

$GqG^T$  фиктивного шума вносить в уравнения фильтра вместо характеристики  $\Gamma Q \Gamma^T$  реального шума при  $\delta \neq 0$ , а не только при  $\delta > 0$ . Так, вероятность ошибки второго рода становится меньше, поскольку вероятность попадания величины в точку  $\delta = 0$  значительно меньше, чем в полубесконечный интервал  $\delta \leq 0$ .

Б. Величина  $q$  (14) определяет ту поправку, которую надо добавить к расчетному значению  $Q_p$  в уравнениях (4) фильтра, чтобы установить в них правильное значение  $Q_p$ . Аналогично величина  $r$  (15) имеет смысл точной поправки к значению  $R_p$ . Этим объясняется целесообразность алгоритмов по алгоритмам Б.1, Б.2 следствия 2.

Когда заранее неизвестно, в которой из матриц ( $Q$  или  $R$ ) происходит возможное нарушение, то необходимо произвести правильный выбор коррекции: алгоритм Б.1 по типу выражения (14) или же алгоритм Б.2 по типу выражения (15). Основой выбора по таблице может служить то обстоятельство, что при одинаковых знаках  $\delta$  эти алгоритмы оказывают противоположное воздействие на коэффициент  $K_p$ : в случае поправки  $q > 0$  (при  $\delta > 0$ )  $K_p$  увеличивается, а в случае поправки  $r > 0$  (при  $\delta > 0$ )  $K_p$  уменьшается и наоборот при ином знаке  $\delta$ . Требуемое направление изменения  $K_p$  определяется по знаку градиента дисперсии ошибки фильтрации. Ввиду недоступности последней, а значит, и нереализуемости оценок указанного градиента для получения требуемой информации рекомендуется метод вспомогательного функционала качества [12].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления.— М.: Мир, 1973.
2. Каминский П. Г., Брайсон А. Е., Шмидт С. Ф. Обзор современных методов дискретной фильтрации, использующих квадратные корни матриц // Зарубеж. радиоэлектрон.— 1973.— № 6.
3. Jazwinski A. H. Adaptive filtering // Automatica.— 1969.— 5, N 4.— P. 475.
4. Jazwinski A. H. Stochastic processes and filtering theory.— N. Y.: Academic Press, 1971.
5. Kaufman H., Beaulier D. Adaptive parameter identification // IEEE Trans. Automat. Control.— 1972.— AC-17, N 5.— P. 729.
6. Fitzgerald R. T. Divergence of the Kalman filter // IEEE Trans. Automat. Control.— 1974.— AC-19, N 6.— P. 736.
7. Кузовков Н. Т., Карабанов С. В., Салычев О. С. Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации.— М.: Машиностроение, 1978.
8. Кузовков Н. Т., Салычев О. С. Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация.— М.: Машиностроение, 1982.
9. Mehra R. K. Approaches to adaptive filtering // IEEE Trans. Automat. Control.— 1972.— AC-17, N 5.— P. 693.
10. Семушин И. В. Контроль оптимальности адаптивного фильтра Калмана по реализации скалярного процесса // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1979.— № 6.
11. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление.— М.: Мир, 1973.
12. Семушин И. В. Адаптивные схемы идентификации и контроля при обработке случайных сигналов.— Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985.

Поступила в редакцию 16 января 1986 г.

УДК 681.513

Е. В. БОДЯНСКИЙ  
(Харьков)

#### АДАПТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Характерной особенностью современного состояния теории адаптивных систем является предположение, что оптимальные значения настраиваемых параметров либо постоянны, либо меняются достаточно

медленно. Вместе с тем большое число практических задач характеризуется существенной нестационарностью параметров объектов, что приводит к проблеме их оценивания в условиях дрейфа. Для успешного решения таких задач и построения эффективных процедур адаптации необходимо задать модель дрейфа, являющуюся средством придания алгоритмам оценивания специальных свойств, обеспечивающих их улучшенные динамические характеристики по компенсации существенной нестационарности объекта.

В [1—4] описаны различные модели дрейфов и соответствующие им алгоритмы адаптации, синтезированные при достаточно жестких априорных предположениях о характере нестационарности. Значительно более широкий класс нестационарных задач может быть рассмотрен с помощью моделей дрейфов, основывающихся на использовании переходных матриц [5] и первоначально предложенных для решения задач стохастической оптимизации [6, 7].

В настоящей статье рассматриваются адаптивные рекуррентные алгоритмы оценивания параметров нестационарных объектов для широкого класса дрейфов, описываемых с помощью переходных матриц, по измерительной информации, получаемой в натурном эксперименте, позволяющие выполнять расчеты в реальном масштабе времени в процессе проведения эксперимента.

Для описания линейных стохастических динамических и статических объектов применим уравнение псевдолинейной регрессии [8]

$$y_n = x_n^T c_n^* + \xi_n, \quad (1)$$

где  $y_n$  — значение выходного сигнала в  $n$ -й момент времени;  $x_n$  —  $p$ -мерный вектор входов;  $c_n^*$  —  $p$ -мерный вектор нестационарных коэффициентов, подлежащих определению, задаваемый моделью дрейфа [6]:

$$c_n^* = h\eta_n; \quad \eta_{n+1} = V\eta_n + b\xi_n. \quad (2)$$

Здесь  $h$ ,  $b$  и  $V$  — некоторые априорно заданные  $(p \times m)$ -,  $(m \times 1)$ -,  $(m \times m)$ -матрицы, определяющие структуру объекта и характер дрейфа, например, полиномиальный, полигармонический и т. д.;  $\eta_n$  —  $(m \times 1)$ -искомый вектор оптимальных настроек;  $\xi_n$  и  $\xi_n$  — независимые в совокупности случайные величины такие, что  $M\{\xi_n\} = 0$ ,  $M\{\xi_n^2\} = \sigma_\xi^2 < \infty$ ,  $M\{\xi_n \xi_k\} = M\{\xi_n \xi_k\} = 0$  при  $n \neq k$ ;  $M\{\xi_n \xi_n\} = 0$ ,  $M\{\xi_n\} = 0$ ,  $M\{\xi_n^2\} = \sigma_\xi^2 < \infty$  при каждом  $n$ ;  $M\{\cdot\}$  — символ математического ожидания.

Основное отличие применяемого подхода от рассмотренных в [1—4] состоит в том, что вектор  $\eta_n$  имеет размерность  $m$ , вообще говоря, не равную размерности  $p$  вектора  $c_n^*$ , что позволяет при  $p \leq m$  строить алгоритмы, обладающие, например, свойством астатизма порядка выше первого, т. е. отслеживающие произвольные полиномиальные дрейфы степени меньше порядка астатизма. Задаваясь различными моделями дрейфа (изменяя матрицы  $V$  и  $h$ ), можно построить алгоритмы, обладающие различными динамическими свойствами.

С учетом соотношений (1) и (2) перепишем уравнение объекта в виде

$$y_n = x_n^T h V \eta_{n-1} + x_n^T h b \xi_{n-1} + \xi_n$$

и поставим ему в соответствие уравнение настраиваемой модели

$$\hat{y}_n = x_n^T c_n = x_n^T h V \hat{\eta}_{n-1},$$

где  $\hat{\eta}_{n-1}$  —  $m$ -мерный вектор настраиваемых параметров.

Используя для настройки градиентную процедуру минимизации квадратичного критерия идентификации

$$\hat{\eta}_n = V \hat{\eta}_{n-1} + \Gamma_n (y_n - x_n^T h V \hat{\eta}_{n-1}) V^T h^T x_n, \quad (3)$$

запишем соотношение для ошибки оценивания в виде

$$\Theta_n = \eta_n - \hat{\eta}_n = (V - \Gamma_n V^T h^T x_n x_n^T h V) \Theta_{n-1} + (b - \Gamma_n V^T h^T x_n x_n^T h b) \zeta_{n-1} - \Gamma_n V^T h^T x_n \xi_n = A_n \Theta_{n-1} + B_n \zeta_{n-1} + C_n \xi_n,$$

где  $\Gamma_n$  — матричный коэффициент усиления алгоритма на  $n$ -й итерации. Асимптотическая сходимость алгоритма (3) обеспечивается, если все собственные числа матрицы  $A_n$  по модулю меньше единицы, т. е. при  $\xi_n = \zeta_{n-1} = 0$  с помощью алгоритма (3) можно точно восстановить детерминированный дрейф.

Рассмотрим вначале случай, когда в качестве коэффициента усиления используется некоторая скалярная величина  $\gamma_n$ , а  $\xi_n = \zeta_n = 0$ . Вводя в рассмотрение матрицу  $D_n = \Theta_n \Theta_n^T$  и решая с учетом очевидных соотношений  $D_{n-1} \tilde{x}_n = \tilde{x}_n (y_n - \hat{y}_n)$ ,  $\tilde{x}_n^T D_{n-1} \tilde{x}_n = (y_n - \hat{y}_n)^2$  относительно  $\gamma_n$  дифференциальное уравнение  $\partial \text{Tr} D_n / \partial \gamma_n = 0$ , можно получить оптимальный по быстродействию градиентный адаптивный алгоритм

$$\hat{\eta}_n = V \hat{\eta}_{n-1} + \frac{\tilde{x}_n^T V D_{n-1} \tilde{x}_n}{\|\tilde{x}_n\|^2 \tilde{x}_n^T D_{n-1} \tilde{x}_n} (y_n - \tilde{x}_n^T \hat{\eta}_{n-1}) \tilde{x}_n; \quad (4)$$

$$D_n = \left( V - \frac{\tilde{x}_n^T V D_{n-1} \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T}{\|\tilde{x}_n\|^2 \tilde{x}_n^T D_{n-1} \tilde{x}_n} \right) D_{n-1} \left( V - \frac{\tilde{x}_n^T V D_{n-1} \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T}{\|\tilde{x}_n\|^2 \tilde{x}_n^T D_{n-1} \tilde{x}_n} \right)^T,$$

где  $\tilde{x}_n = V^T h^T x_n$ ,  $D_0, \hat{\eta}_0$  — начальные условия.

Получаемые с помощью алгоритма (4) оценки могут быть улучшены, если известны дисперсии  $\sigma_\xi^2$  и  $\sigma_\zeta^2$ . Рассматривая аналогично предыдущему матрицу  $\Theta_n \Theta_n^T$  и производя усреднение по  $\xi_n$  и  $\zeta_n$  с учетом их свойств, имеем

$$M \{ \Theta_n \Theta_n^T \} = D_n = V D_{n-1} V^T - \gamma_n V D_{n-1} \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T - \gamma_n \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T D_{n-1} V^T + \gamma_n^2 \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T D_{n-1} \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T + \sigma_\xi^2 b b^T - \gamma_n b b^T h^T x_n x_n^T \sigma_\xi^2 - \gamma_n \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T h h^T \sigma_\xi^2 + \gamma_n^2 \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T h h^T h^T x_n x_n^T \sigma_\xi^2 + \gamma_n^2 \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T \sigma_\xi^2,$$

после чего, решив уравнение  $\partial \text{Tr} D_n / \partial \gamma_n = 0$  и подставив результат в (3), приходим к алгоритму

$$\hat{\eta}_n = V \hat{\eta}_{n-1} + \frac{(\tilde{x}_n^T V D_{n-1} \tilde{x}_n + \sigma_\xi^2 \|b\|^2 \tilde{x}_n^T h^T x_n) (y_n - \tilde{x}_n^T \hat{\eta}_{n-1}) \tilde{x}_n}{\tilde{x}_n^T D_{n-1} \tilde{x}_n \|\tilde{x}_n\|^2 + \sigma_\xi^2 \|b\|^2 (\tilde{x}_n^T h^T x_n)^2 + \sigma_\xi^2 \|\tilde{x}_n\|^2}. \quad (5)$$

Заметим, что при единичной матрице  $V$  и  $\sigma_\xi^2 = \sigma_\zeta^2 = 0$  алгоритм (5) совпадает с алгоритмом Качмажа, а при  $V = I$ ,  $\sigma_\xi^2 = 0$  — с алгоритмом, предложенным в [9].

В том случае, когда вместо скалярного параметра  $\gamma_n$  используется матричный коэффициент усиления  $\Gamma_n$ , уравнение для матрицы  $D_n$  приобретает вид

$$D_n = V D_{n-1} V^T - V D_{n-1} \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T \Gamma_n^T - \Gamma_n \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T D_{n-1} V^T + \tilde{x}_n D_{n-1} \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T \Gamma_n^T + \sigma_\xi^2 b b^T - \sigma_\xi^2 b b^T V^T \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T \Gamma_n^T - \sigma_\xi^2 \Gamma_n \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T V^T b b^T + \sigma_\xi^2 \Gamma_n \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T V^{-1} b b^T V^{-T} \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T \Gamma_n^T + \sigma_\xi^2 \Gamma_n \tilde{x}_n \tilde{x}_n^T \Gamma_n^T,$$

а алгоритм оценивания —

$$\hat{\eta}_n = V \hat{\eta}_{n-1} + \frac{(V D_{n-1} + \sigma_\xi^2 b b^T V^{-T}) (y_n - \tilde{x}_n^T \hat{\eta}_{n-1}) \tilde{x}_n}{\tilde{x}_n^T D_{n-1} \tilde{x}_n + \sigma_\xi^2 \tilde{x}_n^T V^{-1} b b^T V^{-T} \tilde{x}_n + \sigma_\xi^2}. \quad (6)$$

При  $V = I$ ,  $\sigma_\xi^2 = 0$  алгоритм (6) совпадает с рекуррентным методом наименьших квадратов, при  $\sigma_\xi^2 = 0$  — с алгоритмом, предложенным в [10],

а при  $\sigma_\xi^2 = \sigma_\zeta^2 = 0$  получаем

$$\hat{\eta}_n = V\hat{\eta}_{n-1} + \frac{VD_{n-1}}{\tilde{x}_n^T D_{n-1} \tilde{x}_n} (y_n - \tilde{x}_n^T \hat{\eta}_{n-1}) \tilde{x}_n. \quad (7)$$

Основным недостатком модели дрейфа (2) является условие  $m \geq p$ , ограничивающее ее использование для объектов высокой размерности. Кроме того, на процесс оценивания негативно влияют два источника ошибок, порождаемых начальными условиями  $D_0$  и  $\hat{\eta}_0$ . Для преодоления отмеченных затруднений введем несколько иную параметризацию дрейфа. При этом вектор  $\eta$  полагается наблюдаемым, а оценке подлежит  $(p \times m)$ -матрица  $h$ . Тогда

$$c_n^* = h\eta_n + b\zeta_n = hV\eta_{n-1} + b\zeta_n, \quad \eta_n = V\eta_{n-1}.$$

Эта модель описывает те же типы дрейфов, что и (2), однако характеризуется большим числом оцениваемых параметров, что является «платой» за расширение функциональных возможностей.

Объект при этом описывается соотношением

$$y_n = (h\eta_n + b\zeta_n)^T x_n + \xi_n,$$

а настраиваемая модель —

$$\hat{y}_n = (h_{n-1}\eta_n)^T x_n = x_n^T h_{n-1} V \eta_{n-1}.$$

Здесь  $h_n$  — настраиваемая  $(p \times m)$ -матрица на  $n$ -й итерации; вектор  $\eta_0$  задается для каждой конкретной переходной матрицы  $V$  [5].

Записывая алгоритм настройки матрицы  $h_n$  в виде

$$h_n = h_{n-1} + \gamma_n (y_n - x_n^T h_{n-1} \eta_n) x_n \eta_n^T, \quad (8)$$

вводя матрицу ошибок оценивания  $\Theta_n = h - h_n$  и решая аналогично предыдущему дифференциальное уравнение  $\partial M \{ \text{Tr} \Theta_n \Theta_n^T \} / \partial \gamma_n = \partial \text{Tr} D_n / \partial \gamma_n = 0$ , получаем оптимальное значение коэффициента усиления  $\gamma_n = (\|\eta_n\|^2 \|x_n\|^2)^{-1}$ , обеспечивающее алгоритму (9) сходимость в область, определяемую соотношением

$$M \{ (x_n^T \Theta_{n-1} \eta_n)^2 \} > \sigma_\xi^2 M \{ (x_n^T b)^2 \} + \sigma_\zeta^2$$

и совпадающую для стационарного случая с областью сходимости алгоритма Качмажа. Далее, полагая известными величины  $\sigma_\xi^2$  и  $\sigma_\zeta^2$  и производя аналогичные выкладки, получаем

$$\gamma_n = \frac{(x_n^T \Theta_{n-1} \eta_n)^2}{\|\eta_n\|^2 \|x_n\|^2 ((x_n^T \Theta_{n-1} \eta_n)^2 + (x_n^T b)^2 \sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2)}.$$

Поскольку в последнее выражение входит ненаблюдаемая матрица  $\Theta_{n-1}$ , для  $\gamma_n$  можно дать лишь оценку сверху. Учитывая очевидные соотношения

$$\gamma_n^{-1} = \|\eta_n\|^2 \|x_n\|^2 + \frac{\|\eta_n\|^2 \|x_n\|^2 ((x_n^T b)^2 \sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2)}{(x_n^T \Theta_{n-1} \eta_n)^2} \geq \|\eta_n\|^2 \|x_n\|^2 + \frac{(x_n^T b)^2 \sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2}{\|\Theta_{n-1}\|^2} \geq \geq \|\eta_n\|^2 \|x_n\|^2,$$

получаем

$$0 < \gamma_n \leq \frac{\text{Tr} D_{n-1}}{\text{Tr} D_{n-1} \|\eta_n\|^2 \|x_n\|^2 + (x_n^T b)^2 \sigma_\xi^2 + \sigma_\zeta^2} \leq \frac{1}{\|\eta_n\|^2 \|x_n\|^2},$$

где  $\|\Theta_{n-1}\|^2 = \text{Tr} M \{ \Theta_{n-1} \Theta_{n-1}^T \} = \text{Tr} D_{n-1}$  — квадрат сферической нормы матрицы  $\Theta_{n-1}$ .

По сравнению с известными методами оценивания параметров нестационарных объектов предложенная группа адаптивных алгоритмов (4)–(8) обладает более широкими функциональными возможностями, причем выбор конкретного алгоритма определяется уровнем априорной

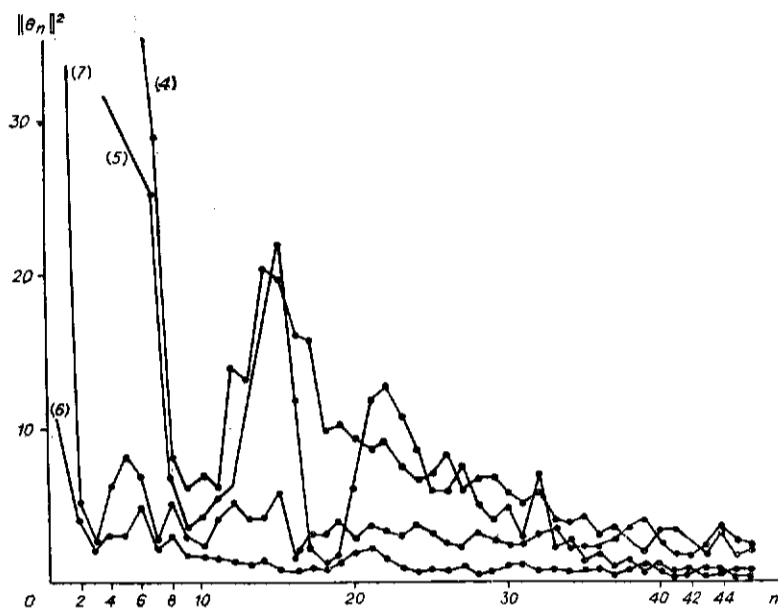


Рис. 1

информации о характере дрейфа и действующих помех. Вместе с тем в качестве частного случая может быть рассмотрен ряд известных процедур.

Рассмотренные алгоритмы могут быть использованы в задачах идентификации нестационарных стохастических процессов и объектов управления в системах автоматизированного управления технологическими процессами и натурными экспериментами.

**Результаты имитационного моделирования.** Пример 1. Исследовался процесс оценивания параметров нестационарного объекта с двумя независимыми входами  $x_1$  и  $x_2$  и дрейфом коэффициентов, описываемым полиномом второй степени. Условия эксперимента:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = 10, \quad \sigma_{\xi} = \sigma_{\zeta} = 1, \quad D_0 = \text{diag}(10^3, 10^3, 10^3), \\ \tilde{\eta}_0 = (10, 10, 10)^T, \quad \eta_0 = (1, 0, 0)^T, \quad b = (0, 1, 1)^T, \\ V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На рис. 1 приведен процесс изменения квадрата нормы ошибки оценивания  $\|\theta_n\|^2$ . (Усреднение по десяти реализациям.) Наилучшие результаты по точности и быстродействию получены с помощью алгоритма (6), несколько худшей точностью обладает алгоритм (7), обеспечивающий при этом высокую скорость сходимости. Алгоритм (5), проигрывая по скорости сходимости алгоритму (7), дает более высокую точность. Наихудшие результаты получены с помощью алгоритма (4).

Пример 2. Сравнивались результаты работы алгоритмов (4), (7), (8). Условия эксперимента:

$$\begin{aligned} \sigma_x = 1, \quad \sigma_{\xi} = \sigma_{\zeta} = 0, \quad 1, \\ V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$D_0 = \text{diag}(10^4, 10^4)$ ,  $\tilde{\eta}_0 = (1, 1)^T$ ,  $b = (1, 0)^T$  для алгоритмов (4), (7);

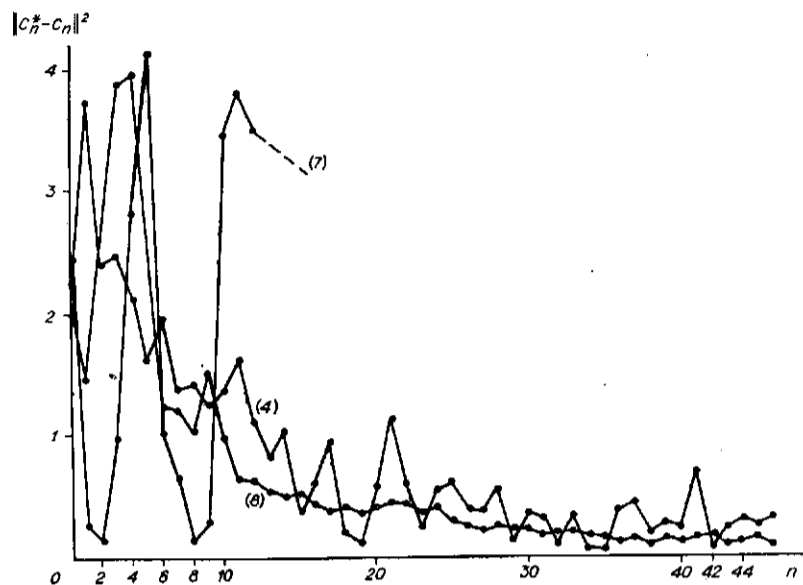


Рис. 2

$h_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ ,  $b = (1, 0, 1)^T$  для алгоритма (8). На рис. 2 проиллюстрирован процесс изменения усредненного по десяти реализациям квадрата нормы ошибки  $\|c_n^* - c_n\|^2$ . Видно, что алгоритм (8) обеспечивает более высокое качество процесса оценивания. Алгоритм (7) после 10–15 итераций прекращал работу из-за вырождения матрицы  $D_n$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин В. Е. Итеративные процедуры минимизации в условиях дрейфа экстремума // *Авт.*—1976.— № 11.
2. Anderson B. D. O., Johnstone R. M. Adaptive systems and time-varying plants // *Int. J. Contr.*—1983.— 37, N 2.— P. 367.
3. Xianyu X., Evans R. J. Discrete time adaptive control for time-varying systems // *IEEE Trans. Autom. Contr.*—1984.— AC-29, N 7.— P. 638.
4. Цыпкин Я. З., Каплинский Я. И., Ларионов К. А. Алгоритмы адаптации и обучения в нестационарных условиях // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.*—1970.— № 5.
5. Чуев Ю. В., Михайлов Ю. Б., Кузьмин В. И. Прогнозирование количественных характеристик процессов.— М.: Сов. радио, 1975.
6. Катковник В. Я., Хейсин В. Е. Итеративные алгоритмы оптимизации для отслеживания дрейфа экстремума // *Автоматика и вычисл. техника.*—1976.— № 6.
7. Катковник В. Я., Хейсин В. Е. Динамическая стохастическая аппроксимация полиномиальных дрейфов // *Авт.*—1979.— № 5.
8. Изерман Р. Цифровые системы управления.— М.: Мир, 1984.
9. Захаров М. Г., Кульчицкий О. Ю. Алгоритмы типа Качмажа для идентификации линейных объектов при наличии случайных шумов.— Л., 1981.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 4170—81.
10. Захаров М. Г., Цирюльников М. Л. Оптимизация параметров шага в алгоритмах адаптивного оценивания полиномиальных дрейфов // *Тез. докл. и сообщ. Всесоюз. конф. «Теория адаптивных систем и ее применение».*— М.; Л.: БИ, 1983.

Поступила в редакцию 28 февраля 1986 г.