Поступило в редакцию 27октября 1987 г.

УДК 681.518.2 : 621.391

Н. С. ДЕМИН, Л. И. ЛУЗИНА
(Томск)

ТОЧНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ И ВОЗМОЖНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ ОТКАЗОВ В СИСТЕМАХ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ РЕЗЕРВИРОВАНИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

В работе [1] была решена задача синтеза оптимального в классе линейных несмещенного фильтра калмановского типа для систем с аномальными помехами в канале измерения. В [1, 2] для одного частного случая, а в [3] для общего случая линейного оператора измерений доказана оптимальность процедуры исключения аномальных измерений при сделанных предположениях относительно аномальных помех. Кроме того, в [3] получен результат, касающийся точности оценивания для различных структур воздействия аномальных помех на компоненты вектора измерений.

На практике широко распространены системы с резервированием измерительных комплексов (например, в навигационных системах подвижных объектов [4]), когда зарезервированные датчики работают одновременно и их показания используются для построения оценки вектора состояния системы. При исследовании подобных систем возникают задачи, связанные с влиянием глубины резервирования на точность оценивания и на возможность обнаружения отказов датчиков. В данной работе исследуются эти вопросы.

Дискретная во времени система описывается уравнением

$$x(k+1) = \Phi(k)x(k) + G(k)\omega(k) \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1}$$

где $x(k)$ — n-мерный вектор состояния системы; $\omega(k)$ — q-мерный гауссов вектор возмущений с $M\{\omega(k)\} = 0$ и $M\{\omega(k)\omega^{\tau}(l)\} = Q(k)\delta_{kl}$ ($M\{\cdot\}$ — математическое ожидание; δ_{kl} — символ Кронекера; τ — транспонирование), а $\Phi(k)$ и $G(k)$ — матрицы размеров соответственно $(n \times n)$ и $(n \times q)$. Совокупность первичных информационных датчиков образует канал измерения, который при нормальном функционировании имеет вид

$$z^0(k) = H_0(k)x(k) + v(k), \tag{2}$$

а при аномальном —

$$z(k) = H_0(k)x(k) + v(k) + Cf(k), \tag{3}$$

где $z^0(k)$ и $z(k)$ — m-мерные векторы измерений; $v(k)$ — m-мерные гауссовы векторы нормальных помех с $M\{v(k)\} = 0$ и $M\{v(k)v^{\tau}(l)\} = R_0(k)\delta_{kl}$; $f(k)$ — r-мерный вектор аномальных помех с $M\{f(k)\} = \bar{f}(k)$, $M\{[f(k) - \bar{f}(k)][f(l) - \bar{f}(l)]^{\tau}\} = \Gamma(k)\delta_{kl}$; C — матрица структуры воздействия аномальных помех размера $(m \times r)$, которая строится аналогично [3], а $H_0(k)$ — матрица измерений размера $(m \times n)$. Предполагается: 1) $x(0)$ — гауссов вектор с параметрами $\bar{x}_0$, P_0; 2) $x(0)$, $\omega(k)$, $v(k)$, $f(k)$ независимы в совокупности; 3) $P_0 > 0$, $Q(k) \geqslant 0$, $R_0(k) > 0$ (в смысле положительной определенности матриц).

Пусть i — глубина резервирования, т. е. каждый информационный датчик повторяется i раз. Тогда канал измерения в нормальном и аномальном режимах функционирования принимает вид

$$z^0_{[i]}(k) = H_{0[i]}(k)x(k) + v_{[i]}(k); \tag{4}$$

$$z_{[i]}(k) = H_{0[i]}(k)x(k) + v_{[i]}(k) + C_{[i]}(k)f(k), \tag{5}$$

где $z^0_{[i]}(k)$, $z_{[i]}(k)$, $v_{[i]}(k)$ — векторы размера im; $f(k)$ — вектор размера r' $(1 \leqslant r' \leqslant im)$; $H_{0[i]}(k)$, $C_{[i]}$, $R_{0[i]}(k)$, $\Gamma_{[i]}(k)$ — матрицы размеров $(im \times n)$, $(im \times r')$, $(im \times im)$, $(r' \times r')$, причем

$$\left.\begin{aligned} R_{0[i]}(k) &= \operatorname{diag}[R_1(k), R_2(k), \ldots, R_i(k)]; \\ H_{0[i]}(k) &= [H_0^{\tau}(k) \,\vdots\, H_0^{\tau}(k) \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, H_0^{\tau}(k)]^{\tau}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$R_j(k) > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant i)$. Если добавляется $(i+1)$-й резервный блок без аномальных помех, то

$$C_{[i+1]} = [C_{[i]}^{\mathrm{T}} \vdots 0_{(r' \times m)}]^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

Очевидно, что для систем с резервированием справедливы результаты [1—3], только всюду должны быть поставлены индексы глубины резервирования $[i]$. Аналогично (34) из [3] введем функционал

$$J^{[i]}(k) = \mathrm{tr}\,[DP_{[i]}(k)], \tag{8}$$

являющийся критерием качества системы фильтрации и характеризующий точность оценивания, соответствующую глубине резервирования i, где $P_{[i]}(k)$ — матрица ковариации оценки $\bar{x}_{[i]}(k)$ при глубине резервирования измерительного комплекса, равной i.

Теорема 1. Точность оценивания при условии (7) удовлетворяет соотношению

$$J^{[i]}(k) \geqslant J^{[i+1]}(k). \tag{9}$$

Остановимся на основных моментах доказательства, предполагая, что до момента времени $(k-1)$ включительно работает система без резервирования. В этом случае $P_{[i]}(k|k-1) = P(k|k-1)$. По построению

$$H_{0[i+1]}(k) = [H_{0[i]}^{\mathrm{T}}(k) \vdots H_0^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}; \quad R_{0[i+1]}(k) = \mathrm{diag}\,[R_{0[i]}(k) \,\vdots\, R_{i+1}(k)]; \tag{10}$$

$$E_{[i+1]} = \mathrm{diag}\,[E_{[i]} \,\vdots\, I_m],$$

где I_m — единичная матрица размера $(m \times m)$; $E_{[i]}$ — матрица размера $(im - r') \times \times im$, построенная аналогично тому, как это сделано в [3]. Используя (25)—(28) из [3] и формулу (10), можно получить

$$\Delta P_{[i]}(k) = P_{[i]}(k) - P_{[i+1]}(k) = P(k|k-1)WP(k|k-1), \tag{11}$$

здесь
$$W = A^{\mathrm{T}}\Psi^{-1}A; \quad \Psi = R_{i+1} + H_0(k)\,P_{[i]}(k)\,H_0^{\mathrm{T}}(k); \tag{12}$$

A — некоторая матрица, конкретный вид которой для дальнейшего не существен. При получении (11) используется формула Фробениуса [5]. Из (12) следует, что $W \geqslant 0$ [6, 7]. Тогда согласно (11) $\Delta P_{[i]}(k) \geqslant 0$. Так как $D \geqslant 0$, то собственные значения λ_j $(j = \overline{1, n})$ матрицы $D\Delta P_{[i]}(k)$ вещественны и неотрицательны [6, 7]. Поэтому $\mathrm{tr}\,[D\Delta P_{[i]}(k)] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geqslant 0$, что доказывает, согласно (8), (11), соотношение (9) для момента времени k. Для доказательства теоремы, согласно методу математической индукции, достаточно показать справедливость (9) для следующего момента времени $(k+1)$, т. е. установить свойство

$$\Delta P_{[i]}(k+1) = P_{[i]}(k+1) - P_{[i+1]}(k+1) \geqslant 0. \tag{13}$$

Из доказанного свойства $P_{[i]}(k) \geqslant P_{[i+1]}(k)$ и из (28) ([3]) следует, что $P_{[i]}(k+1|k) \geqslant P_{[i+1]}(k+1|k)$, т. е. $P_{[i]}(k+1|k)$ можно представить в виде ([7, 8])

$$P_{[i]}(k+1|k) = P_{[i+1]}(k+1|k) + \tilde{P}, \tag{14}$$

где $\tilde{P} \geqslant 0$. Введем матричную функцию скалярного переменного $\alpha \geqslant 0$:

$$M(\alpha) = P_{[i+1]}(k+1|k) + \alpha\tilde{P}. \tag{15}$$

Тогда, рассматривая $P_{[i]}(k+1)$ как функцию α, т. е. $P_{[i]}(k+1) = P_{[i]}(k+1, \alpha)$, с использованием (14), (15) в (29) из [3] получаем

$$P_{[i]}(\alpha) = M(\alpha) - M(\alpha)\,H_{0[i]}^{\mathrm{T}}E_{[i]}^{\mathrm{T}}\,[\tilde{S}_{[i]} + \alpha E_{[i]}H_{0[i]}\tilde{P}H_{0[i]}^{\mathrm{T}}E_{[i]}^{\mathrm{T}}]^{-1}\,E_{[i]}H_{0[i]}M(\alpha), \tag{16}$$

где $\tilde{S}_{[i]}$ — матрица, не зависящая от α и $\tilde{P}$. Отсюда $\partial P_{[i]}(\alpha)/\partial\alpha = B\tilde{P}B^{\mathrm{T}}$, где конкретный вид матрицы B вычисляется из (16). Из последнего следует, что $\partial P_{[i]}(k+1, \alpha)/\partial\alpha \geqslant 0$ [6, 7], т. е. $P_{[i]}(k+1, \alpha)$ — монотонно неубывающая (в смысле определенности) по α матричная функция. Тогда

$$P_{[i]}(k+1, \alpha)\,|_{\alpha=1} \geqslant P_{[i]}(k+1, \alpha)\,|_{\alpha=0}. \tag{17}$$

Так как, согласно (14)—(16) и (29) из [3], $P_{[i]}(k+1) = P_{[i]}(k+1, \alpha)\,|_{\alpha=1}$, то из (17) следует, что если докажем свойство

$$P_{[i]}(k+1, \alpha)\,|_{\alpha=0} - P_{[i+1]}(k+1) \geqslant 0, \tag{18}$$

то тем самым будет доказано свойство (13). Используя (16) и (26)—(29) из [3], можно получить

$$P_{[i]}(k+1, \alpha)\,|_{\alpha=0} - P_{[i+1]}(k+1) = P_{[i+1]}(k+1|k)\tilde{W}P_{[i+1]}(k+1|k). \tag{19}$$

Здесь матрица $\tilde{W}$ имеет структуру, аналогичную структуре матрицы W из (12), т. е. $\tilde{W} = \tilde{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\Psi}\tilde{A}$, где $\tilde{\Psi} > 0$, и, таким образом, $\tilde{W} \geqslant 0$. Тем самым из (19) следует свойство (18), а значит, и справедливость исходного утверждения (9) для момента времени $(k+1)$.

Результат, сформулированный в теореме 1, свидетельствует о том, что точность оценивания при наличии резервного блока без отказов, по крайней мере, не уменьшается по сравнению со случаем отсутствия такого блока. Численные расчеты, проведенные для конкретных задач, показывают, что, как правило, происходит улучшение точности оценивания, причем величина $\Delta J^{[i]}(k)=J^{[i]}(k)-J^{[i+1]}(k)$ бывает весьма значительной.

Конкретизируем аномальный режим, связывая его с отказами датчиков, причем такого типа, когда отказ приводит к появлению аномальной помехи. В этом случае матрица $C_{[i]}$ является матрицей структуры отказов. Возникает вопрос об обнаруживаемости отказов, когда $C_{[i]}$ и $C_{[i+1]}$ связаны формулой (7), другими словами, каким образом наличие резервного блока при отсутствии отказов в нем влияет на обнаруживаемость отказов в других блоках. Задача рассматривается при следующих ограничениях: 1) $f(k)$ — гауссова величина, причем $\bar{f}(k)=0$; 2) до момента времени $(k-1)$ включительно система работала в нормальном режиме, а в момент времени k произошел отказ с заданной матрицей структуры $C_{[i]}$; 3) распознавание отказа проводится по текущему наблюдению $z(k)$.

Данная задача, рассматриваемая как статистическая [8, 9], по существу, является задачей распознавания двух гипотез: $\mathscr{H}^0_{[i]}$ — гипотеза отсутствия отказов, $\mathscr{H}^1_{[i]}$ — гипотеза наличия отказов. Обнаруживаемость отказов зависит от «расстояния» между гипотезами. Известны три меры, характеризующие «расстояние» между гипотезами: 1) расстояние Махаланобиса; 2) расстояние Бхаттачарья; 3) дивиргенция ([8, 9]). В данной работе в качестве расстояния между $\mathscr{H}^0_{[i]}$ и $\mathscr{H}^1_{[i]}$ выбрана дивиргенция $I_{[i]}$ (1, 0). По определению ([8])

$$I_{[i]}(1,\ 0)=I_{[i]}(1:0)+I_{[i]}(0:1), \tag{20}$$

где $I_{[i]}(1{:}0)=M\left\{l_{[i]}(1{:}0)\mid\mathscr{H}^1_{[i]}\right\},\quad I\,(0{:}1)=-M\left\{l_{[i]}(1{:}0)\mid\mathscr{H}^0_{[i]}\right\}$,

а $l_{[i]}(1:0)$ есть логарифм отношения правдоподобия в задаче различения гипотез $\mathscr{H}^1_{[i]}$ и $\mathscr{H}^0_{[i]}$. При сделанных предположениях в момент времени k процесс $\tilde{z}_{[i]}(k)=$ $=z_{[i]}(k)-H_{0[i]}(k)\Phi(k-1)\hat{x}_{[i]}(k-1)$ является гауссовым с параметрами $\{0;\ S_{[i]}(k)\}$ при гипотезе $\mathscr{H}^0_{[i]}$ и с параметрами $\{0;\ S_{1[i]}(k)\}$ при гипотезе $\mathscr{H}^1_{[i]}$, где, согласно (12), (13) из [3], $S_{[i]}(k)=H_{0[i]}(k)\,P_{[i]}(k\mid k-1)\,H^{\mathrm{T}}_{0[i]}(k)+R_{0[i]}(k)$, $S_{1[i]}(k)=S_{[i]}(k)+C_{[i]}\Gamma_{[i]}(k)\,C^{\mathrm{T}}_{[i]}$. Тогда, проведя вычисления в соответствии с (20), получаем

$$I_{[i]}(1,\ 0)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[S^{-1}_{[i]}(k)\,S_{1[i]}(k)+S^{-1}_{1[i]}(k)\,S_{[i]}(k)\right]-im. \tag{21}$$

Пусть теперь глубина резервирования равна $(i+1)$, причем в $(i+1)$-м резервном блоке нет отказов, т. е. матрица структуры отказов имеет вид (7).

Возникает вопрос о том, в каком соотношении находятся $I_{[i]}(1,\ 0)$ и $I_{[i+1]}(1,\ 0)$, т. е. как на обнаруживаемость отказов влияет наличие резервного блока без отказов. Чтобы провести сравнение $I_{[i]}(1,\ 0)$ и $I_{[i+1]}(1,\ 0)$ непосредственно в момент отказа k, предполагается, что $(i+1)$-й резервный блок включается в работу только в момент времени k. В этом случае $P_{[i]}(j\mid j-1)=P_{[i+1]}(j\mid j-1)$ для $j\leqslant k$.

Теорема 2. Для $I_{[i]}(1,\ 0)$ и $I_{[i+1]}(1,\ 0)$ имеет место неравенство

$$I_{[i+1]}(1,\ 0)\geqslant I_{[i]}(1,\ 0), \tag{22}$$

причем $\Delta I_{[i]}(1,\ 0)=I_{[i+1]}(1,\ 0)-I_{[i]}(1,\ 0)$ определяется формулой

$$\Delta I_{[i]}(1,\ 0)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{im}\left[\lambda_j(D)-\lambda_j(B)\right]\frac{\lambda_j(D)+\lambda_j(B)+\lambda_j(D)\,\lambda_j(B)}{\lambda_j(D)+\lambda_j(B)+\lambda_j(D)\,\lambda_j(B)+1}. \tag{23}$$

В (23) $\{\lambda_j(D)\}$, $\{\lambda_j(B)\}$, $1\leqslant j\leqslant im$ есть спектры матриц

$$B=C_{[i]}\Gamma_{[i]}(k)\,C^{\mathrm{T}}_{[i]}S^{-1}_{[i]}(k),\qquad D=C_{[i]}\Gamma_{[i]}(k)\,C^{\mathrm{T}}_{[i]}A_{11}(k),$$

где $A_{11}(k)=S^{-1}_{[i]}(k)+S^{-1}_{[i]}(k)\,H_{0[i]}(k)\,P_{[i]}(k\mid k-1)\,H^{\mathrm{T}}_0(k)\,A^{-1}_{22}(k)\,H_0(k)\times$

$$\times P[i]\,(k\mid k-1)\,H^{\mathrm{T}}_{0[i]}(k)\,S^{-1}_{[i]}(k);$$

$$A_{22}(k)=H_0(k)\,P_{[i]}(k)\,H^{\mathrm{T}}_0(k)+R_{i+1}(k).$$

Основные моменты доказательства сформулированного утверждения заключаются в следующем. Использование выражения для $S_{1[i]}(k)$ в [21] дает

$$I_{[i]}(1,\ 0)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[(I_{im}+B)+(I_{im}+B)^{-1}\right]-im. \tag{24}$$

Записывая (24) для $I_{[i+1]}(1, 0)$, а затем, используя (10) с последующим применением формулы Фробениуса, получаем

$$I_{[i+1]}(1, 0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left[(I_{im} + D) + (I_{im} + D)^{-1}\right] - im. \tag{25}$$

Из выражения для следа матрицы через ее спектр ([6, 7]) и формул (24), (25) получаем (23). При этом существенно свойство $D \geqslant B \geqslant 0$, которое приводит к (22), так как из него следует ([6, 7]), что $\lambda_j(D) \geqslant \lambda_j(B) \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant im$.

Следствие. Для $I_{[i]}(1, 0)$ имеет место эквивалентная (21), (24) формула

$$I_{[i]}(1, 0) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{im} \frac{1 + [1 + \lambda_j(B)]^2}{1 + \lambda_j(B)} - im,$$

которая непосредственно вытекает из (24).

В конкретных системах, как правило, имеются измерительные элементы, отказы которых легко обнаруживаемы, и элементы с плохо обнаруживаемыми отказами. С использованием $I_{[i]}(1, 0)$ можно все датчики разбить на две группы: с большими значениями $I_{[i]}(1, 0)$, указывающими на хорошую различимость отказов датчиков данной группы, и с малыми значениями $I_{[i]}(1, 0)$, указывающими на плохую различимость отказов. Для датчиков второй группы следует использовать высокочувствительные, хотя и достаточно сложные, оптимальные алгоритмы обнаружения [9], а для датчиков первой группы можно применять менее чувствительные простые эвристические алгоритмы [10].

Из результатов теоремы 2 следует, что имеет смысл иметь один резервный блок с элементами бо́льшей надежности (хотя бы за счет увеличения его стоимости), что увеличит достоверность обнаружения отказов в остальных резервных блоках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Демин Н. С., Жадан Л. И.** Синтез и анализ алгоритма фильтрации для дискретных сигналов с аномальными помехами // Радиотехника и электроника.— 1984.— 29, № 2.
2. **Демин Н. С., Жадан Л. И.** Об оптимальности процедуры исключения аномальных измерений // Автометрия.— 1983.— № 4.
3. **Жадан Л. И.** К процедуре исключения аномальных измерений // Автометрия.— 1985.— № 2.
4. **Браславский Д. А.** Приборы и датчики летательных аппаратов.— М.: Машиностроение, 1970.
5. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.— М.: Наука, 1966.
6. **Ланкастер П.** Теория матриц.— М.: Наука, 1982.
7. **Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.** Матрицы и вычисления.— М.: Наука, 1984.
8. **Кульбак С.** Теория информации и статистика.— М.: Наука, 1967.
9. **Фукунага К.** Введение в статистическую теорию распознавания образов.— М.: Наука, 1979.
10. **Демин Н. С., Жадан Л. И.** Некоторые адаптивные варианты фильтра Калмана — Бьюси для дискретных систем // Адаптация и обучение в системах управления и принятия решений.— Новосибирск: Наука, 1982.

Поступило в редакцию 25 мая 1987 г.

УДК 621.382.2

С. С. БОЛГОВ, Й. Й. ГОЛОВАЧ, В. Н. КАБАЦИЙ,
В. К. МАЛЮТЕНКО, З. Й. ПЕРЧИ, Е. И. ЯБЛОНОВСКИЙ

(Киев)

ИК-ИЗЛУЧАТЕЛИ С БЕЗБАРЬЕРНЫМ МЕХАНИЗМОМ ИНЖЕКЦИИ

Введение. Полупроводниковые инжекционные светодиоды в настоящее время являются основным элементом оптических и оптоэлектронных устройств обработки информации. Широкое практическое использование светодиодов обусловлено как низкой стоимостью и простотой изготовления, так и хорошими эксплуатационными характеристиками (высокая надежность, значительные мощности излучения, высокое быстродействие и т. д.). Однако область их применения — это видимый и ближний ИК-диапазоны ($\lambda \leqslant 2{,}5$ мкм). Такое ограничение является принципиальным и объясняется следующим обстоятельством. В качестве материала для изготовления светодиодов более длинноволнового излучения необходимо использовать узкозонные полупроводники, в которых барьерный механизм инжекции носителей заряда (в том