11. **Duffin R. J., Schaeffer A. C.** Power series with bounded coefficients // Amer. J. Math.— 1945.— 67, N 5.— P. 141.
12. **Левин Б. Я.** О функциях конечной степени, ограниченных на последовательности точек // ДАН СССР.— 1949.— 65, № 3.
13. **Левин Б. Я.** Обобщение теоремы Картрайт о целой функции конечной степени, ограниченной на последовательности точек // Изв. АН СССР. Математика.— 1957.— 21, № 4.
14. **Логвиненко В. Н.** Теоремы Картрайт и вещественные множества единственности для целых функций многих комплексных переменных // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.— 1957.— № 22.
15. **Бернштейн С. Н.** Собр. соч.— М.: Изд-во АН СССР, 1954.— Т. II.
16. **Davidson M. E., Grünbaum F. A.** Tomographic reconstruction with arbitrary directions // Comm. Pure Appl. Math.— 1981.— 34.— P. 77.
17. **Natterer F.** Some ill-problems arising in connection with Radon's integral equation // Publ. Ystituto di analisi globale e applic.— 1983.— N 8.
18. **Ruff L. T.** Tomographic imaging of the earthquake rupture process // Geophys. Res. Lett.— 1984.— 11, N 7.— P. 629.
19. **Palamodov V., Denisijuk A.** Inversion de transformation de Radon' d'apres les donn' ee non-completes // Comp. rend. L'acad. scien.— 1988.— 307, N 1.— P. 181.

Поступила в редакцию 4 июля 1988 г.

УДК 62.505

К. В. ИСАЕВ

(Ростов-на-Дону)

О СВОБОДНЫХ ОТ СИЛЬНЫХ АПРИОРНЫХ ГИПОТЕЗ МЕТОДАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ

Введение. Формирование априорных гипотез, как отмечается в [1], является ключевым моментом при разработке методов идентификации систем. Предлагаемые в настоящей статье методы не используют некоторые из широко распространенных, но плохо обоснованных сильных априорных гипотез, а основываются на значительно более слабых и естественных гипотезах. Формирование и проверка таких гипотез производится путем анализа данных метрологических экспериментов, проводимых на эталонных (образцовых) системах (объектах) в тех же условиях, в каких получены обрабатываемые с целью идентификации данные основного эксперимента. Таким образом, главная задача обработки данных и побочная задача ее метрологического обеспечения оказываются тесно связанными.

Стандартные априорные гипотезы. Исходными понятиями в теории идентификации систем, не определяемыми через более простые, естественно считать понятия *эмпирических данных* $\tilde{x}$, $\tilde{x} \in X$, и *модели* системы c, $c \in C$, $C \subset U$ (пространства X и U уточняются для каждой конкретной задачи идентификации). Эмпирические (доступные исследователю) данные $\tilde{x}$ всегда неточны и формируются из *точных данных* x, $x \in X$, не доступных исследователю, и *шума* ε (например, по формуле $\tilde{x} = x + \varepsilon$). Цель идентификации — определение по данным $\tilde{x}$ некоторых моделей c исследуемой системы, на которой эти данные получены.

Решение задачи идентификации всегда определяется при некоторых дополнительных ограничениях, устанавливающих связь между моделью c и точными данными x. Эти ограничения обычно задаются с помощью параметрического семейства соотношений, называемого *классом моделей* системы и имеющего вид

$$\{F(\cdot,\ \cdot,\ c) = 0, \quad c \in C\}, \tag{1}$$

где $F(\cdot,\ \cdot,\ c)$ — функция типа $X \times W \to V$, определенная с точностью до параметра c; W и V — некоторые, обычно линейные, метрические пространства с элементами w и v (w — так называемая внутренняя переменная системы). В частном случае класса простых моделей семейство соотношений (1) заменяется более простым семейством

$$\{F(\cdot,\ c)=0,\quad c\in C\},\tag{2}$$

где $F(\cdot,\ c)$ — функция типа $X\to V$. Каждый класс моделей (1) порождает множество D всевозможных троек $d:=(x,\ w,\ c)$ вида

$$D:=\{(x,\ w,\ c):\ c\in C,\ x\in X,\ w\in W,\ F(x,\ w,\ c)=0\}.\tag{3}$$

В случае класса простых моделей в качестве множества D будем рассматривать всевозможные двойки $d:=(x,\ c)$ вида

$$D:=\{(x,\ c):\ c\in C,\ x\in X,\ F(x,\ c)=0\}.\tag{4}$$

Очевидно, что одна из основных априорных гипотез, явно или неявно присутствующая во всех постановках задач идентификации, формулируется в следующем виде.

Гипотеза 1. Существует единственная так называемая точная модель c^* системы, на которой получены эмпирические данные $\tilde{x}$, и задан некоторый класс моделей (1) (или класс простых моделей (2)), к которому эта модель принадлежит.

Гипотеза 1 ограничивает выбор моделей c последними элементами троек $d:=(x,\ w,\ c)$ (или двоек $d:=(x,\ c)$), принадлежащих множеству D.

Подавляющее большинство современных методов идентификации основывается на статистической (точнее вероятностной) интерпретации эмпирических данных [2, 3], т. е. существенно использует предположение о том, что данные $\tilde{x}$ порождаются некоторым определенным статистическим (в смысле аксиом теории вероятностей) механизмом, как правило, очень простого вида («выборочная модель» формирования эмпирических данных). Это предположение, названное Калманом стандартной статистической априорной гипотезой, формулируется в следующем виде.

Гипотеза 2. Эмпирические данные $\tilde{x}$ являются случайной величиной, относительно которой задано семейство условных плотностей распределения вероятностей

$$\{p(\cdot|x),\quad x\in X\},\tag{5}$$

определяющее распределение эмпирических данных $\tilde{x}$ для каждых точных данных x.

Такие широко применяемые методы идентификации, как метод максимального правдоподобия [2, 3], максимума апостериорной вероятности [3], байесовские методы [4], базируются на гипотезе 2. В частности, согласно методу максимального правдоподобия, в качестве решения задачи идентификации выбирается элемент c тройки $d:=\{x,\ w,\ c\}$ из множества (3), максимизирующей $p(\tilde{x}|x)$ (в случае простых моделей $p(\tilde{x}|x)$ максимизируется на множестве двоек $d:=(x,\ c)$, принадлежащих множеству (4)).

Сформулируем еще одну очень часто применяемую гипотезу, во многих случаях существенно упрощающую решение задачи идентификации.

Гипотеза 3. Эмпирические данные представимы в виде $\tilde{x}=\{\tilde{y},\ \tilde{z}\}$, где часть $\tilde{z}$ данных $\tilde{x}$ не содержит в себе помеху, т. е. равна соответствующей части z точных данных x, $\tilde{z}=z$, а уравнение $F(x,\ w,\ c)=0$ (или $F(x,\ c)=0$ для простых моделей) однозначно разрешимо относительно y, т. е. может быть записано в виде $y=Q(z,\ w,\ c)$ (или $y=Q(z,\ c)$).

Гипотеза 3 применяется, в частности, в регрессионном анализе и связанном с ним методе наименьших квадратов (МНК) [5]. При ее выполнении семейство распределений (5) вырождается в семейство $\{p_y(\cdot|\{y,\ z\}),\ x\in X\}$, где плотность $p_y(\cdot|x)$ определяет распределение зашумленной части $\tilde{y}$ эмпирических данных $\tilde{x}$ при условии, что известны точные данные $x := \{y, z\}$.

Упрощение решения задачи идентификации, например, методом максимального правдоподобия при принятии гипотезы 3 связано с переходом от задачи условной максимизации $p(\tilde{x}|x)$ по d (при условии $d \in D$) к значительно более простой задаче максимизации $p_v(\tilde{y}|\{Q(z, w, c), z\})$ по всевозможным парам $(w, c) \in W \times C$ (для простых моделей максимизируется функция $p_v(\tilde{y}|\{Q(z, c), z\})$ по $c \in C$). Аналогичным образом при принятии гипотезы 3 упрощается решение задачи идентификации другими методами.

Гипотезы 2 и 3, по мнению Калмана, являются наиболее сильными априорными гипотезами современных методов идентификации, имеющими «сомнительное научное обоснование или не имеющими такового вовсе» и требующими для своей конкретизации информации, «которая не может быть извлечена из доступных данных в большой массе практических задач» [1]. Как отмечает Калман, большинство исследователей, не занимающихся напрямую статистикой, понимают шум в эмпирических данных $\tilde{x}$ в несколько ином, более широком, чем определяет гипотеза 2, смысле: как любые отклонения от моделируемых (по гипотезе 1) точных данных x, т. е. как немоделируемую составляющую данных $\tilde{x}$. Такой же неестественной для многих задач идентификации является гипотеза 3. Таким образом, актуальность разработки методов идентификации, свободных от сильных априорных гипотез 2 и 3, не вызывает сомнений. В то же время гипотеза 1 всегда имеет место, и ее выполнение в дальнейшем предполагается без особых оговорок.

Фундаментальные принципы идентификации систем. Калман в [1] сформулировал два фундаментальных принципа (требования), которым должно удовлетворять решение задачи идентификации. Несколько более сильной формой обоих этих принципов является следующее требование.

Принцип Калмана. Неточные эмпирические данные $\tilde{x}$ должны приводить к множеству моделей $C^0(\tilde{x})$, $C^0(\tilde{x}) \subset C$ (неединственность решения задачи идентификации). В случае точных (и полных) данных $\tilde{x} = x$ множество $C^0(\tilde{x})$ должно вырождаться в точку — единственную точную модель c^*. Для любых возможных данных $\tilde{x}$ множество $C^0(\tilde{x})$ должно содержать в себе точную модель c^*.

Множество $C^0(\tilde{x})$ будем называть общим решением задачи идентификации (ОРЗИ), а его элементы — частными решениями задачи идентификации (ЧРЗИ), соответствующими эмпирическим данным $\tilde{x}$.

Концепция неоднозначности решения задач обработки эмпирических данных, несмотря на некоторые трудности, связанные с чисто психологическим неприятием задач с неоднозначным ответом, получает в настоящее время все большее признание. Отметим в этой связи работу [6], в которой введено и эффективно используется понятие формально сопоставимых с эмпирическими данными моделей их интерпретации. Множество всех таких моделей фактически совпадает с введенным выше понятием ОРЗИ.

Естественно, чтобы, кроме принципа Калмана, ОРЗИ отвечало также следующему требованию, связанному с корректностью задач идентификации [7].

Принцип Тихонова. ОРЗИ $C^0(\tilde{x})$ не должно содержать моделей c, слишком отличающихся друг от друга (в смысле метрики пространства U).

В зависимости от того, насколько удалены друг от друга элементы c множества $C^0(\tilde{x})$, можно говорить о более или менее полном выполнении принципа Тихонова. Значение этого принципа состоит в том, что он в сочетании с принципом Калмана обеспечивает малое отличие любого ЧРЗИ от точной модели c^*.

Принцип Калмана определяет простой и естественный способ объединения результатов идентификации, полученных по данным

$\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \ldots, \tilde{x}^{(k)}$ различных экспериментов, в виде

$$C^0(\tilde{x}) = \bigcap_{i=1}^{k} C^0(\tilde{x}^{(i)}), \tag{6}$$

где $\tilde{x} := \{\tilde{x}^{(1)}, \tilde{x}^{(2)}, \ldots, \tilde{x}^{(k)}\}$. При этом множество (6) всегда непустое, содержит в себе точную модель c^* и не шире каждого из множеств $C^0(\tilde{x}^{(i)})$, т. е. для ОРЗИ (6) полнее, чем для каждого из ОРЗИ $C^0(\tilde{x}^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, k$, выполняется принцип Тихонова.

Метод опорных функционалов (МОФ). Основную идею МОФ вначале проиллюстрируем на примере простейшей задачи идентификации.

Пример 1. Пусть данные $\tilde{x}$ имеют вид последовательности $\tilde{x} := \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N\}$ из фиксированного числа N скалярных величин (наблюдений) $\tilde{x}_i$, связанных с оцениваемым параметром c соотношениями $x_i = c$, $i = 1, 2, \ldots, N$, которые определяют класс простых моделей вида (2). Применим для решения такой задачи метод максимального правдоподобия. Для этого конкретизируем гипотезу 2, предположив, что составляющие $\varepsilon_i := \tilde{x}_i - x_i$ шума ε — совместно нормально распределенные случайные величины с нулевыми средними значениями, не зависящие в совокупности от точных данных x. Плотности $p(\cdot|x)$ из семейства (5) определяют в этом случае также нормальные распределения, смещенные на величины $x_i = c$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Решение сформулированной задачи приводит к единственной и не зависящей от ковариационной матрицы распределения $p(\cdot|x)$ оценке c^* параметра c в виде среднеарифметического значения наблюдений

$$c^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i. \tag{7}$$

Так как к оценке (7) приводит любое унимодальное и симметричное распределение шума ε, то содержащаяся в априорной гипотезе 2 информация с точки зрения обоснования формулы (7) оказывается избыточной. Фактически для получения формулы (7) принятую нами гипотезу 2 можно заменить гораздо более слабой и естественной для исследователей-прикладников гипотезой в виде равенства

$$\sum_{i=1}^{N} (\tilde{x}_i - x_i) = 0, \tag{8}$$

означающего, что элементы ε_i шума ε в наблюдениях $\tilde{x}_i$ отклоняются от нуля влево и вправо в среднем одинаково. Вместо гипотезы (8) можно использовать еще более слабую и естественную гипотезу в форме неравенства

$$\left| \sum_{i=1}^{N} (\tilde{x}_i - x_i) \right| \leqslant \delta \quad (\delta \geqslant 0), \tag{9}$$

допускающего некоторый разброс среднего отклонения эмпирических данных от точных. Гипотеза (9) в качестве решения задачи идентификации определяет уже не единственную модель (7), а множество $C^0(\tilde{x})$ моделей c, удовлетворяющих условию $c \in [c^* - \delta/N, c^* + \delta/N]$. Наконец, в априорную гипотезу, заменяющую гипотезу 2, помимо условия (9), могут быть включены другие условия, например, в форме неравенств

$$\left| \sum_{i=1}^{N} (\tilde{x}_i - x_i) x_i \right| \leqslant \delta_1, \quad \delta_- \leqslant \sum_{i=1}^{N} (\tilde{x}_i - x_i)^2 \leqslant \delta_+, \tag{10}$$

где δ_1, δ_- и δ_+ — заданные константы, $0 < \delta_- \leqslant \delta_+$. Рассматривая теперь в качестве ОРЗИ множество моделей, удовлетворяющих условию (9), а также одному или одновременно обоим условиям (10), приходим к более ограниченным, чем интервал $[c^* - \delta/N, c^* + \delta/N]$, множествам $C^0(\tilde{x})$, имеющим вид пересечения этого интервала с соответствующими интервалами, порожденными ограничениями (10).

Заметим, что условия (9), (10) несут в себе вполне конкретную априорную информацию, не связанную с какой-либо вероятностной интерпретацией эмпирических данных: первое из условий (10) определяет с помощью константы δ_1 допустимую степень зависимости шума от точных данных («полезного сигнала»), второе — с помощью констант δ_- и δ_+ границы для допустимых значений среднеквадратического отклонения эмпирических данных от точных (границы выборочной дисперсии).

Обобщая рассмотренный в примере 1 подход, сформулируем теперь общий метод идентификации, названный нами методом опорных функционалов. С этой целью зафиксируем некоторую систему так называемых опорных функционалов

$$a(\cdot,\ \cdot,\ b):=\{a_1(\cdot,\ \cdot,\ b),\ a_2(\cdot,\ \cdot,\ b),\ \ldots,\ a_L(\cdot,\ \cdot,\ b)\}, \tag{11}$$

определенных на эмпирических и точных данных $\tilde{x}$ и x (соответственно первый и второй аргументы) с точностью до параметра b. Каждый из функционалов $a_i(\cdot,\ \cdot,\ b)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ L$, может быть скалярного, векторного, матричного или любого иного типа и может отличаться по типу от других функционалов системы (11), соответствующих другим значениям индекса i. Относительно параметра b условимся, что он имеет вид $b:=\{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_L\}$ и типы его компонент b_i совпадают с типами соответствующих индексу i функционалов $a_i(\cdot,\ \cdot,\ b)$ из последовательности (11). Зафиксируем некоторое множество B значений параметра b.

ОРЗИ МОФ в классе моделей (1), соответствующее эмпирическим данным $\tilde{x}$, системе опорных функционалов (11) и множеству их значений B, определим как множество $C^0(\tilde{x})$, $C^0(\tilde{x})\subset C$, элементов c всех троек $d:=(x,\ w,\ c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} a(\tilde{x},\ x,\ b) &= b;\\ F(x,\ w,\ c) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

при всевозможных значениях b из B. В случае простых моделей второе уравнение системы (12) заменяется уравнением $F(x,\ c)=0$, а тройка $d:=(x,\ w,\ c)$ — двойкой $d:=(x,\ c)$. Для опорных функционалов типа (9), (10) первое уравнение системы имеет частный вид: $a(\tilde{x},\ x)=b$.

Априорная гипотеза МОФ, заменяющая стандартную гипотезу 2, формулируется в следующем виде.

Гипотеза МОФ. Заданы система опорных функционалов (11) и множество значений этих функционалов B такие, что для любых возможных точных данных x (индуцированных заданным в соответствии с гипотезой 1 классом моделей) и любых соответствующих им эмпирических данных $\tilde{x}$ среди элементов множества B найдутся такие значения параметра b, при которых выполняется равенство $a(\tilde{x},\ x,\ b)=b$.

Заметим, что МОФ не всегда полностью удовлетворяет принципу Калмана: при точных и полных данных $\tilde{x}$ ОРЗИ МОФ не обязательно вырождается в единственную точку c^*. Во всем остальном выполнение принципа Калмана автоматически обеспечивается гипотезой МОФ.

Для достаточно полного выполнения принципа Тихонова требуется, как обычно, информационная согласованность априорных гипотез с эмпирическими данными. Для МОФ это означает, что множество решений системы уравнений (12), соответствующее всевозможным значениям b из B, не должно быть слишком разнообразным. Это обеспечивается, во-первых, достаточно «грубым» классом моделей (не слишком широким множеством D, т. е. «жесткостью» ограничений, накладываемых на c вторым из уравнений (12)), во-вторых, достаточно полной и разнообразной системой опорных функционалов («жесткостью» ограничений, накладываемых на c первым из уравнений (12)) и, в-третьих, не слишком широким множеством B. Выполнение гипотезы 3, как правило, облегчает реализацию МОФ, но в общем случае не предполагается.

Пример 2. Пусть данные $\tilde{x}$ имеют вид последовательности из фиксированного числа N n-мерных векторов $\tilde{x}_i$: $\tilde{x} := \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_N\}$. Используя обозначение $\varepsilon_i := \tilde{x}_i - x_i$, в качестве опорных функционалов, входящих в ту или иную систему (11), определяющую гипотезу МОФ, можно рассматривать следующие векторы, матрицы или их отдельные элементы:

$$a_1 = \left|\sum \varepsilon_i\right|, \quad a_2 = \sum \varepsilon_i \varepsilon_i^T, \quad a_3 = \sum (\varepsilon_i - b_1)(\varepsilon_i - b_1)^T, \quad a_4 =$$
$$= \sum \varepsilon_i x_i^T / \| x_i \|, \quad a_5 = \sum (\varepsilon_i - b_1)\, x_i^T, \quad a_6 = \sum \varepsilon_i \varepsilon_{i+s}^T, \quad a_7 =$$
$$= \sum \| \varepsilon_i \| / \| x_i \|, \quad a_8 = \sum \psi_i (\tilde{x}_i, x_i),$$

где $\psi_i(\cdot, \cdot)$, $i = 1, 2, \ldots, N$,— заданные функции, суммирование в формуле для a_6 проводится от $i = 1$ до $i = N - s$ $(0 \leqslant s < N)$, а во всех остальных формулах — от $i = 1$ до $i = N$. Обратим внимание на зависимость функционалов a_3 и a_5 от значения b_1 другого функционала a_1 (возможность такой зависимости отражена в обозначении (11)).

Полный МНК (ПМНК). Предположим, что данные $\tilde{x}$ имеют такой же вид, как в примере 2. Определим так называемую весовую последовательность $P(b) := \{P_1(b), P_2(b), \ldots, P_N(b)\}$ положительно определенных $(n \times n)$-матриц $P_i(b)$, зависящих от векторного, матричного или другого типа параметра b. Зафиксируем множество B возможных значений параметра b, $b \in B$, эмпирические данные $\tilde{x}$ и некоторый класс моделей вида (1) (или (2)), определяющий множество D вида (3) (или (4)). Рассмотрим функционал

$$J(\tilde{x}, d, b) := \sum_{i=1}^{N} (\tilde{x}_i - x_i)^T P_i(b) (\tilde{x}_i - x_i). \tag{13}$$

ОРЗИ ПМНК в классе (1) (или (2)), соответствующее эмпирическим данным $\tilde{x}$, системе весовых последовательностей $P(b)$ и множеству B, определим как множество $C^0(\tilde{x})$ последних элементов c всевозможных троек (или двоек для простых моделей):

$$d = \arg \min_{d \in D} J(\tilde{x}, d, b), \tag{14}$$

соответствующих всевозможным значениям b из B.

Априорную гипотезу ПМНК, заменяющую стандартную гипотезу 2 и обеспечивающую выполнение принципа Калмана, можно сформулировать следующим образом.

Гипотеза ПМНК. Заданы зависящая от параметра b весовая последовательность $P(b)$ и множество B значений этого параметра такие, что для любых возможных (в соответствии с гипотезой 1) точных данных x и любых соответствующих им эмпирических данных $\tilde{x}$ среди элементов множества B найдется значение параметра b, приводящее к тому, что последний элемент c соответствующей тройки (или двойки для простых моделей) (14) совпадет с точной моделью c^*.

Для ПМНК при фиксированных эмпирических данных $\tilde{x}$ принцип Тихонова выполняется тем полнее, чем грубее класс моделей системы (уже множество D) и менее разнообразно множество весовых последовательностей $P(b)$, определяемое видом функций $P(\cdot)$ и множеством B.

Пример 3. Рассмотрим класс простых моделей (2), для которых функция $F(x, c)$ реализуется в виде последовательности s-мерных вектор-функций $F_i(x, c) := y_i - f_i(z_i, c)$, где $i = 1, 2, \ldots, N$, $s < n$ и векторы x_i представлены в блочном виде $x_i = (y_i^T \vdots z_i^T)^T$. Путем подстановки $y_i = f_i(z_i, c)$ в (13) получаем следующую реализацию соотношения (14):

$$(z, c) = \arg \min_{(z,c)} \sum_{i=1}^{N} [(\tilde{y}_i - f_i(z_i, c))^T P_i^y (\tilde{y}_i - f_i(z_i, c)) +$$
$$+ 2 (\tilde{y}_i - f_i(z_i, c))^T P_i^{yz}(b) (\tilde{z}_i - z_i) + (\tilde{z}_i - \tilde{z})^T P_i^z(b) (\tilde{z}_i - z_i)], \tag{15}$$

здесь $z := \{z_1, z_2, \ldots, z_N\}$; $P_i^y(b)$, $P_i^{yz}(b)$, $P_i^z(b)$ — подматрицы (блоки) матрицы $P_i(b)$, соответствующие разбиению векторов x_i на подвекторы y_i и z_i. В случае принятия гипотезы 3 $\tilde{z} = z$, и, следовательно, из правой части соотношения (15) исчезают второе и третье слагаемые (под знаком суммы). При этом, так как z задано, оставшуюся сумму необходимо минимизировать лишь по c, что эквивалентно обычному МНК.

В частном случае линейных функций $f_i(z_i, c)$ имеем $y_i = cz_i$, где c — $(s \times q)$-матрица полного ранга (s и q — размерности соответственно векторов y_i и z_i, $s + q = n$), и приходим к очень распространенной на практике задаче идентификации гиперплоскости фиксированной размерности s в пространстве R^n. Для элементов z, c пар (15) в этом случае легко получить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(\gamma_i c + M_i) z_i = \gamma_i \tilde{y}_i + M_i \tilde{z}_i,\ i = 1, 2, \ldots, N;\\ &\sum_{i=1}^{N} [P_i^y(b)(\tilde{y}_i - cz_i) + P_i^{yz}(b)(\tilde{z}_i - z_i)]\, z_i^T = 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $\gamma_i = c^T P_i^y + (P_i^{yz})^T$; $M_i = c^T P_i^{yz} + P_i^z$. Подстановкой решений $z_i N$ первых (автономных при фиксированном c) уравнений системы (16) в ее последнее уравнение эта система сводится к одному уравнению для матрицы c, которое может быть решено любым численным методом. ОРЗИ ПМНК объединяет в себе все такие решения, соответствующие всевозможным значениям b из B. В случае принятия гипотезы 3 система (16) переходит в систему нормальных линейных уравнений, фигурирующих в стандартном МНК [5].

Пример 4. В условиях примера 3 рассмотрим класс моделей типа (1) с функцией $F(x, w, c)$ в виде последовательности вектор-функций

$$F_i(x, w, c) := \begin{pmatrix} w_i - f_i(w_{i-1}, z_i, c) \\ y_i - h_i(w_i, z_i, c) \end{pmatrix},$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$; $w := \{w_0, w_1, \ldots, w_N\}$; f_i и h_i — заданные вектор-функции соответствующих размерностей. Этот класс моделей определяет стандартную задачу идентификации динамической системы, описанной в пространстве состояний (i — моменты времени, w_i — соответствующие им состояния системы). Для решения рассмотренной задачи идентификации полным МНК может быть получена система уравнений относительно c, z, w_0, зависящая от параметра b.

Формирование гипотез МОФ и ПМНК. По самой сути понятия априорной гипотезы не существует достаточных признаков ее выполнения, и, следовательно, каждая конкретная априорная гипотеза формируется лишь на основе проверки некоторой более или менее сильной системы необходимых признаков. Основное требование к этим признакам — возможность проверки их по доступным данным. Такими данными для проверки гипотез МОФ и ПМНК могут служить данные метрологических экспериментов, т. е. экспериментов, проводимых на эталонных системах (как правило, из того же определенного гипотезой 1 класса, что и идентифицируемые системы), в тех же условиях, в которых регистрируются данные основного эксперимента (с помощью тех же технических средств).

Каждая эталонная система характеризуется тем, что для нее известно значение параметра c (точная модель). Путем решения системы уравнений (12) (в случае проверки гипотезы МОФ) или уравнения (14) (в случае проверки гипотезы ПМНК) относительно (x, w, b) по модели c и эмпирическим данным $\tilde{x}$ могут быть определены соответствующие им значения параметра b. Таким способом в результате проведения ряда метрологических экспериментов можно оценить границы множества B. При этом большему числу метрологических экспериментов и большему разнообразию эталонных систем, в них участвовавших,

3*

соответствует более сильная система необходимых признаков выполнения сформированной на их основе априорной гипотезы.

Важно подчеркнуть, что принципы Калмана и Тихонова (точнее, выдвигаемые ими требования) взаимно противоречивы, и, следовательно, конкретизация априорной гипотезы того или иного типа всегда связана с компромиссом. В частности, сужение множества B или расширение системы опорных функционалов приводит при прочих равных условиях к менее надежному выполнению принципа Калмана, но более полному выполнению принципа Тихонова для соответствующей гипотезы МОФ.

Существует тесная связь между метрологическим обеспечением задач идентификации и проблемой их регуляризации [6, 7]. Пользуясь терминологией теории регуляризации, можно сказать, что априорные гипотезы содержат в себе так называемую дополнительную качественную и количественную информацию, необходимую для регуляризации. Напритического применения (моделирования) из ОРЗИ $C^{v}(\tilde{x})$ обычно необходимо выделить одну модель. Это выделение естественно подчинить некоторому требованию, например, требованию минимальной сложности или максимальной прогнозирующей способности отбираемой модели. Уточнение и решение подобных задач может рассматриватья в качестве второго этапа идентификации. Ясно, что определенность и роль этого этапа тем выше, чем менее полно для полученного на первом этапе ОРЗИ выполнен принцип Тихонова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Калман Р. Е.** Идентификация систем с шумами // УМН.— 1985.— 40, вып. 4.
2. **Кендалл М., Стьюарт А.** Статистические выводы и связи.— М.: Мир, 1973.
3. **Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л.** Идентификация систем управления.— М.: Наука, 1974.
4. **Современные** методы идентификации систем/Под ред. П. Эйкхоффа.— М.: Мир, 1983.
5. **Себер Дж.** Линейный регрессионный анализ.— М.: Мир, 1980.
6. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Думова А. А. и др.** О многоцелевой проблемно-ориентированной системе обработки результатов экспериментов.— М., 1976.— (Препр./АН СССР. ИПМ; 142).
7. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 28 апреля 1987 г.

УДК 621.391

О. О. ДРОБАХИН

(Днепропетровск)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ В ВИДЕ СУММЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА ПРОНИ

Модель сигнала в виде суммы экспоненциальных функций с комплексными показателями $p_k = p'_k + jp''_k$, $j = \sqrt{-1}$,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{L} c_k \exp(jp_kt) \tag{1}$$