СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Welker H.** Zur Theorie der galvanomagnetischen Effekte bei gemischten Leitung // Z. Naturforsch.— 1951.— A6, N 2.— S. 184.
2. **Болгов С. С., Малютенко В. К., Пипа В. И.** Люминесценция полупроводников в условиях дефицита носителей тока // ФТП.— 1983.— **17**, вып. 2.
3. **Болгов С. С., Малютенко В. К., Пипа В. И.** Рекомбинационное излучение полупроводников в скрещенных электрическом и магнитном полях при нелинейных механизмах рекомбинации // УФЖ.— 1986.— **31**, № 2.
4. **Иванов-Омский В. И., Коломиец Б. Т., Смирнов В. А.** Спектр элекромагнитолюминесценции в InSb // Письма в ЖЭТФ.— 1966.— **3**, вып. 7.
5. **Малютенко В. К., Яблоновский Е. И., Болгов С. С. и др.** Отрицательная люминесценция в CdHgTe // ФТП.— 1984.— **18**, вып. 2.

Поступило в редакцию 30 марта 1988 г.

УДК 621.317.7

Н. П. КРАСНЕНКО, В. А. ФЕДОРОВ

(Томск)

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХТОЧЕЧНОГО КОРРЕЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ ПРИ КОМПЕНСАЦИИ ШУМОВ

В работе [1] проведено исследование точностных характеристик двухточечного корреляционного метода (ДКМ) измерения частоты узкополосных стационарных случайных процессов. Отмечается большая величина систематической ошибки при недостаточно высоком отношении сигнал/шум (С/Ш). Это объясняется тем, что основой ДКМ является первоначальное оценивание двух отсчетов корреляционной функции (КФ) $B(\tau)$ смеси сигнала и всегда присутствующего на практике шума при $\tau = 0$ и $\tau_1 = 1/4 f_{\text{оп}}$:

$$\widehat{B}(\tau) = \frac{1}{T - |\tau|} \int_0^{T-|\tau|} x(t)\, x(t + |\tau|)\, dt, \tag{1}$$

где $x(t) = s(t) + n_1(t)$ — аддитивная смесь реализаций сигнала $s(t)$ и шума $n_1(t)$ за время наблюдения T; $f_{\text{оп}}$ — некоторая опорная частота, относительно которой происходит измерение частоты $f_{\text{с}}$ сигнала $s(t)$. При некоррелированности $s(t)$ и $n_1(t)$ среднее измеренное значение $M[\widehat{B}(\tau)]$ будет складываться из истинного сигнального значения $B_{\text{с}}(\tau)$ и смещения, определяемого шумовой составляющей $B_{\text{ш}}(\tau)$, т. е. $M[\widehat{B}(\tau)] = B(\tau) = B_{\text{с}}(\tau) + B_{\text{ш}}(\tau)$. Поэтому для уменьшения систематических ошибок измерения частоты необходимо осуществить нейтрализацию шума в оценке КФ (1). Такая возможность на практике часто существует. Например, при акустическом зондировании атмосферы можно измерить шумы до посылки сигнала в атмосферу или после его приема. И если средние статистические характеристики шума достаточно стабильны за полное время измерений, то можно осуществить его компенсацию в двух указанных точках КФ (1), т. е. несмещенная оценка КФ сигнала имеет вид $\widehat{B}_{\text{с}}(\tau) = \widehat{B}(\tau) - \widehat{B}_{\text{ш}}(\tau)$, где

$$\widehat{B}_{\text{ш}}(\tau) = \frac{1}{T_{\text{ш}} - |\tau|} \int_0^{T_{\text{ш}}-|\tau|} n_2(t)\, n_2(t + |\tau|)\, dt$$

— оценка КФ шума по реализации $n_2(t)$ длительностью $T_{\text{ш}}$. Отсюда оценка частоты ДКМ принимает вид

$$\widehat{f}_{\text{с,к}} = \frac{1}{2\pi\tau_1} \arccos \frac{\widehat{B}_{\text{с}}(\tau_1)}{\widehat{B}_{\text{с}}(0)}. \tag{2}$$

Также отметим, что при измерении шумов зачастую нет таких жестких ограничений, которые накладываются на длительность анализа T при реализации оценки (1). Поэтому становится возможным измерять $B_{\text{ш}}(0)$ и $B_{\text{ш}}(\tau_1)$ с достаточно высокой статистической точностью, например, путем формирования оценки выборочного среднего этих значений: $M^*[\widehat{B}_{\text{ш}}(\tau)] = \sum_{i=1}^{L} \widehat{B}_{\text{ш},i}(\tau)/L$, где $\widehat{B}_{\text{ш},i}(\tau)$ — оценка КФ шума по его i-й реализации; L — число реализаций. Тогда, вместо оценки (2), можно использовать аналогичную оценку $\widetilde{f}_{\text{с,к}}$ с заменой в (2) $\widehat{B}_{\text{с}}(\tau)$ на $\widetilde{B}_{\text{с}}(\tau) = \widehat{B}(\tau) - M^*[\widehat{B}_{\text{ш}}(\tau)]$.

При нахождении статистических характеристик оценок (2) и $\tilde{f}_{с,к}$ предполагаем, что реализации шума $n_i(t)$ не коррелированы между собой и по отношению к сигналу $s(t)$ и принадлежат одному статистическому ансамблю с КФ: $B_{ш}(\tau) = \sigma^2_{ш}\rho_{ш}(\tau)\cos 2\pi f_{оп}\tau$. Аналогично КФ сигнала имеет вид $B_с(\tau) = \sigma^2_с\rho_с(\tau)\cos 2\pi f_с\tau$. Для определенности полагаем $T = T_{ш}$. Тогда, применяя к (2) и $\tilde{f}_{с,к}$ метод линеаризации [2], учитывая несмещенность оценок $\widehat{B}_с(\tau)$, $\widetilde{B}_с(\tau)$ и результаты работы [1], получаем, что систематические ошибки измерения частоты $\delta_f = M[f_с] - f_с$ незначительны:

$$\delta_f/\Delta f_{эс} = \pi^2\gamma/32\kappa^2 = -\pi^2 f_д \Delta f_{эс}/8f^2_с, \qquad (3)$$

где $\kappa = f_с/2\Delta f_{эс}$ — коэффициент узкополосности исследуемого сигнала, причем в качестве эффективной ширины спектра $2\Delta f_{эс}$ принято ее определение через удвоенную среднеквадратичную ширину: $\Delta f_{эс} = \sqrt{\varkappa_2[G_с(f)]}$, где $\varkappa_2[G_с(f)] = \int\limits_0^\infty (f-f_с)^2 \times G_с(f)\,df \Big/ \int\limits_0^\infty G_с(f)\,df$ — второй нормированный центральный момент спектральной плотности сигнала $G_с(f)$; $\gamma = (f_{оп} - f_с)/\Delta f_{эс} = -f_д/\Delta f_{эс}$ — относительная расстройка измеряемой частоты $f_с$ относительно опорной.

Рассмотрим случайные ошибки измерений, определяемые корнями квадратными из дисперсий оценок $D[\widehat{f}_{с,к}]$ и $D[\tilde{f}_{с,к}]$. Применяя метод линеаризации, пренебрегая незначительными флуктуациями оценки выборочного среднего $M^*[\widehat{B}_{ш}(\tau)]$ по сравнению с флуктуациями выборочных значений $\widehat{B}(\tau)$, учитывая результаты [2] для ковариационной функции оценок КФ типа (1), производя замену переменных $z = 2\Delta f_{эс}\tau$ и отбрасывая несущественные члены при разложении в ряд промежуточных результатов по параметру γ, получаем

$$D[\tilde{f}_{с,к}]/\Delta f^2_{эс} = I[\widehat{B}(\lambda)]/\pi^2\lambda^2 q^2 + O(\gamma^2); \qquad (4)$$

$$D[\widehat{f}_{с,к}]/\Delta f^2_{эс} = D[\tilde{f}_{с,к}]/\Delta f^2_{эс} + I[\widehat{B}_{ш}(\lambda)]/\pi^2\lambda^2 q^2 + O(\gamma^2), \qquad (5)$$

где $I[\widehat{B}(\lambda)] = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} R(z)\left[B^2_н(z) + B_н(z+\lambda)\,B_н(z-\lambda)\right]dz$;

$$B_н(z) = B_{с,н}(z) + B_{ш,н}(z) = [q\rho_с(z) + \rho_{ш}(z)]\cos 2\pi\kappa z$$

— нормированная на мощность шума КФ смеси сигнала и шума при $\gamma = 0$; $q = \sigma^2_с/\sigma^2_{ш}$ — отношение С/Ш; $R(z) = (1 - |z|/\alpha)/\alpha$, $\alpha = b_1 - \lambda$, $\lambda = 2\Delta f_{эс}\tau_1$, $b_1 = 2\Delta f_{эс}T$ — отношение длительности анализа T к радиусу корреляции сигнала, определяемому нами как $1/2\Delta f_{эс}$. Выражение для $I[\widehat{B}_{ш}(\lambda)]$ аналогично выражению для $I[\widehat{B}(\lambda)]$ при замене $B_н(\cdot)$ на $B_{ш,н}(\cdot)$.

Из сравнения (4) с аналогичным выражением (10) работы [1] следует, что дисперсия оценки ДКМ при использовании компенсации выборочным средним КФ шума $D[\tilde{f}_{с,к}]$ увеличивается по сравнению с дисперсией оценки ДКМ без компенсации шума $D[f_с]$ в $[(q+1)/q]^2$ раз. Соотношение (5) показывает, что при использовании отдельных компенсирующих выборочных значений КФ шума это увеличение дисперсии еще более существенно. Указанное является платой за снижение систематических ошибок, однако такое перераспределение ошибок зачастую выгодно на практике.

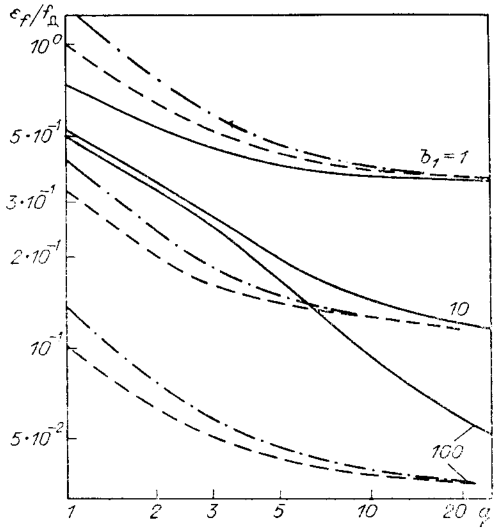
Рассмотрим случай $b_1 \gg 1$, т. е. когда длительность реализации T много больше радиуса корреляции исследуемого сигнала. При этом в выражениях для $I[\widehat{B}(\lambda)]$, $I[\widehat{B}_{ш}(\lambda)]$ можно расширить пределы интегрирования от $-\infty$ до ∞ и положить $R(z) \simeq 1/b_1$. Полагая для определенности, что сигнал имеет гауссову спектральную плотность $\rho_с(\tau) = \exp\left(-2\pi^2\Delta f^2_{эс}\tau^2\right)$, а шум белый с равномерной спектральной плотностью N_0 в полосе пропускания приемной системы Δf, получаем

$$\frac{D[\tilde{f}_{с,к}]}{\Delta f^2_{эс}} = \frac{D[\widehat{f}_с]}{\Delta f^2_{эс}}\left(\frac{q+1}{q}\right)^2 = \frac{1}{b_1 q^2}\left(\frac{q^2}{2\sqrt{\pi}} + \frac{2q}{s} + \frac{s}{3}\right);$$

$$\frac{D[\widehat{f}_{с,к}]}{\Delta f^2_{эс}} = \frac{D[\tilde{f}_{с,к}]}{\Delta f^2_{эс}} + \frac{s}{3q^2 b_1} = \frac{1}{b_1 q^2}\left(\frac{q^2}{2\sqrt{\pi}} + \frac{2q}{s} + \frac{2s}{3}\right),$$

где $s = \Delta f/2\Delta f_{эс}$ — параметр, характеризующий степень охвата спектра сигнала полосой Δf.

Из последних соотношений следует, что наиболее существенное влияние на дисперсии рассматриваемых оценок оказывает величина временно́го интервала T. При этом дисперсии обратно пропорциональны T, что дает принципиальную возможность при достаточно большом T сделать незначительными случайные ошибки. Необ-



Относительные среднеквадратичные ошибки ДКМ измерения частоты при $к = 20$, $s = 5$ и $\gamma = 1{,}5$: штриховые линии соответствуют оценке $\tilde{f}_{с,к}$, штрихпунктирные — оценке (2), сплошные — оценке ДКМ без компенсации шума работы [1]

ходимая для этого длительность реализации определяется в основном отношением С/Ш, причем при малых С/Ш она может быть и чрезмерно большой, особенно при использовании оценки (2). При больших С/Ш дисперсии оценок (2) и $\tilde{f}_{с,к}$ стремятся к $D[\hat{f}_с]$ [1].

Проведем сравнение оценок (2), $\tilde{f}_{с,к}$ и обычной оценки ДКМ $\hat{f}_с$ без компенсации шумов [1] на основе анализа их среднеквадратичных ошибок измерений соответственно $\varepsilon[\hat{f}_{с,к}]$, $\varepsilon[\tilde{f}_{с,к}]$ и $\varepsilon[\hat{f}_с]$, где $\varepsilon[\cdot] = \left(\delta_f^2 + D[\cdot]\right)^{1/2}$. При этом следует заметить, что для обеих оценок ДКМ с компенсацией шума их среднеквадратичные ошибки практически полностью определяются случайными ошибками.

В качестве примера на рисунке приведены относительные среднеквадратичные ошибки измерения частоты в зависимости от отношения С/Ш при трех различных значениях параметра b_1. Характерным для всех кривых является то, что они уменьшаются с ростом q до величины $\varepsilon_{f,\min}/f_д \simeq \lim\limits_{q\to\infty} \sqrt{D[\hat{f}_с]}\Big/f_д = 1/\gamma\sqrt{b_1 2\sqrt{\pi}} \simeq$ $\simeq 0{,}376\sqrt{\Delta f_{эс}/T}/f_д$. При малых длительностях реализации T (на рисунке случай $b_1 = 1$) величина случайной ошибки достаточно велика. Так, при $b_1 = 1$ даже минимальные ошибки составляют примерно 35 %. С уменьшением отношения С/Ш случайные ошибки еще более возрастают, особенно при применении компенсационных оценок. Это является причиной того, что при малых T они не имеют никаких преимуществ по сравнению с обычной оценкой ДКМ $\hat{f}_с$. Наоборот, их точностные характеристики хуже, чем таковые для оценки $\hat{f}_с$, и эта разница увеличивается с уменьшением q. В данной ситуации для повышения достоверности измерений при применении компенсационных оценок необходимо проводить усреднение первичных результатов. Аналогичный положительный эффект достигается и при увеличении T, вернее, при увеличении длительности анализа T по отношению к радиусу корреляции исследуемого сигнала. Так, при $b_1 = 10$ случайные ошибки менее значительны. Их увеличение для компенсационных оценок (2) и $\tilde{f}_{с,к}$ при уменьшении q менее существенно по сравнению с соответствующим ростом систематических ошибок оценки $\hat{f}_с$ [1]. Поэтому среднеквадратичные ошибки для компенсационных оценок даже без соответствующего усреднения меньше аналогичных ошибок оценки ДКМ без компенсации шума. С дальнейшим увеличением b_1 этот выигрыш еще более значителен. Например, при $b_1 = 100$ $\varepsilon[\hat{f}_с]/f_д < 10$ % лишь для $q \geqslant 10$. Использование компенсации влияния шума на исходную оценку КФ исследуемого сигнала по одной шумовой реализации (2) дает ошибку меньше 10 % уже при $q \geqslant 1{,}5$, а применение выборочного среднего КФ шума — при $q > 1$. Так как систематические ошибки оценки $\hat{f}_с$ [1] практически не уменьшаются с ростом T, то даже при таких очень больших длительностях реализации и малых q среднеквадратичная ошибка $\varepsilon[\hat{f}_с]/f_д$ является большой и не позволяет проводить надежные измерения частоты.

Таким образом, предложенные оценки ДКМ с компенсацией шума дают принципиальную возможность корректных измерений частоты узкополосных сигналов для достаточно низких отношений С/Ш при наличии необходимой длины исследуемой реализации или при возможности усреднения первичных результатов измерения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красненко Н. П., Федоров В. А.** Исследование точностных характеристик двухточечного корреляционного метода измерения частоты узкополосных случайных сигналов // Автометрия.— 1987.— № 4.
2. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения.— М.: Мир, 1971.— Т. 1.

Поступило в редакцию 4 января 1987 г.