

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Конончук Л. П. Об оценке спектра однородного случайного поля // Теория вероятностей и математическая статистика.— Киев: Вища шк., 1970.— Вып. 3.
2. Кнопов П. С. Об оценке спектральной плотности однородного случайного поля // Кибернетика.— 1972.— № 2.
3. Бенкус Р., Руткаускас В. Об асимптотике первых двух моментов спектральных оценок второго порядка // Литовский мат. сб.— 1973.— 13, № 1.
4. Алексеев В. Г. Эмпирический спектральный анализ гауссовских однородных случайных полей // ППИ.— 1973.— 9, № 2.
5. Ripley B. D. Spatial Statistics.— New York — Chichester — Brisbane — Toronto: John Wiley, 1981.
6. Rosenblatt M. Stationary Sequences and Random Fields.— Boston — Basel — Stuttgart: Birkhäuser, 1985.
7. Alekseev V. G. On the use of alternating kernels in nonparametric statistical estimation // Lecture Notes in Mathematics.— Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo: Springer — Verlag, 1983.— V. 1021.
8. Степанец А. И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.—

УДК 535.317.1

И. П. ТРОИЦКИЙ, М. С. УМАНСКИЙ  
(Москва)

#### РАСПОЗНАВАНИЕ ПРОЕКЦИОННЫХ ДАННЫХ, ПОЛУЧЕННЫХ В ТОМОГРАФИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ, ПРИ НАЛИЧИИ СВОБОДНОЙ АЛЬТЕРНАТИВЫ

**Постановка задачи.** Анализ результатов томографического эксперимента часто начинается с установления факта о соответствии внутренней структуры анализируемого объекта некоторой структуре заранее известного вида. Так, например, ставится задача дефектоскопии изделия, повторной диспансеризации пациента и т. п. Очевидно, что в такой постановке задача анализа томограмм может быть легко автоматизирована. Для обеспечения оптимальной автоматизации за основу должен быть принят соответствующий алгоритм распознавания. В теории статистических решений рассматриваемая ситуация характеризуется двальтернативной гипотезой со свободной альтернативой. Первая гипотеза — анализируемое сечение — описывается данной функцией  $f_0(x, y)$ , вторая — какой-то произвольной неизвестной функцией  $f(x, y)$ . Задача состоит в том, чтобы по зарегистрированным проекционным данным  $R_u(s, \varphi)$  принять решение в пользу первой или второй гипотезы.

Цель настоящей статьи — исследовать известный алгоритм теории статистических решений применительно к сформулированной задаче и оценить его эффективность с учетом специфических особенностей проекционных данных.

**Общая структура алгоритма распознавания.** Один из способов решения задачи распознавания двальтернативной гипотезы с одной свободной альтернативой состоит в следующем: пусть первая гипотеза описывается некоторым набором признаков  $C_p^0 (p = 0, 1, \dots, M_0)$ . Реально измеряемые значения этих признаков  $\tilde{C}_p^0$  отличаются от значений  $C_p^0$  в силу наличия различных случайных факторов и описываются плотностью вероятности  $\Phi[\tilde{C}_1^0, \dots, \tilde{C}_{M_0}^0 / f_0(x, y)]$ . Решение принимается

в пользу первой гипотезы, если для полученных значений  $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_{M_0}$  выполняется неравенство [1]

$$\Phi[\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_{M_0} | f_0(x, y)] \geq G. \quad (1)$$

со значениями  $C_p^0$ , неравенство (1) эквивалентно [1]:

$$z = \sum_{p=1}^{M_0} \sum_{q=1}^{M_0} b_{pq} (\bar{C}_p - C_p^0) (\bar{C}_q - C_q^0) \leq G_0, \quad (2)$$

где  $b_{pq}$  — элементы матрицы  $B$ , обратной корреляционной матрице  $K$  признаков  $\bar{C}_p$ . Вероятность  $P_0$  задается равенством [1]

$$P_0 = \int_0^{G_0} \chi_{M_0}^2(z) dz, \quad (3)$$

здесь  $\chi_{M_0}^2(z)$  есть  $\chi^2$ -распределение с  $M_0$  степенями свободы. Если первая гипотеза не верна и значения признаков описываются не величинами  $C_p^0$ , а некоторыми другими признаками  $C_p$ , то величина  $z$  распределена по нецентральному закону  $\chi^2$  с  $M_0$  степенями свободы и параметром нецентральности  $\lambda^2$ , равным [1]

$$\lambda^2 = \sum_{p=1}^{M_0} \sum_{q=1}^{M_0} b_{pq} (\bar{C}_p - C_p^0) (\bar{C}_q - C_q^0), \quad (4)$$

где  $\bar{C}_p$  — средние значения  $\bar{C}_p$  при конкурирующей гипотезе. При этом вероятность  $P$  правильного отклонения первой гипотезы

$$P = \int_{G_0}^{\infty} \chi_{\lambda^2, M_0}^2(z) dz. \quad (5)$$

**Алгоритмы распознавания для проекционных данных.** Рассмотрим случай, когда в качестве признаков  $C_p$  выбираются коэффициенты разложения проекционных данных в ортогональные ряды [2]. Пусть разложение проводится по полиномам Чебышева, тогда признаки задаются двумя индексами  $m, n$  и вычисляются согласно равенству

$$C_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 R(s, \varphi) U_m(s) e^{-in\varphi} ds d\varphi, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (6)$$

$$n = -m, -m+1, \dots, m,$$

где  $U_m(s)$  — полиномы Чебышева второго рода порядка  $m$ . Обозначим через  $C_{mn}^r$  и  $C_{mn}^i$  соответственно действительные и мнимые части коэффициентов  $C_{mn}$ , т. е.  $C_{mn}^r = \text{Re}(C_{mn})$ ,  $C_{mn}^i = \text{Im}(C_{mn})$ .

В силу равенства  $C_{m,-n} = C_{mn}^*$ , вытекающего из (6), где  $C_{mn}^*$  — величина, комплексно сопряженная  $C_{mn}$ , с информационной точки зрения представляют интерес только те признаки  $C_{mn}^r$  и  $C_{mn}^i$ , для которых индекс  $n \geq 0$ .

Обозначим через  $M^r$  количество признаков  $C_{mn}^r$ , а через  $M^i$  количество  $C_{mn}^i$  ( $M_0 = M^r + M^i$ ).

Как и в [3], будем рассматривать случай аддитивного нормального шума со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \overline{n(s\varphi)} &= 0, \\ \overline{n(s_1\varphi_1)n(s_2\varphi_2)} &= N_0\delta(s_1 - s_2)\delta(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда измеренные коэффициенты  $\widehat{C}_{mn}$  равны

$$\widehat{C}_{mn} = C_{mn} + \widetilde{C}_{mn}, \quad (8)$$

$$\text{где} \quad \widetilde{C}_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 n(s, \varphi) U_m(s) e^{-in\varphi} ds d\varphi. \quad (9)$$

Поскольку функция  $n(s\varphi)$  нормальна, то, как следует из формул (6), (8), (9), коэффициенты  $\widehat{C}_{mn}$  будут также распределены по нормальному закону. Поэтому алгоритм распознавания может формулироваться на основе неравенства (2). Для конкретизации этого неравенства следует найти  $\overline{C}_p$  и элементы матрицы  $B$ , обратной корреляционной. С учетом (7)–(9) имеем

$$\overline{C}_{mn}^r = \text{Re}(\overline{C}_{mn}) = \text{Re}(C_{mn});$$

$$\overline{C}_{mn}^i = \text{Im}(\overline{C}_{mn}) = \text{Im}(C_{mn});$$

$$K_{m_1 n_1 m_2 n_2}^r = \overline{(\widehat{C}_{m_1 n_1}^r - \overline{C}_{m_1 n_1}^r)(\widehat{C}_{m_2 n_2}^r - \overline{C}_{m_2 n_2}^r)} = \frac{1}{2} \text{Re}(\overline{\widetilde{C}_{m_1 n_1}^r \widetilde{C}_{m_2 n_2}^{*r}} + \overline{\widetilde{C}_{m_1 n_1}^r \widetilde{C}_{m_2 n_2}^r}); \quad (10)$$

$$K_{m_1 n_1 m_2 n_2}^i = \overline{(\widehat{C}_{m_1 n_1}^i - \overline{C}_{m_1 n_1}^i)(\widehat{C}_{m_2 n_2}^i - \overline{C}_{m_2 n_2}^i)} = \frac{1}{2} \text{Re}(\overline{\widetilde{C}_{m_1 n_1}^i \widetilde{C}_{m_2 n_2}^{*i}} - \overline{\widetilde{C}_{m_1 n_1}^i \widetilde{C}_{m_2 n_2}^i}); \quad (11)$$

$$K_{m_1 n_1 m_2 n_2}^{ri} = \overline{(\widehat{C}_{m_1 n_1}^r - \overline{C}_{m_1 n_1}^r)(\widehat{C}_{m_2 n_2}^i - \overline{C}_{m_2 n_2}^i)} = -\frac{1}{2} \text{Im}(\overline{\widetilde{C}_{m_1 n_1}^r \widetilde{C}_{m_2 n_2}^{*i}} - \overline{\widetilde{C}_{m_1 n_1}^r \widetilde{C}_{m_2 n_2}^i}). \quad (12)$$

Перемножая (9) и усредняя, получаем для  $n > 0$

$$\begin{aligned} \overline{\widetilde{C}_{m_1 n_1} \widetilde{C}_{m_2 n_2}} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(n_1\varphi_1 + n_2\varphi_2)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \overline{n(s_1\varphi_1)n(s_2\varphi_2)} U_{m_1}(s_1) \times \\ &\times U_{m_2}(s_2) ds_1 ds_2 d\varphi_1 d\varphi_2 = \frac{N_0}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} e^{-i(n_1 + n_2)\varphi} \int_{-1}^1 U_{m_1}(s) U_{m_2}(s) ds d\varphi = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \overline{\widetilde{C}_{m_1 n_1} \widetilde{C}_{m_2 n_2}^*} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(n_1\varphi_1 - n_2\varphi_2)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \overline{n(s_1\varphi_1)n(s_2\varphi_2)} U_{m_1}(s_1) \times \\ &\times U_{m_2}(s_2) ds_1 ds_2 d\varphi_1 d\varphi_2 = \frac{N_0}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} e^{-i(n_1 - n_2)\varphi} \int_{-1}^1 U_{m_1}(s) U_{m_2}(s) ds d\varphi = \\ &= \begin{cases} 0, & n_1 \neq n_2; \\ \frac{N_0}{2\pi} \int_{-1}^1 U_{m_1}(s) U_{m_2}(s) ds. & \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Определим отношение сигнал/шум как  $q = D/N_0$  [3], где  $D =$

$= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 R^2(s, \varphi) ds d\varphi$ . Тогда с учетом (10), (11), (13), (14) при  $n_1 = n_2 = n$  получаем

$$K_{m_1 n m_2 n}^r = K_{m_1 n m_2 n}^i = K_{m_1 n m_2 n} = \frac{D}{2\pi q} \sum_{k=\frac{|m_1 - m_2|}{2} + 1}^{\frac{m_1 + m_2}{2} + 1} \frac{1}{2k - 1}. \quad (15)$$

Как следует из равенств (13), (14), второе слагаемое в правой части (12) равно нулю, а первое — величина действительная, поэтому

$$K_{m_1 n_1 m_2 n_2}^{r,i} = 0. \quad (16)$$

Равенство (16) свидетельствует о статистической независимости величин  $\bar{C}_{m_1 n_1}^r$  и  $\bar{C}_{m_2 n_2}^i$ , какой бы функцией ни описывалось исследуемое сечение. Из (15) следует, что действительные и мнимые части величин  $\bar{C}_{m_1 n_1}^r$  и  $\bar{C}_{m_2 n_2}^i$  имеют одинаковые коэффициенты корреляции.

Так как при распознавании ограничиваются конечным числом коэффициентов, то их можно перенумеровать так, чтобы они зависели только от одного индекса ( $C_{mn}^r \rightarrow C_p^r, C_{mn}^i \rightarrow C_p^i$ ). Это позволяет упростить нахождение матрицы  $B$ , обратной корреляционной. Наибольшее упрощение достигается, если перенумеровка обеспечит блочно-диагональный вид корреляционной матрицы соответствующих новых коэффициентов. Такая перенумерация задается соотношением

$$p = \frac{n}{2} \left( M + 1 - \frac{n}{2} \right) + 1 + \frac{m}{2} + \frac{(-1)^M [1 - (-1)^n]}{8}. \quad (17)$$

Выражение (17) следует понимать так: коэффициенту  $C_{mn}$ , имеющему индексы  $m$  и  $n$  ( $m = 0, 1, \dots, M; n = 0, 1, \dots, N$ ), присваивается индекс  $p$ , который вычисляется по формуле (17). При этом перенумерации подвергаются лишь те признаки, у которых индекс  $n \geq 0$ . Их число  $M_0$  равно

$$M_0 = M^r + M^i = N \left( M + 1 - \frac{N}{2} \right) + \frac{3}{4} + \frac{M}{2} + \frac{(-1)^{M+N}}{4}; \quad (18)$$

$$M^r = \frac{N}{2} \left( M + 1 - \frac{N}{2} \right) + \frac{M}{2} + \frac{3}{4} + \frac{(-1)^M [1 + (-1)^N]}{8}; \quad (19)$$

$$M^i = \frac{N}{2} \left( M + 1 - \frac{N}{2} \right) + \frac{(-1)^M [(-1)^N - 1]}{8}. \quad (20)$$

При такой нумерации матрица  $K$  для действительных частей коэффициентов будет иметь размерность  $M^r \times M^r$  и состоять из  $N + 1$ -го блока. Матрица  $K$  для мнимых частей  $C_p^i$  коэффициентов включает  $N$  блоков. Она получается из предыдущей матрицы вычеркиванием первого блока. Матрица  $B$  также блочно-диагональная, и для используемой модели шума ее элементы не зависят от вида проекции, так что с учетом (15) они могут быть вычислены заранее. Ниже приведен первый блок матрицы  $B' = B(2q\pi/D)$  для  $M = 14$  ( $b_{ij} = b_{ji}$ ):  $b_{11} = 1,08$ ;  $b_{12} = -0,22$ ;  $b_{13} = -0,031$ ;  $b_{14} = -0,01$ ;  $b_{15} = -0,005$ ;  $b_{16} = -0,003$ ;  $b_{17} = -0,002$ ;  $b_{18} = -0,002$ ;  $b_{22} = 0,834$ ;  $b_{23} = -0,257$ ;  $b_{24} = -0,046$ ;  $b_{25} = -0,018$ ;  $b_{26} = -0,001$ ;  $b_{27} = -0,006$ ;  $b_{28} = -0,006$ ;  $b_{33} = 0,8185$ ;  $b_{34} = -0,264$ ;  $b_{35} = -0,05$ ;  $b_{36} = -0,021$ ;  $b_{37} = -0,012$ ;  $b_{38} = -0,011$ ;  $b_{44} = 0,814$ ;  $b_{45} = -0,268$ ;  $b_{46} = -0,053$ ;  $b_{47} = -0,023$ ;  $b_{48} = -0,019$ ;  $b_{55} = 0,812$ ;  $b_{56} = -0,27$ ;  $b_{57} = -0,056$ ;  $b_{58} = -0,034$ ;  $b_{66} = 0,809$ ;  $b_{67} = -0,275$ ;  $b_{68} = -0,074$ ;  $b_{77} = 0,8$ ;  $b_{78} = -0,31$ ;  $b_{88} = 0,648$ .

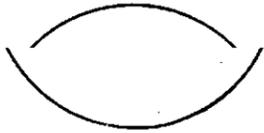


Рис. 1. Распознаваемое сечение  $f_0(x, y)$

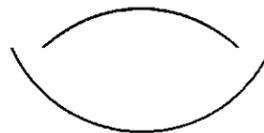


Рис. 2. Альтернативное сечение  $f(x, y)$

В новых обозначениях формулы (2), (4) принимают вид

$$z = \sum_{p=1}^{M^r} \sum_{s=1}^{M^r} b_{ps} (\bar{c}_p^r - c_p^{r_0}) (\bar{c}_s^r - c_s^{r_0}) + \sum_{p=d+1}^{M^r} \sum_{s=d+1}^{M^r} b_{ps} (\bar{c}_p^i - c_p^{i_0}) (\bar{c}_s^i - c_s^{i_0}) \leq G_0; \quad (21)$$

$$\lambda^2 = \sum_{p=1}^{M^r} \sum_{s=1}^{M^r} b_{ps} (c_p^r - c_p^{r_0}) (c_s^r - c_s^{r_0}) + \sum_{p=d+1}^{M^r} \sum_{s=d+1}^{M^r} b_{ps} (c_p^i - c_p^{i_0}) (c_s^i - c_s^{i_0}), \quad (22)$$

где  $d = \frac{M}{2} + \frac{3 + (-1)^M}{4}$ , что является следствием того, что матрица  $B$  для мнимых частей коэффициентов состоит из блоков, число которых на один меньше, чем для действительных.

Таким образом, алгоритм распознавания включает следующие операции:

для распознаваемого сечения  $f_0(x, y)$  вычисляются  $M_0$  коэффициентов  $C_p^0$ ;

с точностью до заданного отношения сигнал/шум вычисляются элементы  $\|b_{ps}\|$  матрицы, обратной корреляционной;

для требуемой вероятности  $P_0$  по формуле (3) вычисляется величина порога  $G_0$ ;

по полученным в томографическом эксперименте проекционным данным находят оценки коэффициентов  $C_p$ ;

для заданного отношения сигнал/шум и определенных значений  $\bar{C}_p$  вычисляется величина, стоящая в левой части неравенства (21);

полученная величина сравнивается с порогом: если она больше  $G_0$ , то принимается решение о том, что сечение объекта описывается функцией  $f_0(x, y)$ , в противном случае эта гипотеза отклоняется.

Для того чтобы оценить, какая при данных величинах  $M_0$  и  $q$  получается вероятность  $P$ , необходимо задаться каким-то конкретным видом возможных альтернативных функций. И тогда с учетом (22) по формуле (5) находится искомая вероятность. Ориентируясь на эту вероятность, можно установить требования к конкретным величинам  $M_0$  и  $q$ .

Пример. Пусть распознаваемое сечение имеет вид, показанный на рис. 1. Первые 8 коэффициентов, вычисленных для этого

сечения имеют вид, показанный на рис. 1. Первые 8 коэффициентов, вычисленных для этого

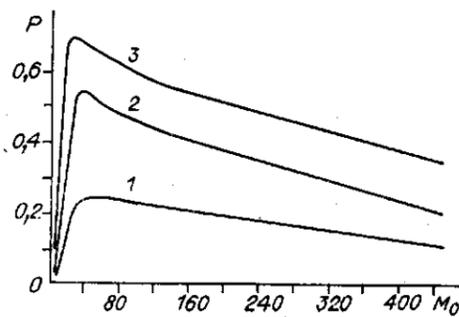


Рис. 3. Зависимость вероятности  $P$  от числа признаков  $M_0$  для различных отношений сигнал/шум  $q$  (кривая 1 —  $q = 5 \cdot 10^{-2}$ , 2 —  $10^{-3}$ , 3 —  $1,5 \cdot 10^{-3}$ )

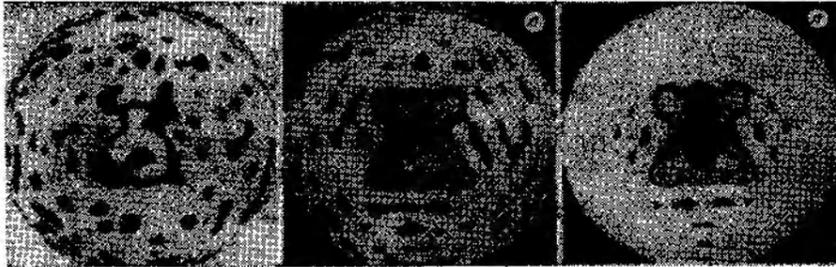


Рис. 4. Восстановленное по различному числу  $M$  коэффициентов  $C_{mn}$  изображение распознаваемого сечения  $f_0(x, y)$ :  
 а —  $M = 50$ ; б —  $100$ ; в —  $200$ . Отношение сигнал/шум  $q$  равно  $1,5 \cdot 10^3$

сечения, равны:  $C_1^0 = 2,9194$ ;  $C_2^0 = 0,1975$ ;  $C_3^0 = -0,1551$ ;  $C_4^0 = 0,1061$ ;  $C_5^0 = -0,0616$ ;  $C_6^0 = 0,0293$ ;  $C_7^0 = -0,011$ ;  $C_8^0 = 0,0041$ . Пусть  $P_0 = 0,95$ , тогда, если в распознавании участвуют 8 коэффициентов ( $M_0 = 8$ ),  $G_0 = 1,6$ .

В качестве возможного альтернативного сечения возьмем сечение вида, приведенного на рис. 2, для которого первые 8 коэффициентов равны:  $C_1 = 2,9194$ ;  $C_2 = -0,1035$ ;  $C_3 = 0,0889$ ;  $C_4 = -0,0696$ ;  $C_5 = 0,0481$ ;  $C_6 = -0,0272$ ;  $C_7 = 0,0093$ ;  $C_8 = 0,004$ . Пусть отношение сигнал/шум равно  $q = 1,5 \cdot 10^3$ , тогда для  $M_0 = 8$  параметр нецентральности  $\lambda^2$  равен  $\lambda^2 = 6,75$ . По таблицам из [4] находим  $P = 0,4$ . Для других значений  $M_0$ ,  $q$  соответствующие значения  $P$  приведены на рис. 3, из которого видно, что чем больше величина  $q$ , тем меньше требуется признаков для достижения максимального значения  $P$ .

Из примера, в частности, ясно, что рассматриваемые сечения распознаются с вероятностями  $P_0 = 0,95$ ;  $P = 0,4$  с количеством признаков  $M_0 = 8$  при отношении сигнал/шум  $q = 1,5 \cdot 10^3$ . Естественно, возникает вопрос, что было бы, если бы пользовались не этим алгоритмом, а по проекционным данным восстанавливали и распознавали изображение. С целью выяснения такого вопроса для уровня отношения сигнал/шум  $q = 1,5 \cdot 10^3$  проводилось восстановление томографического изображения при использовании различного числа признаков  $M_0$ , восстановление осуществлялось по формуле [2]

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^M \sum_{n=-m}^m (m+1) C_{mn} P_m^n(r) e^{in\theta}. \quad (23)$$

Данные изображения предъявлялись оператору для распознавания. Несколько случайных реализаций представлено на рис. 4. Оказывается, чтобы обеспечить те же вероятности распознавания, число коэффициентов должно быть не меньше 100. Этот частный пример иллюстрирует общий вывод, что оптимальный алгоритм предъявляет существенно меньшие требования к числу признаков.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Леман Э. Проверка статистических гипотез.— М.: Наука, 1964.
2. Луитт Р. М. Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований // ТИИЭР.— 1983.— 71, № 3.
3. Троицкий И. Н., Уманский М. С. Анализ алгоритма аппроксимации томографических проекций полиномами в условиях флуктуирующего информационного сигнала // Автометрия.— 1987.— № 6.
4. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблица математической статистики.— М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 28 декабря 1987 г.