8. **Василенко Г. Н., Тараторин А. М.** Восстановление изображений.— М.: Радио и связь, 1986.
9. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982.— Кн. 2.
10. **Обработка** изображений при помощи цифровых вычислительных машин.— М.: Мир, 1973.
11. **Frieden B. R.** Band-unlimited reconstruction of optical objects and spectra // JOSA.— 1967.— 57.— P. 1013.

Поступила в редакцию 3 августа 1987 г.

УДК 681.514.672

В. П. ПОЛОСЕНКО, И. В. СЕМУШИН
(Ульяновск)

О СВОЙСТВАХ НЕВЯЗКИ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДЛЯ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ СХОДИМОСТЬЮ ФИЛЬТРА

Постановка задачи. Рассмотрим линейную дискретную модель

$$x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma w_i, \quad x_i \in R^n, \quad i = 0, 1, \ldots; \tag{1}$$

$$z_i = Hx_i + v_i, \quad z_i \in R^m, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

считая, что $w_0, w_1, \ldots$ в уравнении (1) объекта и $v_1, v_2, \ldots$ в уравнении (2) измерений — независимые последовательности одинаково распределенных независимых векторов с нулевым средним значением и с ковариационными матрицами Q и R соответственно — и x_0 — случайный вектор, независимый от указанных последовательностей, со средним значением $\bar{x}_0$ и ограниченной ковариацией P_0. В этих предположениях при известных параметрах Φ, Γ, Q, H, R, $\bar{x}_0$ и P_0 линейные оптимальные оценки $x_{t|i}$, $z_{t|i}$ векторов x_t, z_t вычисляются как их проекции на гильбертово подпространство, натянутое на все доступные к моменту времени i измерения $(z_1, \ldots, z_i)$, в следующих уравнениях фильтра Калмана:

$$\begin{gathered} x_{i+1|i} = \Phi x_{i|i}, \quad i \geqslant 0; \\ x_{i|i} = x_{i|i-1} + K_i(z_i - Hx_{i|i-1}), \quad i \geqslant 1; \\ x_{t|i} = \Phi_{t-1}\Phi_{t-2}\ldots\Phi_i x_{i|i}; \\ z_{t|i} = H_t x_{t|i}, \quad t > i, \end{gathered} \tag{3}$$

где $x_{0|0}$ равно среднему значению $E[x_0] = \bar{x}_0$. Появляющаяся здесь матрица усиления K_i находится из уравнений

$$\begin{gathered} M_{i+1} = \Phi P_i \Phi^{\tau} + \Gamma Q \Gamma^{\tau}, \; i \geqslant 0; \\ K_i = M_i H^{\tau}(HM_iH^{\tau} + R)^{-1} = P_i H^{\tau} R^{-1}; \\ P_i = M_i - M_i H^{\tau}(HM_iH^{\tau} + R)^{-1} HM_i, \quad i \geqslant 1, \end{gathered} \tag{4}$$

где символ т обозначает транспонирование, при этом

$$\begin{gathered} M_{i+1} = E[(x_{i+1} - x_{i+1|i})(x_{i+1} - x_{i+1|i})^{\tau}]; \\ P_i = E[(x_i - x_{i|i})(x_i - x_{i|i})^{\tau}] \end{gathered} \tag{5}$$

— ковариации ошибок оптимального одношагового предсказания и соответственно фильтрации [1]. При переменных во времени матрицах Φ, Γ, Q, H, R к ним в уравнениях (1)—(4) добавляется индекс времени i (в двух последних уравнениях (3) эти индексы проставлены).

Известные трудности практического обеспечения сходимости оценок к оптимальным значениям (3) частично уменьшаются при представлении уравнений (4) в форме уравнений с квадратными корнями из матриц (5) [2]. Затруднения существенно возрастают при невозможности установить в (3), (4) точные значения параметров. В этих условиях одним из наиболее простых и надежных средств управления сходимостью оценок является прямое воздействие на матрицу K_i. Такой подход позволяет уменьшить ошибки, связанные с неточностями параметров в фильтре и с ошибками округления в ЭВМ. Являясь по существу эвристическим, он порождает различные алгоритмы [3—8].

Традиционные алгоритмы этого типа основаны на сближении («согласовании» [9]) фактического $C_\text{ф}$ и расчетного $C_\text{р}$ значений ковариации невязки

$$\nu_{i|i-1} = z_i - H\widehat{x}_{i|i-1} \tag{6}$$

при вычислении субоптимальной оценки $\widehat{x}_{i|i-1}$ в уравнениях типа (3), (4), когда в них хотя бы некоторые значения параметров не могут быть установлены точно. Сближение осуществляется путем внесения в фильтр так называемого фиктивного шума, когда $C_\text{ф} - C_\text{р} > 0$. Различия алгоритмов сводятся к способу определения зависимости дисперсии q фиктивного шума от рассогласования $C_\text{ф} - C_\text{р}$ и к виду добавочного слагаемого в первом уравнении (4). Слагаемое берется, например, в виде $GqG^\text{т}$, где G — заранее назначаемая матрица распределения фиктивного шума среди компонентов вектора состояния.

Уже отмечалось [10], что $C_\text{ф} = C_\text{р}$ не является необходимым или достаточным условием оптимальности фильтра. Рассмотрим подробнее свойства невязки (6) и покажем, что известные алгоритмы внесения фиктивного шума при $C_\text{ф} - C_\text{р} > 0$ ([3—8]), не учитывающие этих свойств, могут быть улучшены и в определенных условиях существуют более эффективные алгоритмы.

Свойства невязки и алгоритмы адаптации. В дальнейшем везде для фактических величин используем индекс «ф», а для расчетных — индекс «р». Обобщая алгоритмы [3—8], за функцию рассогласования примем скалярную величину

$$\delta_i = (1/m)\,\nu^\text{т}_{i|i-1} C_\text{р}^{-1} \nu_{i|i-1} - 1, \tag{7}$$

где $C_\text{р} = H_\text{р} M_\text{р} H^\text{т}_\text{р} + R_\text{р}$. Ее среднее значение

$$\delta = E[\delta_i] = (1/m)\,\mathrm{tr}\left[(D_\text{р}^{-1} D_\text{ф})(D_\text{р}^{-1} D_\text{ф})^\text{т}\right] - 1, \tag{8}$$

где $\mathrm{tr}[\cdot]$ — след матрицы $[\cdot]$; $D_\text{р}$ и $D_\text{ф}$ — квадратные корни [2] из матриц $C_\text{р}$ и соответственно $C_\text{ф} = E\left[\nu_{i|i-1}\nu^\text{т}_{i|i-1}\right]$, будем считать показателем качества. Доступно для оценки, например, выборочное среднее:

$$\widehat{\delta}_i = (1/i)\sum_{j=1}^{i} \delta_j = \widehat{\delta}_{i-1} + (\delta_i - \widehat{\delta}_{i-1})/i, \quad \widehat{\delta}_0 = 0 \tag{9}$$

(имеется в виду, что в оптимальном фильтре $C_\text{ф} = C_\text{р}$, $\delta = 0$). Выражение (8) обобщает на многомерный случай более простое выражение

$$\delta = C_\text{ф}/C_\text{р} - 1, \tag{10}$$

относящееся к частному случаю скалярных процессов. (Доказательства последующих утверждений см. в приложении.)

Теорема 1. Любые условия, основанные на соотношении фактической и расчетной величин ковариации невязки, не являются необходимыми или достаточными условиями оптимальности фильтра.

Следствие 1. При адаптации фильтра по любому выбранному критерию соотношения величин $C_\text{ф}$ и $C_\text{р}$, в частности по критерию $\delta \leqslant 0$, возможны ошибки двух родов: 1) ложная тревога = фильтр оптимален и адаптация производится, так как критерий нарушен; 2) пропуск = = фильтр неоптимален и адаптация не производится, так как критерий выполнен.

В доказательствах для получения аналитических результатов рассматриваем вариант одномерного фильтра (все процессы скалярные и

$\Gamma_ф = \Gamma_р = 1$, $H_ф = H_р = 1$) при неизвестных параметрах $Q_ф$, $R_ф$ и известном параметре Φ ($\Phi_ф = \Phi_р = \Phi$) в установившемся режиме (считается, что $|\Phi| < 1$). Уравнения

$$\widehat{x}_{i+1|i} = \Phi\widehat{x}_{i|i}, \quad \widehat{x}_{i|i} = \widehat{x}_{i|i-1} + K_р \nu_{i|i-1}, \quad \nu_{i|i-1} = z_i - \widehat{x}_{i|i-1} \qquad (11)$$

такого субоптимального фильтра получаем из (3) при произвольном (расчетном) усилении $K_р$.

Как известно (см. [11], с. 205), для (11) справедливо

$$M_ф = \Phi^2 P_ф + Q_ф, \quad P_ф = (1 - K_р)^2 M_ф + K_р^2 R_ф, \quad C_ф = M_ф + R_ф,$$
$$P_ф = R_ф \left[(1 - K_р)^2 \Theta_ф + K_р^2\right] \left[1 - (1 - K_р)^2 \Phi^2\right]^{-1}, \qquad (12)$$

При неизвестном параметре $\Theta_ф$, вместо оптимального значения $K_ф$, в фильтре установлено, возможно, иное (расчетное) значение $K_р$ усиления, удовлетворяющее, как и $K_ф$, уравнению

$$K_р^2 \Phi^2 + K_р (1 - \Phi^2 + \Theta_р) - \Theta_р = 0,$$

подобному (13), где $\Theta_р = Q_р / R_р$ — расчетная величина.

Теорема 2. Для фильтра (11) справедливы следующие утверждения:

а) при $R_ф = R_р$ и $Q_ф \neq Q_р$ (неопределенность только в дисперсии Q)

$$q \triangleq Q_ф - Q_р = \delta R_р (1 - \Phi^2 + 2\Phi^2 K_р + \Theta_р); \qquad (14)$$

б) при $Q_ф = Q_р$ и $R_ф \neq R_р$ (неопределенность только в дисперсии R)

$$r \triangleq R_ф - R_р = \delta R_р \frac{1 - \Phi^2 + 2\Phi^2 K_р + \Theta_р}{1 - \Phi^2 + 2\Phi^2 K_р}; \qquad (15)$$

в) в общем случае неопределенности Q или R

$$\Delta \triangleq \Theta_ф - \Theta_р = (1 - \Phi^2 + 2\Phi^2 K_р + \Theta_р)\left[\delta \frac{R_р}{R_ф} + \left(\frac{R_р}{R_ф} - 1\right)\right]. \qquad (16)$$

Следствие 2. Для управления сходимостью к оптимальному режиму фильтрации в зависимости от соотношения величин $C_ф$ и $C_р$ целесообразны следующие алгоритмы, в которых $a > 0$ — коэффициент пропорциональности, подбираемый практически по типу сомножителей при δ в выражениях (14), (15).

А. Модификация известных алгоритмов [3—8] — вносить фиктивный шум $GqG^т$ в первое уравнение (4) вместо слагаемого $\Gamma Q \Gamma^т$, вычисляя $q \geqslant 0$ в виде $q_i = a|\widehat{\delta}_i|$.

Б. Новые алгоритмы:

1) при неопределенности только Q вносить в первое уравнение (4) добавочное к расчетной величине $\Gamma Q \Gamma^т$ слагаемое $GqG^т$, вычисляя $q \gtreqless 0$ в виде $q_i = a\widehat{\delta}_i$;

2) при неопределенности только R вносить во вторoе и третье уравнения (4) добавочное к расчетной величине R слагаемое $GrG^т$, вычисляя $r \gtreqless 0$ в виде $r_i = a\widehat{\delta}_i$;

3) при неопределенности Q или R использовать дополнительную информацию о требуемом направлении изменения коэффициента усиления $K_р$ (см. таблицу).

Заключение. Выражения (14) и (15) определяют точные поправки к расчетным значениям $Q_р$ и соответственно $R_р$ для двух случаев неопределенности. Введение этих поправок не вносит каких-либо ошибок первого или второго рода при адаптации фильтра (11), т. е. является

Рекомендуемые алгоритмы адаптации для общего случая неопределенности Q или R

Требование	Наблюдаемое условие	
	$C_ф - C_р > 0$	$C_ф - C_р < 0$
Увеличить $K_р$	Алгоритм Б.1	Алгоритм Б.2
Уменьшить $K_р$	Алгоритм Б.2	Алгоритм Б.1

«идеальным», если пренебречь ошибками оценивания величины δ, например, по типу выражения (9). Это служит основанием, чтобы считать данные алгоритмы целесообразными и в то же время распространимыми на общий случай многомерных процессов, как это отмечено в следствии 2Б.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для удобства изложения сначала приведем доказательство теоремы 2, затем теоремы 1, следствий 1 и 2.

Доказательство теоремы 2. Для фильтра (11) имеем

$$C_ф = \Phi^2 P_ф + Q_ф + R_ф, \quad C_р = \Phi^2 P_р + Q_р + R_р, \tag{П1}$$

где $P_ф$ берется из (12) и $P_р = R_р K_р$. Прямыми вычислениями разности $C_ф - C_р$ находим

$$\Theta_ф - \Theta_р = (C_ф - C_р)\frac{1-D}{R_ф} + [\Theta_р(1-D)+F]\left(\frac{R_р}{R_ф} - 1\right),$$

здесь

$$D = \Phi^2(1-K_р)^2, \quad F = (1-D)(1+\Phi^2 K_р),$$

$$g = \Theta_р(1-D) + F = 1 - \Phi^2 + 2\Phi^2 K_р + \Theta_р = \Theta_р/K_р + \Phi^2 K_р > 0. \tag{П2}$$

Отсюда с учетом (10) и (П1) получим (16).

В частных случаях выражения (16) находим: при $R_ф = R_р$ выражение (14) и при $Q_ф = Q_р$ выражение (15). Менее очевидный вывод для (15), справедливый при $Q_ф = Q_р$, приведем полностью:

$$r \triangleq R_ф - R_р = R_р(\Theta_р - \Theta_ф)/\Theta_ф = -gR_р[\delta R_р/R_ф + (R_р/R_ф - 1)]/\Theta_ф =$$
$$= g(r - \delta R_р)/\Theta_р.$$

Решая это уравнение относительно r, получим (15).

Доказательство теоремы 1. Для определенности рассмотрим соотношение $C_ф - C_р \leqslant 0$, которое для случая (11) равносильно условию $\delta \leqslant 0$.

А. Условие не необходимо. Пусть $K_р = K_ф$, т. е. $\Theta_р = \Theta_ф$. Отсюда и из (16) с учетом (П2) имеем $\delta = R_ф/R_р - 1$, что не означает $\delta \leqslant 0$, так как остается свобода выбора величин $R_ф$ и $R_р$ для нарушения этого условия.

Б. Условие недостаточно. Пусть $\delta \leqslant 0$. Подстановка этого условия в (16) не приводит с неизбежностью к равенству $\Theta_ф = \Theta_р$, означающему оптимальность фильтра $K_ф = K_р$, т. е. возможно неравенство $K_ф \neq K_р$.

Поскольку утверждение теоремы 1 доказано для одномерного фильтра (11), то оно относится и к общему многомерному случаю.

Доказательство следствия 1. Пусть адаптация (внесение фиктивного шума в фильтр) производится при нарушении условия $\delta \leqslant 0$, принятого за критерий оптимальности. При таком правиле адаптации в ситуациях А и Б доказательства теоремы 1 соответственно возникают указанные ошибки первого и второго родов.

Доказательство следствия 2. А. Риск ошибки адаптации может быть уменьшен по сравнению с [3—8], если характеристику

$GqG^{\text{т}}$ фиктивного шума вносить в уравнения фильтра вместо характеристики $\Gamma Q \Gamma^{\text{т}}$ реального шума при $\delta \neq 0$, а не только при $\delta > 0$. Так, вероятность ошибки второго рода становится меньше, поскольку вероятность попадания величины в точку $\delta = 0$ значительно меньше, чем в полубесконечный интервал $\delta \leqslant 0$.

Б. Величина q (14) определяет ту поправку, которую надо добавить к расчетному значению $Q_{\text{р}}$ в уравнениях (4) фильтра, чтобы установить в них правильное значение $Q_{\text{ф}}$. Аналогично величина r (15) имеет смысл точной поправки к значению $R_{\text{р}}$. Этим объясняется целесообразность алгоритмов по алгоритмам Б.1, Б.2 следствия 2.

Когда заранее неизвестно, в которой из матриц (Q или R) происходит возможное нарушение, то необходимо произвести правильный выбор коррекции: алгоритм Б.1 по типу выражения (14) или же алгоритм Б.2 по типу выражения (15). Основой выбора по таблице может служить то обстоятельство, что при одинаковых знаках δ эти алгоритмы оказывают противоположное воздействие на коэффициент $K_{\text{р}}$: в случае поправки $q > 0$ (при $\delta > 0$) $K_{\text{р}}$ увеличивается, а в случае поправки $r > 0$ (при $\delta > 0$) $K_{\text{р}}$ уменьшается и наоборот при ином знаке δ. Требуемое направление изменения $K_{\text{р}}$ определяется по знаку градиента дисперсии ошибки фильтрации. Ввиду недоступности последней, а значит, и нереализуемости оценок указанного градиента для получения требуемой информации рекомендуется метод вспомогательного функционала качества [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Острем К.** Введение в стохастическую теорию управления.— М.: Мир, 1973.
2. **Каминский П. Г., Брайсон А. Е., Шмидт С. Ф.** Обзор современных методов дискретной фильтрации, использующих квадратные корни матриц // Зарубеж. радиоэлектрон.— 1973.— № 6.
3. **Jazwinski A. H.** Adaptive filtering // Automatica.— 1969.— 5, N 4.— P. 475.
4. **Jazwinski A. H.** Stochastic processes and filtering theory.— N. Y.: Academic Press, 1971.
5. **Kaufman H., Beaulier D.** Adaptive parameter identification // IEEE Trans. Automat. Control.— 1972.— **AC-17**, N 5.— P. 729.
6. **Fitzgerald R. T.** Divergence of the Kalman filter // IEEE Trans. Automat. Control.— 1971.— **AC-16**, N 6.— P. 736.
7. **Кузовков Н.Т., Карабанов С. В., Салычев О. С.** Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации.— М.: Машиностроение, 1978.
8. **Кузовков Н. Т., Салычев О. С.** Инерциальная навигация и оптимальная фильтрация.— М.: Машиностроение, 1982.
9. **Mehra R. K.** Approaches to adaptive filtering // IEEE Trans. Automat. Control.— 1972.— **AC-17**, N 5.— P. 693.
10. **Семушин И. В.** Контроль оптимальности адаптивного фильтра Калмана по реализации скалярного процесса // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1979.— № 6.
11. **Медич Дж.** Статистически оптимальные линейные оценки и управление.— М.: Мир, 1973.
12. **Семушин И. В.** Адаптивные схемы идентификации и контроля при обработке случайных сигналов.— Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985.

Поступила в редакцию 16 января 1986 г.

УДК 681.513

Е. В. БОДЯНСКИЙ

(Харьков)

АДАПТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Характерной особенностью современного состояния теории адаптивных систем является предположение, что оптимальные значения настраиваемых параметров либо постоянны, либо меняются достаточно