j = 1, \ldots, k,$$

а уравнения (6) дают возможность по заданным a_{j+1}, b_{j+1}, c_{j+1} находить значение d_{j+1} как решение соответствующей линейной системы.

Поскольку из условия (4) следует, что $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = d_1 = 0$, то оно является достаточным для определения функции $S(t)$. Так как в силу (4)

$$y(t) = \varphi(t), \ t \in [T_0, T_1],$$

то

$$\varphi(S(t)t) = y(S(t)t - mT), \ t \in [T_1, T_n], \tag{8}$$

где m — целая часть числа $S(t)t/T$. Следовательно, в силу (1) и (8) при любом t, удовлетворяющем условию

$$y(S(t)t - mT) \neq 0, \ t \in [T_1, T_n],$$

значение функции $A(t)$ дается выражением

$$A(t) = y(t)/y(S(t)t - mT).$$

Пример. В качестве примера был рассмотрен случай, когда модель нестационарного периодического процесса имела вид

$$y(t) = \sin(\pi/10S(t)(t-1)), \ t \in [1, 100];$$

$$S(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \leqslant 20; \\ 1 + 10^{-6}(t-20)^3 \text{ при } t > 20. \end{cases}$$

Предполагалось, что сплайн $S(t)$ содержит один узел в точке $t = 20$. Для определения чувствительности рассмотренного метода определения функции $S(t)$ к точности нахождения моментов пересечения функции $y(t)$ с осью t строился график значений $y(t)$, $t = 1, 2, \ldots, 100$, на основании которого с точностью до целых определялись значения параметров: $T_0 = 1$, $T_1 = 21$, $T_2 = 40$, $T_3 = 58$, $T_4 = 71$, $T_5 = 82$ — и находились значения параметров сплайна $\tilde{S}(t)$. Значение среднеквадратической погрешности сплайна $\tilde{S}(t)$ по отношению к $S(t)$, соответствующее значениям $t = 1, 2, \ldots, 82$, получилось равным $7{,}9 \cdot 10^{-4}$.

Поступило в редакцию 1 апреля 1988 г.