АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
А В Т О М Е Т Р И Я

№ 2 1989

СИСТЕМЫ СИНТЕЗА ВИЗУАЛЬНОЙ ОБСТАНОВКИ

УДК 629.7.058.74 : 681.3.06

А. М. КОВАЛЕВ, А. С. ТОКАРЕВ
(Новосибирск)

К ОЦЕНКЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРАЦИИ СИНТЕЗИРОВАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В системах синтеза визуальной обстановки (ССВО) [1] изображение воспроизводится на дискретном растре, который можно представить в виде двумерной δ-функции выборки. Дискретизации подвергается синтезированное изображение видимых поверхностей имитируемых объектов. Это двумерная функция, которая описывает конечное множество областей на плоскости, раскрашенных в различный цвет. Чаще всего область плоскости — выпуклый или невыпуклый многоугольник, являющийся гранью многогранной модели объекта.

Поскольку нет ограничений снизу на площадь и сверху на периметр области, а также ввиду того, что область ограничивается «математически» заданной кривой или множеством отрезков, синтезированное изображение содержит пространственные частоты, намного превышающие частоты двумерной дискретизации. Если в изображении предварительно не подавлены частоты, превышающие половину частот дискретизации по каждому из возможных направлений на плоскости, то возникнет элайсинг, порождающий хорошо известные дефекты: ступеньки на контурах объектов, разрывы тонких граней, муары, мерцания малых объектов и т. д.

Для подавления верхних частот используется свертка изображения с фильтром

$$G(x, y) = \int\limits_{x'} \int\limits_{y'} C(x', y')\, H(x - x', y - y')\, dx'\, dy', \qquad (1)$$

где $C(x, y)$ — синтезированное изображение; $H(x, y)$ — фильтр; $G(x, y)$ — фильтрованное изображение.

Процесс фильтрации на уровне пиксела (элемента изображения) сводится к тому, что в каждую точку выборки устанавливается фильтр H (рис. 1), а n многоугольников, попавших в его апертуру, вносят вклад в результирующий цвет $G_п$ следующим образом:

$$G_п = \sum_{i=1}^{n} C_i H_i, \qquad (2)$$

где C_i — цвет i-го многоугольника, принятый постоянным в апертуре фильтра; H_i — двойной интеграл от функции фильтра над областью многоугольника. Удовлетворительные результаты дают фильтры, площадь основания (апертуры) которых не меньше $4\Delta x \Delta y$ (Δx, Δy — расстояния между центрами пикселов, измеренные вдоль ортогональных осей x и y) [2].

Для оценки производительности фильтрующего алгоритма, выполняющего (2), необходимо знать среднее значение числа многоугольников n, попавших в апертуру фильтра. Этому вопросу и посвящена данная работа.

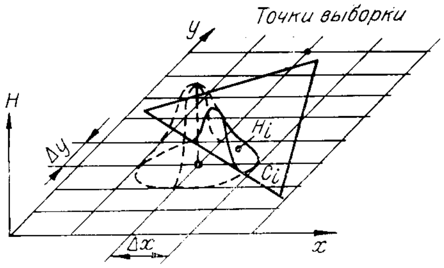


Рис. 1

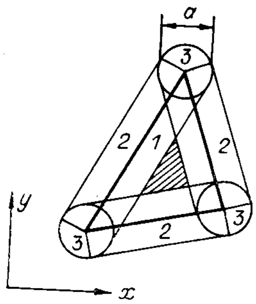


Рис. 2

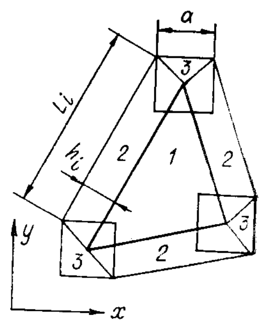


Рис. 3

Вначале определим число пикселов, накрытых фильтрованным многоугольником. Затем оценим число пикселов, накрытых фильтрованными гранями синтезированного изображения. Поделив полученный результат на число пикселов в плоскости изображения, найдем среднее значение n. Исследования будем проводить для двух распространенных типов фильтра: с круглым и квадратным основаниями [2, 3]. Пусть расстояния между центрами пикселов $\Delta x = \Delta y$ и все необходимые величины измеряются в этих единицах.

Площадь фильтрованного многоугольника. *Фильтр с круглым основанием диаметром* a. Пусть задан выпуклый многоугольник площади S, ограниченный ребрами длины L. Процесс фильтрации (1) увеличивает его площадь, «размывая» границы. На рис. 2 показан фильтрованный треугольник. Внутренняя заштрихованная часть треугольника полностью покрывает апертуру фильтра. Область в окрестности ребер накрывает апертуру частично. Точки, расположенные на расстоянии $d < a/2$ от соответствующих ребер, и образуют эту окрестность.

Нетрудно видеть, что искомая площадь фильтрованного треугольника $S_\bigcirc$ слагается из трех величин: площади S (*1*); дополнительной площади на ребрах, равной $La/2$ (*2*); площади на вершинах, равной площади основания фильтра, т. е. $\pi\alpha^2/4$ (*3*). Указанное распространяется на любой выпуклый многоугольник.

Таким образом, для фильтра с круглым основанием

$$S_\bigcirc = S + \frac{a}{2} L + \frac{\pi}{4} a^2. \tag{3}$$

Фильтр с квадратным основанием площади a^2 (*рис. 3*). Рассуждая так же, как и для фильтра с круглым основанием, получим

$$S_\square = S + \sum_i L_i h_i + a^2, \tag{4}$$

где L_i — длина i-го ребра; h_i — высота параллелограмма, построенного на i-м ребре. Для вертикальных и горизонтальных ребер $h_i = a/2$, для наклонных под углом 45° к осям координат — $h_i = a/\sqrt{2}$. Для произвольного наклона ребра

$$a/2 \leqslant h_i \leqslant a/\sqrt{2}. \tag{5}$$

С учетом (5) для фильтра с квадратным основанием

$$S_\square \leqslant S + La/\sqrt{2} + a^2. \tag{6}$$

Число пикселов, покрытых фильтрованным многоугольником. Воспользуемся результатом, известным из интегральной геометрии на плоскости [4], утверждающим, что для совокупности точек с целыми координатами (целочисленная решетка) среднее значение числа точек, содержащихся внутри области площади S_1, равно S_1.

Таким образом, при дискретизации фильтрованных многоугольников число выборок (пикселов) в среднем равно площади фильтрованного многоугольника.

Нетрудно показать, что значения $S_\circ$ и $S_\square$ из (3), (6) являются предельными, поскольку площадь фильтрованных невыпуклых многоугольников или областей, ограниченных простыми кривыми, всегда меньше найденных значений.

Коэффициент формы многоугольника. Периметр многоугольника удобно выразить через площадь с помощью соотношения

$$L = 2l\sqrt{\pi S}, \tag{7}$$

где l — коэффициент формы, который интегрально определяет форму области плоскости. Наименьшее l соответствует кругу: $L = 2\pi R$; $S = \pi R^2$; $l = 1$.

Коэффициент формы многоугольника показывает, во сколько раз его периметр больше периметра круга, если площади многоугольника и круга равны. Чем меньше l, тем ближе область по форме к равностороннему многоугольнику, кругу; чем больше l, тем области более вытянутые, протяженные, тонкие.

С учетом (7) выражения (3) и (6) можно представить в виде

$$S_\circ \leqslant S + al\sqrt{\pi S} + \pi a^2/4; \tag{8}$$

$$S_\square \leqslant S + al\sqrt{2\pi S} + a^2. \tag{9}$$

Число пикселов, покрытых F гранями синтезированного изображения. Пусть синтезированное изображение содержит F видимых граней, причем i-я грань имеет площадь S_i и коэффициент формы l_i.

Среднее число пикселов, покрытых фильтрованными гранями, равно для круглого и квадратного оснований фильтра соответственно:

$$P_\circ \leqslant \sum_{i=1}^{F} S_i + a\sqrt{\pi}\sum_{i=1}^{F} l_i\sqrt{S_i} + \frac{\pi}{4}a^2F; \tag{10}$$

$$P_\square \leqslant \sum_{i=1}^{F} S_i + a\sqrt{2\pi}\sum_{i=1}^{F} l_i\sqrt{S_i} + a^2F. \tag{11}$$

Первый член суммы равен площади синтезированного изображения: $\sum_{i=1}^{F} S_i = S_\Sigma$. Второй член суммы можно выразить через средний коэффициент формы граней в изображении:

$$\sum_{i=1}^{F} l_i\sqrt{S_i} = l_{\text{ср}}\sum_{i=1}^{F}\sqrt{S_i},$$

где $l_{\text{ср}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{F} l_i\sqrt{S_i}}{\sum_{i=1}^{F}\sqrt{S_i}}$.

Если учесть, что согласно неравенству Коши — Буняковского

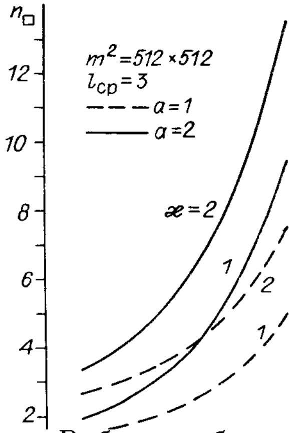
$$\sum_{i=1}^{F}\sqrt{S_i} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{F} S_i \sum_{i=1}^{F} 1} = \sqrt{S_\Sigma F},$$

то (10) и (11) можно переписать в виде

$$P_\circ \leqslant S_\Sigma + al_{\text{ср}}\sqrt{\pi S_\Sigma F} + \pi a^2F/4; \tag{12}$$

$$P_\square \leqslant S_\Sigma + al_{\text{ср}}\sqrt{2\pi S_\Sigma F} + a^2F. \tag{13}$$

Необходимо подчеркнуть, что получена верхняя оценка $P_\circ$ и $P_\square$. Предельные значения достигаются при равенстве площадей всех многоугольников в синтезированном изображении.



Среднее число граней, покрывающих апертуру фильтра. Пусть плоскость изображения содержит m^2 пикселов и относительная площадь синтезированного изображения $\varkappa = S_\Sigma/m^2$. При этом среднее число граней, приходящихся на один пиксел, не превышает для круглого и квадратного оснований фильтра соответственно:

$$n_{\bigcirc} = \varkappa + \frac{a}{m} l_{ср} \sqrt{\pi \varkappa F} + \frac{\pi a^2}{4m^2} F; \qquad (14)$$

$$n_{\square} = \varkappa + \frac{a}{m} l_{ср} \sqrt{2\pi \varkappa F} + \frac{a^2}{m^2} F. \qquad (15)$$

Таким образом, среднее число граней, по-

Выбрав необходимые параметры и вычислив значение n, нетрудно подсчитать, что фильтрующий алгоритм (2) потребует не более nm^2 операций типа $A + BC$.

Площадь синтезированного изображения $\varkappa$ может меняться в широких пределах: для визуальных сцен, составленных из приоритетных непрозрачных объектов, $\varkappa \leqslant 1$, для сцен с полупрозрачными объектами возможно значение $\varkappa > 1$.

Коэффициент формы для большинства визуальных сцен, синтезированных с помощью ССВО, описанных в [1], не превышает $l_{ср} = 3$.

Зависимость $n_{\square}$ для $m^2 = 512 \times 512$, $l_{ср} = 3$, $a = 1-2$, $\varkappa = 1-2$ и $1k \leqslant F \leqslant 64k$ показана на рис. 4.

В заключение следует отметить, что рассмотренная методика и полученные результаты, в частности, для квадратного основания фильтра пригодны также для оценки производительности алгоритмов, связанных с подделением плоскости изображения на квадратные окна, например, в алгоритме Варнока [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ковалев А. М., Талныкин Э. А.** Машинный синтез визуальной обстановки // Автометрия.— 1984.— № 4.
2. **Crow F. C.** The aliasing problem in computer-generated shaded images // CACM.— 1977.— N 11.
3. **Catmul E.** An analytic visible surface algorithm for independent pixel processing // Comput. Graph.— 1984.— 18, N 3.
4. **Сантало Л .А.** Введение в интегральную геометрию.— М.: Изд-во ипостр. лит., 1956.
5. **Ньюмен У., Спрулл Р.** Основы интерактивной машинной графики.— М.: Мир, 1976.

Поступила в редакцию 6 января 1988 г.