УДК 621.317 : 519.21

М. М. ВОСТРИКОВ, М. Г. ЗОТОВ
(Москва)

МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА — ХОПФА С УЧЕТОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Задачу синтеза оптимального регулятора можно сформулировать как задачу оптимальной фильтрации. В этом случае она сводится к решению известного интегрального уравнения Винера — Хопфа. Обобщение этой задачи для многосвязных систем автоматического управления (САУ) и фильтров приводит к системе таких уравнений Винера — Хопфа. В настоящее время существует два основных подхода к их решению. Первое направление представлено группой методов, объединенных общей идеей предложенного Леондесом [1] метода «неопределенных коэффициен-
существующих наглядностью и простотой алгоритмической реализации.

Матричное уравнение Винера — Хопфа в области изображений имеет вид

$$\mathbf{W}(s)\mathbf{S}(s) - \mathbf{R}(s) = \mathbf{\Gamma}(s), \tag{1}$$

где $\mathbf{S}(s)$ — матрица спектральных плотностей; $\mathbf{R}(s)$ — вектор-строка, элементами которых являются заданные дробно-рациональные функции с нулями и полюсами как слева, так и справа от мнимой оси в области комплексного переменного; $\mathbf{\Gamma}(s)$ — неизвестный вектор-строка, элементы которого имеют полюсы только в правой полуплоскости; $\mathbf{W}(s)$ — вектор-строка искомых передаточных функций с полюсами только в левой полуплоскости.

В дальнейших выкладках принимаем во внимание то обстоятельство, что степени полиномов числителей искомых функций не превышают степеней полиномов знаменателей.Такое ограничение имеет место, когда для корректности задачи на исходный функционал накладываются ограничения вида ([3])

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{+j\infty} |K(s)|^2\, ds = C_1 < \infty \tag{2}$$

либо

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{+j\infty} |K(s)|^2\, ds + \mu_1 \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{-j\infty}^{+j\infty} |sK(s)|^2\, ds = C_2 < \infty. \tag{3}$$

При этом в первом случае обеспечивается непрерывная зависимость решения от вариаций исходных данных в среднеквадратической метрике, а во втором — в равномерной.

С этими условиями схожи ограничения на грубость системы и реализуемость ее управляющего устройства при аналитическом конструировании [4].

Перейдем к описанию предлагаемого метода. На первом этапе решения удобным способом определения знаменателей элементов искомого вектора может быть такой. Систему уравнений (1) приводим к диагональному виду преобразованиями типа исключений Гаусса. Поясним это на примере системы второго порядка:

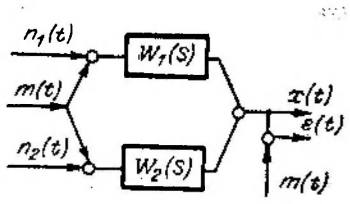
$$\left.\begin{aligned} W_1(s)\,S_{11}(s) + W_2(s)\,S_{21}(s) - R_1(s) = \Gamma_1(s); \\ W_1(s)\,S_{12}(s) + W_2(s)\,S_{22}(s) - R_2(s) = \Gamma_2(s). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если $S_x(s) = S_{12}(s)/S_{11}(s) = P_x(s)/Q_x(s) = P_x(s)/Q_x(s)_+Q_x(s)_-$, где $P_x(s)$ и $Q_x(s)$ — полиномы, то, вычитая из второго уравнения первое, домноженное на $S_x(s)$, получаем одномерное уравнение относительно искомой $W_2(s)$. Для того чтобы правая часть этого уравнения не имела левых полюсов, домножаем его на $Q_x(s)_+$. В итоге имеем

$$\begin{gathered} W_2(s)\left(S_{22}(s) - S_{21}(s)S_x(s)\right)Q_x(s)_+ - \left(R_2(s) - R_1(s)S_x(s)\right)Q_x(s)_+ = \\ = \left(\mathbf{\Gamma}_2(s) - \mathbf{\Gamma}_1(s)S_x(s)\right)Q_x(s)_+; \end{gathered} \tag{5}$$

$$W_2(s)\widetilde{S}(s) - \widetilde{R}(s) = \widetilde{\Gamma}(s). \tag{6}$$

К сожалению, это уравнение можно решить только с точностью до полинома числителя, так как $\widehat{\mathbf{\Gamma}}(s)$ является линейной комбинацией $\mathbf{\Gamma}_1(s)$ и $\mathbf{\Gamma}_2(s)$. Однако из того, что $\widetilde{\Gamma}(s)$ имеет полюсы только справа, не следует, что полюсы $\Gamma_1(s)$ и $\Gamma_2(s)$ лежат тоже справа, а именно это необходимо для справедливости системы (4).



Знаменатель $W_2(s)$ находим, преобразуя (6) к виду

$$W_2(s) = [\widetilde{\Gamma}(s) + \widetilde{R}(s)]\widetilde{S}(s)^{-1}. \tag{7}$$

Здесь отражены все левые полюсы правой части (7), приведенной к общему знаменателю, так как $\widetilde{\Gamma}(s)$, имеющее полюсы только в правой полуплоскости комплексного переменного, имеет такие параметры и соотношения между степенями полиномов числителя и знаменателя, что полюсы $W_2(s)$ находятся только слева, а степень числителя меньше степени знаменателя.

Итак, в результате сведения (1) к диагональному виду будут найдены знаменатели всех искомых функций и на втором этапе решения определены коэффициенты полиномов его числителей. С учетом ограничений (2) или (3) его элементы имеют вид

$$W_i(s) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n_1} a_{ij} s^{j-1}}{\prod\limits_{j=1}^{m_i} (s + \alpha_{ij})}; \quad \begin{matrix} n_i < m_i \text{ или} \\ n_i < m_i + 1, \end{matrix} \tag{8}$$

где α_{ij} — найденные полюсы; a_{ij} — неизвестные коэффициенты. Значения их таковы, что при подстановке (8) в (1) все элементы вектора-строки $\Gamma(s)$ должны иметь полюсы только в правой полуплоскости. Из этого следует, что если строки (1) привести к общему знаменателю, то все левые полюсы в них должны компенсироваться соответствующими корнями числителей. Приравнивая параметр s в числителях значениям левых полюсов, легко получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Описанный метод поясним на конкретном примере, приведенном в [1].

П р и м е р. Возьмем систему с двумя входами и одним выходом. Предполагается, что сигналы на оба входа поступают одинаковые, но искажаются разными белыми шумами (см. рисунок). Пусть

$$S_{mm}(s) = \frac{1}{1 - s^2}; \; S_{n_1 n_1}(s) = \frac{1}{2}; \; S_{n_2 n_2}(s) = \frac{1}{4}. \tag{П1}$$

Функция фильтра состоит в том, чтобы выделить сигнал $m(t)$ из двух каналов. Применительно к этой задаче уравнения будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} W_1(s)\frac{s^2 - 3}{2(s^2 - 1)} - W_2(s)\frac{1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2 - 1} &= \Gamma_1(s); \\ -W_1(s)\frac{1}{s^2 - 1} + W_2(s)\frac{s^2 - 5}{4(s^2 - 1)} + \frac{1}{s^2 - 1} &= \Gamma_2(s). \end{aligned}\right\} \tag{П2}$$

Преобразуем систему к диагональному виду

$$\left.\begin{aligned} W_1(s)\frac{s^2 - 7}{8} + \frac{1}{4} &= \widetilde{\Gamma}_1; \\ W_2(s)\frac{s^2 - 7}{4(s - \sqrt{3})} + \frac{1}{(s - \sqrt{3})} &= \widetilde{\Gamma}_2. \end{aligned}\right\} \tag{П3}$$

Определяем искомые функции:

$$\left.\begin{aligned} W_1(s) &= \left(\widetilde{\Gamma}_1(s) - \frac{1}{4}\right)\frac{8}{(s^2 - 7)}; \\ W_2(s) &= \left(\widetilde{\Gamma}_2(s) - \frac{1}{(s - \sqrt{3})}\right)\frac{4(s - \sqrt{3})}{(s^2 - 7)}, \end{aligned}\right\} \tag{П4}$$

а по ним знаменатели $W_1(s)$ и $W_2(s)$ соответственно $s + \sqrt{7}$, $s + \sqrt{7}$. Отсюда видно, что искомые функции имеют вид

$$W_1(s) = a_{11}/(s + \sqrt{7}); \;\; W_2(s) = a_{21}/(s + \sqrt{7}). \tag{П 5}$$

Подставляем их в исходную систему уравнений и приводим левые части к общему знаменателю:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(s^2-3)\,a_{11}-a_{21}+2\,(s+\sqrt{7})}{2\,(s^2-1)\,(s+\sqrt{7})}=\Gamma_1\,(s); \\ &\frac{-4a_{11}+(s^2-5)\,a_{21}+4\,(s+\sqrt{7})}{4\,(s^2-1)\,(s+\sqrt{7})}=\Gamma_2\,(s). \end{aligned}\right\} \tag{П6}$$

Неизвестные параметры ищем из условия, что $\mathbf{\Gamma}_1(s)$ и $\mathbf{\Gamma}_2(s)$ не имеют полюсов в левой полуплоскости. Тогда из первого уравнения находим

$$(s^2-3)\,a_{11}-a_{21}+2(s+\sqrt{7})=0 \qquad \text{при } s=-1;\ -\sqrt{7}. \tag{П7}$$

Отсюда

$$\begin{cases} a_{11}+a_{21}=\sqrt{7}-1; \\ 2a_{11}-a_{21}=0; \end{cases} \qquad a_{11}=\frac{2}{\sqrt{7}+1};\ \ a_{21}=\frac{4}{\sqrt{7}+1}. \tag{П8}$$

Из второго уравнения получается тот же результат.

Описанный метод решения систем интегральных уравнений Винера — Хопфа программно реализован на ЕС ЭВМ. Модули написаны и отлажены на алгоритмическом языке ПЛ/1 в системе СВМ ЕС и унифицированы для применения в составе программного обеспечения САПР САУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Современная теория систем управления/Под ред. К. Т. Леондеса.— М.: Наука, 1970.
2. **Янушевский Р. Т.** Теория линейных оптимальных многосвязных систем управления.— М.: Наука, 1973.
3. **Солодовников В. В., Бирюков В. Ф.** К вопросу о решении задач синтеза статистически оптимальных систем автоматического управления // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика.— 1973.— № 5.
4. **Зотов М. Г.** Аналитическое конструирование стационарных управляющих устройств.— М.: Энергоатомиздат, 1987.

Поступило в редакцию 16 февраля 1988 г.

УДК 681.335.2 : 681.3.088-52

А. М. АМИНЕВ, Т. Н. АРАСЛАНОВ, Г. Д. БАХТИАРОВ, А. Л. ТИМОФЕЕВ
(Москва — Уфа)

СТЕНД ДЛЯ КОНТРОЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СВЕРХБЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИХ АЦП

В области аналого-цифрового преобразования одной из наиболее острых проблем является контроль динамических свойств сверхбыстродействующих АЦП. До сих пор отсутствует общепринятая методология описания свойств АЦП при преобразовании широкополосных сигналов, существуют различные толкования отдельных терминов, например апертурного времени. Не до конца ясен вопрос о том, в каких же терминах следует описывать динамические свойства АЦП: в терминах динамических погрешностей или в терминах динамических параметров АЦП.

Отсутствие стандартных методов описания, а тем более контроля динамики АЦП сдерживает широкое распространение и реализацию всех возможностей сверхбыстродействующих преобразователей. Информация о динамических свойствах АЦП нужна не только пользователям, но и изготовителям этих приборов, т. е., как отмечается в [1], для решения проблемы увеличения быстродействия и разрядности АЦП необходимо параллельно вести работы по созданию соответствующей контрольно-измерительной аппаратуры для аттестации их параметров на этапе разработки и в условиях серийного производства.

Этим вопросам посвящено большое количество работ [2—8], в которых предлагаются различные методы и устройства для оценки динамических свойств АЦП. Одним из относительно простых, но достаточно эффективных методов контроля является ме-