

Л. А. АЙЗЕНБЕРГ, Б. А. КРАВЦОВ
(Красноярск)

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ
ПО АНАЛИТИЧЕСКОМУ ПРОДОЛЖЕНИЮ СПЕКТРА ФУРЬЕ
ОДНОМЕРНЫХ ФИНИТНЫХ СИГНАЛОВ.
СВЕРХРАЗРЕШЕНИЕ

Ранее ([1, 2]) одним из авторов была получена простая формула для экстраполяции функций некоторого класса, аналитических в прозаведении полуплоскостей или полос. В частности, указывалось конструктивное аналитическое продолжение преобразования Фурье (спектра) функций класса L^2 с компактным носителем (финитных сигналов любой размерности). В случае одномерных сигналов $g(t)$ для спектра Фурье $f(x)$

$$f(x) = \int_a^b g(t) e^{-2\pi i x t} dt \quad (1)$$

справедлива следующая формула экстраполяции (в предположении, что $a \geq 0$):

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^m f(x_h) \frac{-2i\sigma}{x - x_h - 2i\sigma} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq h}}^m \frac{(x - x_j)(x_h - x_j - 2i\sigma)}{(x - x_j - 2i\sigma)(x_h - x_j)}, \quad (2)$$

где $\{x_h\}$ — ограниченная последовательность различных точек действительной оси частот, сходимость в (2) равномерна на компактах и, кроме того, в пространстве $L^2(-\infty, +\infty)$, т. е. сходимость в смысле средних квадратичных. В (2) есть параметр σ . Экстраполяция имеет место при $\sigma > 0$. Более точно, формула (2) справедлива для функций класса Харди $H^2(D_\sigma)$, где полуплоскость $D_\sigma = \{z: \text{Im } z < \sigma\}$, а класс Харди H^2 состоит

из аналитических в D_σ функций, удовлетворяющих условию $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^2 dx \leq C$ для всех $y > \sigma$. Если носитель одномерного сигнала $g(t)$ расположен на положительном луче, то его спектр $f(x)$ по теореме Винера — Паэли аналитически продолжается на всю комплексную плоскость и, кроме того, входит в $H^2(D_\sigma)$ для всякого $\sigma > 0$. Заметим, что в [1, 2] преобразование Фурье записывалось в другой, отличной от (1) форме, поэтому в (2) везде вместо $-2i\sigma$ стояло $2i\sigma$. При вычислительном эксперименте спектр записывается в виде (1), так как стандартные программы для вычисления преобразования Фурье на ЭВМ предполагают именно эту формулу. Кроме того, в [1, 2] есть обобщение формулы (2) на сигналы любой размерности, а также другие формулы экстраполяции. В данной статье взят простейший случай (формула (2)) и проведен вычислительный эксперимент на ЭВМ типа М4030.

Все вычисления делались с двойной точностью. Вначале берется простейшая функция $f(x) = 1/(x - 2 - 2i)$ из класса $H^2(D_\sigma)$ и точки x_h из отрезка $[0, 1]$. Для функций этого класса формула (2) верна в случаях $0 < \sigma \leq 2$. Оказалось, что при $\sigma = 0,5$, $m = 22$ функция $f(x)$ была аналитически продолжена с хорошей точностью (ошибка менее 0,1%) с отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[0, 30]$. Далее берется более сложная функция $f(x) = 10 \left(\frac{1-i}{x-2-i} + \frac{1+i}{x-4-i} \right)$, точки x_h — опять из $[0, 1]$. Программа оптимизации аналитического продолжения выдает оптимальные значения $m = 11$, $\sigma = 1,12$.

Результаты экстраполяции даны на рис. 1, а. Здесь и далее показана экстраполяция амплитуды функции (спектра), аналогичные рисунки

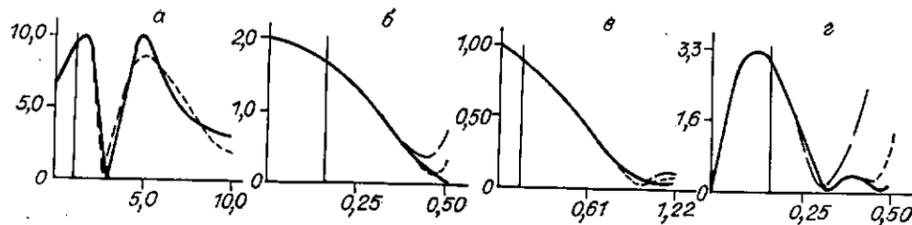


Рис. 1

можно было бы привести и для фазы. Вертикальной чертой на графике указан тот участок (начинающийся от нуля), на котором взяты точки x_k . Далее рассмотрим прямоугольный сигнал (результаты оптимизации $m=14$, $\sigma=0,59$), треугольный сигнал ($m=10$, $\sigma=0,42$), сигнал-кусочек синусоиды от 0 до 2π ($m=10$, $\sigma=0,23$). Экстраполяция спектров этих сигналов приведена на рис. 1, б — г соответственно. На тех же рисунках показана экстраполяция (естественно несколько худшая) тех же спектров при «среднеоптимальных» параметрах m и σ (одинаковых для всех трех спектров): $m=11$, $\sigma=0,41$.

Во всех указанных вычислениях значения $f(x_k)$ вводились в ЭВМ с двойной точностью. Если же их вводить с одинарной точностью, то полоса частот, на которую удается аналитически продолжить $f(x)$, уменьшается в 5—6 раз. Этот факт, а также то, что в реальных вычислениях m нельзя брать слишком большим, объясняется следующей особенностью формулы (2): при росте m или x слагаемые в (2) растут. Если $f(x_k)$ ввести в ЭВМ точно и все вычисления проделать с абсолютной точностью, то окажется, что чем больше m , тем на больший отрезок можно аналитически продолжить $f(x)$. Однако в реальных вычислениях на ЭВМ это невозможно, и неточность в $f(x_k)$ (а также неточность в подсчете значения дробей в (2)) приводит к тому, что слагаемые в (2) перестают друг друга гасить, и далее экстраполяция уже не получается.

Если при вводе значений $f(x_k)$ в ЭВМ точность удастся увеличить, то следует ожидать, что полоса возможной экстраполяции значительно возрастет.

Рассматриваемый метод аналитического продолжения спектра может применяться двумя принципиально разными способами: 1) спектр Фурье в x_k вычисляется на ЭВМ; 2) спектр Фурье в x_k сразу измеряется на физическом приборе. Данная статья посвящена только первому способу.

Обычно при вычислении спектра Фурье на ЭВМ непрерывное преобразование Фурье заменяют дискретным. В данном случае это нежелательно. Дело в том, что дискретное преобразование Фурье хотя и является аналитической функцией, но не входит в классы Харди $H^2(D_0)$. В частности, оно не интегрируемо с квадратом (не входит в класс $L^2(-\infty, +\infty)$). И если применять (2), то надо брать очень много точек сигнала $g(t)$, чтобы вычислить $f(x_k)$ с очень большой точностью и этим компенсировать указанный недостаток. И еще надо иметь в виду, что алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) сходится медленно ([3]).

Предполагается вычисление спектра Фурье иначе: ввиду дискретизации сигнала не применять дискретное преобразование Фурье, а заменять дискретный сигнал непрерывным ступенчатым или ломаным, т. е. сигнал будет или суммой прямоугольных сигналов, или ломаной линией. От каждого звена такого сигнала спектр можно задать точной формулой, а с помощью ЭВМ останется только сложить эти элементарные спектры. Такое сложение можно сделать, в частности, применив несколько раз БПФ. При не очень большом числе точек (так обычно и бывает на реальных физических приборах) это сложение не внесет существенной погрешности, поэтому $f(x_k)$ удастся ввести достаточно точно.

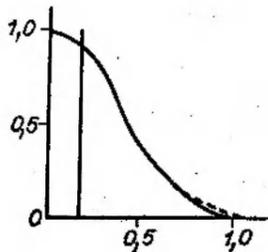


Рис. 2

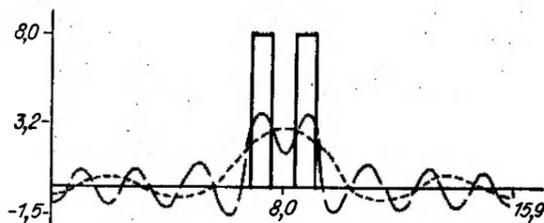


Рис. 3

Задача аналитического продолжения, которую решает формула (2), не является корректной, но условно устойчива (об этом понятии и вообще о некорректных задачах см. [4]).

Если точные значения $f(x_k)$ заменять точными же значениями другого спектра $\tilde{f}(x_k)$ так, чтобы соответствующие сигналы $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ мало отличались в смысле средних квадратичных, то и весь спектр $\tilde{f}(x)$ будет в силу равенства Персеваля мало (в смысле средних квадратичных) отличаться от спектра $f(x)$. Если просто заменять $f(x_k)$ какой-то зашумленной функцией $f(x_k) + n_k$, то ошибка при экстраполяции может стать очень большой.

На рис. 2 показана экстраполяция спектра треугольного сигнала, который заменяется спектром суммы девяти прямоугольных сигналов ($m = 12$, $\sigma = 0,44$).

В заключение проведем вычислительный эксперимент на сверхразрешимость. Возьмем два прямоугольных сигнала, на их суммарном спектре «отрежем» частоты, начиная с 0,25 (т. е. предположим, что имеет место идеальное дифракционное ограничение — прямоугольное окно). Затем (моделируя плохую разрешимость прибора из-за узкой полосы пропускания частот) сделаем обратное преобразование Фурье и покажем, что в этом случае два прямоугольных сигнала сливаются в один (разрешения нет). После этого полоса частот с помощью формулы (2) расширится в 2 раза до 0,50, а затем вновь производится обратное преобразование Фурье, в результате чего разрешение появляется (рис. 3).

Для решения задачи аналитического продолжения спектра Д. Слэпэн предложил метод разложения в ряд по системе функций с двойной ортогональностью так называемых «волновых вытянутых сфероидальных функций» (см. [5—9]). Однако реального применения этот метод не получил, по-видимому, из-за того, что он сложен и при его применении очень трудно (несмотря на использование мощных ЭВМ) справиться с некорректностью задачи (см. [10]). Был проведен лишь вычислительный эксперимент на сверхразрешение (см. [11]), но «разрешались» не два реальных сигнала (как выше), а две δ -функции.

Формула (2) дает более простое решение задачи аналитического продолжения спектра, что позволяет надеяться на успешное применение метода.

Особенно простой вид формула (2) принимает в случае, когда точки x_k берутся с постоянным шагом Δ . В частности, при экстраполяции на один отсчет получаем приближенную формулу

$$f((m+n)\Delta) \approx \sum_{j=1}^m a_j f((m+n-j)\Delta), \quad (3)$$

где считаем $x_1 = 0$, а

$$a_{m-k} = \frac{\rho}{k-m+\rho} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{m-1} \frac{j(j-k-m) + km + \rho(j-m)}{j(j-k-m) + km + \rho(j-k)}, \quad \rho = \frac{2\pi t}{\Delta}.$$

Разностное соотношение (3) можно использовать для экстраполяции на 1 отсчет ($n=0$), а затем повторять всю процедуру снова ($n=1$) и т. д.

При этом нет необходимости вычислять коэффициенты a_j для каждой точки экстраполяции, время работы программы (и так небольшое) сильно сокращается, а алгоритм экстраполяции по формуле (3) легко реализовать аппаратно. При вычислительном эксперименте на тех же спектрах, что и выше, было отмечено, что способ, заданный формулой (3), несколько уступает в «дальности» экстраполяции непосредственному применению (2). Объясняется ухудшение при итерациях, по-видимому, некорректностью задачи аналитического продолжения. Однако (3) можно использовать иначе. Проводя экстраполяцию методами (2) и (3) в случае, когда ответ неизвестен, можно сравнивать (2) и (3) и, пока различие небольшое, считать, что получается хорошая экстраполяция. В частности, рассматривалась величина

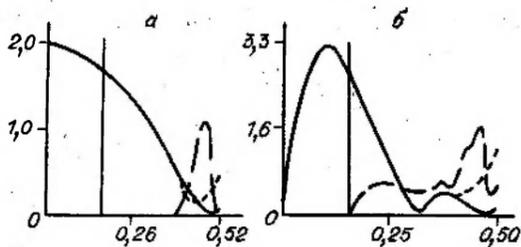


Рис. 4

и сравнивалась с отличием экстраполяции спектров прямоугольного сигнала и отрезка синусоиды по формуле (2) от точных спектров (рис. 4, а, б, где величина (4) дана в увеличенном масштабе). Там, где начиналось существенное отличие экстраполяции от точного спектра, величина (4) начинает расти. Этот факт позволяет подбирать оптимальные m и σ при отсутствии точной формулы спектра. Подбор следует проводить так, чтобы величина (4) не увеличивалась как можно дальше от того отрезка, с которого происходит экстраполяция.

$$\left| f((m+n)\Delta) - \sum_{j=1}^m a_j f((m+n-j)\Delta) \right|, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

И метод Д. Слениана, и метод, задаваемый формулой (2) (или (3)), являются аналитическим продолжением в его чистом виде. Ряд методов (в том числе нелинейные) направлен на регуляризацию данной задачи, что, естественно, ограничивает возможность экстраполяции спектра (см. [8]).

Для применения рассматриваемого метода в физике или технике желательно взять случай, когда передаточная функция (спектр Фурье аппаратной функции) известна точно (и такие ситуации бывают, см. [8]) или с очень хорошей точностью. Тогда можно надеяться, что действительно удастся расширить полосу частот, которую «видит» данный прибор.

В заключение авторы выражают благодарность сотрудникам ВЦ Института физики СО АН СССР за помощь, а также К. С. Александрову и В. А. Игнатченко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенберг Л. А. Экстраполяция функций, голоморфных в произведении полуплоскостей или полос. Аналитическое продолжение спектра.— Красноярск, 1986.— (Препр./ИФ СО АН СССР; 28М).
2. Айзенберг Л. А. Экстраполяция функций, голоморфных в произведении полуплоскостей или полос. Аналитическое продолжение спектра // ДАН СССР.— 1986.— 290, № 2.
3. Компьютеры в оптических исследованиях.— М.: Мир, 1983.
4. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шпшатский В. П. Некорректные задачи математической физики и анализа.— М.: Наука, 1980.
5. Slepian D. Prolate spheroidal wave function, Fourier analysis and uncertainty // Bell. Syst. Techn. J.— 1964.— 43, N 6.— P. 3009.
6. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике.— М.: Сов. радио, 1971.
7. Хурин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике.— М.: Наука, 1971.

8. Василенко Г. Н., Тараторин А. М. Восстановление изображений.— М.: Радио и связь, 1986.
9. Прэтт У. Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982.— Кн. 2.
10. Обработка изображений при помощи цифровых вычислительных машин.— М.: Мир, 1973.
11. Frieden B. R. Band-unlimited reconstruction of optical objects and spectra // JOSA.— 1967.— 57.— P. 1013.

Поступила в редакцию 3 августа 1987 г.

УДК 681.514.672

В. П. ПОЛОСЕНКО, И. В. СЕМУШИН

(Ульяновск)

О СВОЙСТВАХ НЕВЯЗКИ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДЛЯ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ СХОДИМОСТЬЮ ФИЛЬТРА

Постановка задачи. Рассмотрим линейную дискретную модель

$$x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma w_i, \quad x_i \in R^n, \quad i = 0, 1, \dots; \quad (1)$$

$$z_i = H x_i + v_i, \quad z_i \in R^m, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

считая, что w_0, w_1, \dots в уравнении (1) объекта и v_1, v_2, \dots в уравнении (2) измерений — независимые последовательности одинаково распределенных независимых векторов с нулевым средним значением и с ковариационными матрицами Q и R соответственно — и x_0 — случайный вектор, независимый от указанных последовательностей, со средним значением \bar{x}_0 и ограниченной ковариацией P_0 . В этих предположениях при известных параметрах $\Phi, \Gamma, Q, H, R, \bar{x}_0$ и P_0 линейные оптимальные оценки $x_{i|i}, z_{i|i}$ векторов x_i, z_i вычисляются как их проекции на гильбертово подпространство, натянутое на все доступные к моменту времени i измерения (z_1, \dots, z_i) , в следующих уравнениях фильтра Калмана:

$$x_{i+1|i} = \Phi x_{i|i}, \quad i \geq 0;$$

$$x_{i|i} = x_{i|i-1} + K_i(z_i - H x_{i|i-1}), \quad i \geq 1; \quad (3)$$

$$x_{i|i} = \Phi_{i-1} \Phi_{i-2} \dots \Phi_i x_{i|i};$$

$$z_{i|i} = H_i x_{i|i}, \quad i > i,$$

где $x_{0|0}$ равно среднему значению $E[x_0] = \bar{x}_0$. Появляющаяся здесь матрица усиления K_i находится из уравнений

$$M_{i+1} = \Phi P_i \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T, \quad i \geq 0;$$

$$K_i = M_i H^T (H M_i H^T + R)^{-1} = P_i H^T R^{-1}; \quad (4)$$

$$P_i = M_i - M_i H^T (H M_i H^T + R)^{-1} H M_i, \quad i \geq 1,$$

где символ t обозначает транспонирование, при этом

$$M_{i+1} = E[(x_{i+1} - x_{i+1|i})(x_{i+1} - x_{i+1|i})^T]; \quad (5)$$

$$P_i = E[(x_i - x_{i|i})(x_i - x_{i|i})^T]$$

— ковариации ошибок оптимального одношагового предсказания и соответственно фильтрации [4]. При переменных во времени матрицах Φ, Γ, Q, H, R к ним в уравнениях (1)–(4) добавляется индекс времени i (в двух последних уравнениях (3) эти индексы проставлены).

Известные трудности практического обеспечения сходимости оценок к оптимальным значениям (3) частично уменьшаются при представлении уравнений (4) в форме уравнений с квадратными корнями из мат-