13. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и ее приложения в связи и в управлении.— М.: Связь, 1976.
14. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1974.
15. **Kulp R. W.** An optimum sampling procedure for the use with Prony's method // IEEE Trans. on Electromagnet. Compatibility.— 1981.— EMC-23, N 2.

Поступила в редакцию 7 января 1987 г.

УДК 681.3

П. И. БАЛАБАНОВ, В. Д. ФИЛЕВ

(София, Болгария)

ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В ряде случаев возникает необходимость измерения амплитуды $A_u(f_x)$ сложного переменного сигнала $u(t)$, соответствующей конкретной частоте f_x. Для решения таких задач, являющихся по существу, частотно-избирательным методом измерения напряжения, можно использовать метод дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

В математическом смысле задача сводится к определению оценки значения функции $|F_u(f)|$ для $f=f_x$, где

$$F_u(f)=\int_0^{\infty} u(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt. \tag{1}$$

При использовании ДПФ математической моделью процедуры частотно-избирательного измерения напряжения может служить выражение

$$A_u(f_k)_{\text{д}}=\left|[N.\ F_g(0)]^{-1}\sum_{i=0}^{N-1} u(i)\, g(i)\, W^{ik}\right|, \tag{2}$$

где $\{g(i)\}_{i=0,\ldots,N-1}$ — временно́й ряд, изображающий использованную функцию окна в дискретном виде; $|F_g(0)|=|F_g(f)|_{f=0}=\mathscr{F}[g(t)]$; $\mathscr{F}$ — оператор преобразования Фурье; N — число членов рядов $\{u(i)\}$ и $\{g(i)\}$, определяющее размерность ДПФ.

Если задано такое k, при котором $f_k=kf_0$, и удовлетворено условие $|f_k-f_x|=\min$, то в этом случае $A_u(f_k)_{\text{д}}$ является оценкой неизвестной амплитуды $A_u(f_x)$.

Можно доказать, что с использованием требуемых программных и технических средств относительная погрешность измерения γ определяется главным образом погрешностью $\gamma_{T_{\text{д}}}$ вследствие ограничений $u(t)$ во времени при помощи функции окна, т. е. справедливо

$$\gamma=\gamma_{T_{\text{д}}}\leqslant|A_u(f_x)\,F_g(0)|^{-1}\left[\left|\int_0^{f_x-\varepsilon} F_u(f)\,F_g(f_k-f)\,df+\int_{f_x+\varepsilon}^{f_{\text{г}}} F_u(f)\,F_g(f_k-f)\,df\right|\right]+[\,|F_g(f_k-f_x)\,F_g(0)^{-1}|-1], \tag{3}$$

где ε — бесконечно малая величина.

Из (3) следует, что погрешность γ может быть представлена двумя составляющими: $\gamma'_{T_{\text{д}}}$, обусловленной наличием других частотных компонент $A_u(f_i)$ с частотами f_i в спектре напряжения $u(t)$, и $\gamma''_{T_{\text{д}}}$ — погрешностью, вызванной паразитной амплитудной модуляцией для $f_k \neq f_x$.

Значение $\gamma'_{T_д}$ убывает с увеличением N, а значение $\gamma''_{T_д}$ зависит не от N, а от типа окна $g(t)$ и может быть представлено выражением

$$\gamma''_{T_д} = [\,|F_g(f_k - f_x)\,F_g(0)^{-1}| - 1]. \tag{4}$$

Максимальное значение $\gamma_{T_д \max}$ получается при условии $|f_k - f_x| = f_0/2$ и для различных функций $g(t)$ изменяется в границах от 9,2 (для минимального четырехчленного окна Блекмана — Харриса) до 36,3 % (для окна Дирихле) [1]. Очевидно, что такие большие значения погрешности $\gamma''_{T_д}$ нежелательны.

Условие $\gamma''_{T_д} = 0$ можно обеспечить выполнением измерительной процедуры для оценки амплитуды $A_u(f_x)$, математическую модель которой представим в виде

$$A_u(f_x)_д = [\,|F_g(f_k - f_x)|\,N^{-1}]\sum_{i=0}^{N-1} u(i)\,g(i)\,W^{ik}, \tag{5}$$

где $f_k = kf_0$; $|f_k - f_x| < f_0/2$.

Из (5) следует, что алгоритм метода частотно-избирательного измерения напряжения включает следующие этапы [2]:

напряжение $u(t)$ дискретизируется во времени и по уровню, при котором получается временной ряд $\{u(i)\}_{i=0\div N-1}$;

каждое значение $u(i)$ домножается на соответствующее значение $g(i)$ временно́го ряда $\{g(t)\}_{i=0\div N-1}$, и в результате получается ряд $\{u'(i)\}_{i=0\div N-1}$;

находится номер k-й гармоники с частотой f_k, при которой $|f_k - f_x| = \min$ из выражения

$$k' = f_x/f_0 = k \pm k'', \tag{6}$$

где k — результат округления k' до ближайшего целого числа; $k'' = |k' - k|$;

определяется амплитуда $A_u(f_k)_д$ в соответствии с выражением

$$A_u(f_k)_д = \left|\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u(i)\,W^{ik}\right|; \tag{7}$$

вычисляется $A_u(f_x)_д$:

$$A_u(f_x)_д = A_u(f_k)_д|F_g(f_k - f_x)|^{-1}. \tag{8}$$

Для окна Ганна (8) представляется в виде

$$A_u(f_x)_д = A_u(f_k)_д|F_д(k'')|^{-1}. \tag{9}$$

Выражения (5), равно как и (8), и (9), получаются с учетом следующих соображений. Очевидно, что умножение временны́х рядов $\{u(i)\}$ и $\{g(i)\}$ означает, что во временно́й области производится перемножение функции $u(t)$ и $g(t)$. Следовательно, через ДПФ преобразуется не функция $u(t)$, а $u'(t) = u(t)g(t)$, соответствующая временно́му ряду $\{u'(i)\}$. По теореме свертки

$$A_u(f_k)_д = \left|\int_0^\infty F_u(f)\,F_g(f_k - f)\,df\right|. \tag{10}$$

Если предположить, что $F_g(f_k - f) = 0$ для $|f_k - f| > 2f_0$, то (10) можно привести в виде

$$A_u(f_k)_д = \left|\int_{f_k - f_0}^{f_k + f_0} F_u(f)\,F_g(f_k - f)\,df\right|. \tag{11}$$

Если интервал $2f_0$ настолько узок, что в нем $F_u(f)$ аппроксимируется δ-функцией, т. е. через

$$F_u(f) = A_u(f_x)\,\delta(f - f_x), \tag{12}$$

то с учетом (12) из (11) получим

$$A_u(f_k)_\text{д} = A_u(f_x)\,|F_g(f_k - f_x)|. \tag{13}$$

Следовательно, для $A_u(f_x)$ можно записать

$$A_u(f_x) = A_u(f_k)_\text{д}\,|F_g(f_k - f_x)|^{-1} = A_u(f_k)_\text{д}\,K_{F_g}^{-1}, \tag{14}$$

что находится в полном соответствии с (7).

Поскольку условия, для которых получено (14), не выполняются

На основании интеграла свертки можно доказать, что для $\gamma_{T_\text{д}}$ справедливо выражение

$$\gamma_{T_\text{д}} \leqslant \frac{\left| \int\limits_0^{f_x-\varepsilon} F_u(f)\,F_g(f_k+f)\,df + \int\limits_{f_x-\varepsilon}^{f_\text{г}} F_u(f)\,F_g(f_k-f)\,df \right|}{A_u(f_x)\,K_{F_g}}. \tag{16}$$

Следовательно, составляющая обусловленная паразитной амплитудной модуляцией, отсутствует, т. е. $\tau_\text{д} = 0$, и для погрешности можно записать

$$\gamma = \gamma'_{T_\text{д}} + \gamma_{K_{F_g}}. \tag{17}$$

Погрешность $\gamma_{K_{F_g}}$ связана с неточным вычислением K_{F_g}, обусловленным погрешностью задания частоты дискретизации $f_\text{д}$ сигнала $u(t)$ и неполной или неточной информацией о значении f_x измеряемого сигнала.

При использовании окна Гана в целях дискретного преобразования Фурье оценка $\gamma_{K_{F_g}}$ может быть получена из выражения

$$\gamma_{K_{F_g}} \leqslant K.\,0{,}666\ldots \left[\frac{\Delta f_\text{д}}{f_\text{д}} + \frac{\Delta f_x}{f_x}\right] = K.\,0{,}666\,[\gamma_{f_\text{д}} + \gamma_{f_x}], \tag{18}$$

где $\gamma_{f_\text{д}}$ и γ_{f_x} — относительные погрешности $\Delta f_\text{д}/f_\text{д}$ и $\Delta f_x/f_x$ соответственно.

При $f_\text{д} = \text{const}$ из (18) следует, что $\gamma_{K_{F_g}}$ увеличивается с ростом K (соответственно N). Очевидно, что погрешность $\gamma_{K_{F_g}}$ ограничивает частотный диапазон измерения.

Предположим, что сигнал $u(t)$ имеет дискретный спектр вида

$$F_u(f) = \sum_{i=0}^{N/2} A_u(f_i)\,\delta(f - f_i). \tag{19}$$

В таком случае для погрешности $\gamma'_{T_\text{д}}$ можно записать выражение

$$\gamma'_{T_\text{д}} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=0,\,i\neq k}^{N-1} A_u(f_i)\,|F_g(f_k - f_i)|}{A_u(f_x)\,|F_g(f_k - f_x)|}. \tag{20}$$

Следовательно, погрешность уменьшается с увеличением N. Так как $\gamma_{K_{F_g}}$ увеличивается, а $\gamma'_{T_\text{д}}$ уменьшается с ростом N, то для определенного оптимального значения $N = N_\text{опт}$ общая погрешность примет минимальное значение. При подходящем выборе аппаратурных и программных средств для реализации метода частотно-избирательного измерения напряжения с предварительно известной частотой и $\gamma''_{T_\text{д}} = 0$ можно обеспечить высокую точность измерения.

Предложенный метод нашел конкретное применение для контроля частот и уровней кодирующих сигналов телефонных аппаратов с частотным выбором номера.

При нажиме любой кнопки телефонной клавиатуры вырабатывается сигнал, который представляет собой сложное переменное во времени напряжение

$$u(t) = A_{\text{н}_i} \sin\left(2\pi f_{\text{н}_i} t + \varphi_{\text{н}_i}\right) + A_{\text{в}_j} \sin\left(2\pi f_{\text{в}_j} t + \varphi_{\text{в}_j}\right) + \alpha(t), \qquad (21)$$

где $\alpha(t)$ — функция, характеризующая наличие нелинейных искажений; $A_{\text{н}_i}$ и $A_{\text{в}_j}$ — амплитуды кодирующих сигналов (i, $j = 1$—4). Каждый символ, буква или цифра (см. таблицу) кодируются в соответствии с рекомендациями [3], аналогичными стандартам, используемым и в других странах. В таблице показаны номинальные значения кодирующих частот; допустимые отклонения не должны превышать $\pm 1{,}8$ %. Уровни сигналов $H_{\text{н}_i}$ и $H_{\text{в}_j}$ ограничены диапазонами $(-6 \pm 2)\,dB$ для $H_{\text{н}_i}$ и $(-3 \pm 2)\,dB$ для $H_{\text{в}_j}$.

Частоты, Гц	$f_{\text{в}_1}=1209$	$f_{\text{в}_2}=1336$	$f_{\text{в}_3}=1477$	$f_{\text{в}_4}=1633$
$f_{\text{н}_1}=697$	1	2	3	*A*
$f_{\text{н}_2}=770$	4	5	6	*B*
$f_{\text{н}_3}=852$	7	8	9	*C*
$f_{\text{н}_4}=941$	*	0	#	*D*

В соответствии с (7) уровни двух кодирующих сигналов можно определить реализацией следующего алгоритма:

напряжение $u(t)$ (21) дискретизируется во времени и по уровню, при котором получается ряд $\{u(i)\}_{i=0\div N-1}$;

каждое значение $u(i)$ доумножается на соответствующее значение ряда $g(i)$, в результате чего получается ряд $\{u'(i)\}_{i=0\div N-1}$;

производится фильтрация двух кодирующих сигналов, после чего их периоды преобразуются в коды и определяются частоты $f_{\text{н}_i}$ и $f_{\text{в}_j}$;

производится ДПФ для $\{u'(i)\}$ в соответствии с выражениями

$$A\left(f_{k_\text{н}}\right)_\text{д} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u'(i)\, W^{ik_\text{н}} \qquad (22)$$

и

$$A\left(f_{k_\text{в}}\right)_\text{д} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u'(i)\, W^{ik_\text{в}} \qquad (23)$$

и находятся амплитуды $A_{k_\text{н}}$ и $A_{k_\text{в}}$ гармонических составляющих с частотами $f_{k_\text{н}}$ и $f_{k_\text{в}}$ и номерами $k_\text{н}$ и $k_\text{в}$, определенные посредством выражений

$$k'_\text{н} = \frac{f_{\text{н}_i}}{f_0} = k_\text{н} \pm k''_\text{н} \qquad (24)$$

и

$$k'_\text{в} = \frac{f_{\text{в}_j}}{f_0} = k_\text{в} \pm k''_\text{в}. \qquad (25)$$

Номера $k_\text{н}$ и $k_\text{в}$ получены округлением $k'_\text{н}$ и $k'_\text{в}$ до ближайшего целого числа. Через $k''_\text{н}$ и $k''_\text{в}$ обозначены погрешности округления. При этих условиях выполнены неравенства

$$\left|f_{k_\text{н}} - f_{\text{н}_i}\right| \leqslant f_0/2; \quad \left|f_{k_\text{в}} - f_{\text{в}_j}\right| \leqslant f_0/2.$$

Если для $g(t)$ справедливо равенство

$$g(t) = 0{,}5 - 0{,}5\cos(2\pi t/T_\text{д}), \qquad (26)$$

которое соответствует окну Гана, то для $F_g(f)$ получим выражение

$$F_g(f) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(\pi f T_д)}{\pi f T_д}\,\frac{1}{1-(fT_д)^2}, \tag{27}$$

для которого справедливы соотношения

$$F_g\left(f_{k_н} - f_{н_i}\right) = F_g\left(k''_н\right) = k_{F_g н} \tag{28}$$

и

$$F_g\left(f_{k_в} - f_{в_j}\right) = F_g\left(k''_в\right) = K_{F_g в}. \tag{29}$$

Амплитуды кодирующих сигналов отыскиваются в соответствии с выражениями

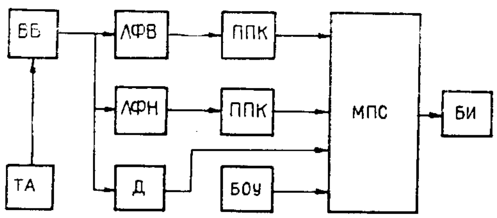
$$A\left(f_{н_i}\right)_д = A\left(f_{k_н}\right)_д K^{-1}_{F_g н} \tag{30}$$

и

$$A\left(f_{в_j}\right)_д = A\left(f_{k_в}\right)_д K^{-1}_{F_g в}. \tag{31}$$

Уровни $H_{н_i}$ и $H_{в_j}$ определяются через полученные значения $A\left(f_{н_i}\right)_д$ и $A\left(f_{в_j}\right)_д$.

На рисунке показана блок-схема микропроцессорной измерительной системы (МПС) для автоматизированного контроля частот и уровней кодирующих сигналов телефонных аппаратов с частотным выбором номера.



Система работает на базе представленного выше алгоритма. После нажатия любой кнопки выбора абонента (ВБ) сигнал из телефонного аппарата (ТА) усиливается входным усилителем, фильтруется посредством ЛФН и ЛФВ, а периоды $T_{н_i}$ и $T_{в_j}$ кодирующих сигналов преобразуются в коды. В начале преобразования преобразователи период — код (ППК) вырабатывают два сигнала, которые воздействуют на микропроцессорную систему так, что начинается дискретизация $u(t)$ посредством дискретизатора (Д). После окончания этих процессов в оперативной памяти системы запоминаются численные значения периодов $T_{н_i}$ и $T_{в_j}$ и значение временно́го ряда $\{u(i)\}_{i=0\div N-1}$. Микропроцессорная система производит математические операции, указанные в алгоритме. Осуществляется проверка о соответствии измеренных параметров заданным границам, а результаты измерения и контроля определяются посредством блока индикации (БИ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хэррис Ф. Дж.** Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье // ТИИЭР.— 1978.— **66**, № 1.
2. **А. с. 35137 Болгария.** Метод и устройство за селективно измерване на напрежение с предварително известна честота/В. Д. Филев, Н. И. Балабанов.— Опубл. 09.12.82.
3. **БДС 3725—80.** Апарати телефонни.

Поступила в редакцию 8 октября 1986 г.