7. Липский В. Г. Метод аппроксимации плоских кривых дугами парабол // Там же.— 1986.— № 1.
8. Кузьмин В. Н. Комбинированный метод интерполяции гладких плоских контуров // Вычислительная техника в машиностроении.— Минск: ИТК АН БССР, 1973.

Поступила в редакцию 4 мая 1987 г.

УДК 519.22

В. Г. АЛЕКСЕЕВ
(Москва)

ОБ ОЦЕНКАХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ГАУССОВЫХ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Задача статистического оценивания спектральных плотностей однородных случайных полей рассматривалась ранее в [1—4] (см. также [5, § 5.1] и [6, гл. V, § 8]). В настоящей статье, как и в [4], будем предполагать, что исследуемое случайное поле $\xi(\mathbf{k}) = \xi(k_1, k_2)$ задано на двумерной целочисленной решетке $\mathbf{Z}^2$ и, кроме того, является гауссовым. Как и в работах [3—5], оценку спектральной плотности $f(\lambda_1, \lambda_2)$ случайного поля $\xi(\mathbf{k})$ будем искать в виде сглаженной (по аргументу $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$) периодограммы. Основные отличия настоящей статьи от предшествующих работ состоят в следующем:

1. Оцениваемая спектральная плотность $f(\lambda_1, \lambda_2)$ предполагается достаточно гладкой функцией, т. е. имеющей частные производные всех интересующих нас порядков. Это предположение позволяет нам использовать при построении оценок спектральной плотности $f(\boldsymbol{\lambda})$ знакопеременные весовые функции, обеспечивающие во многих случаях существенное уменьшение ошибки оценивания. Возможность учета априорных предположений относительно гладкости функции $f(\boldsymbol{\lambda})$ при построении ее статистических оценок была отмечена ранее в [2].

2. Как и в работе [4], строим и исследуем оценки спектральной плотности $f(\boldsymbol{\lambda})$ по неограниченно расширяющейся прямоугольной реализации случайного поля $\xi(\mathbf{k})$, однако в тех случаях, когда рост одной из сторон реализации существенно отстает от роста другой ее стороны, вводим домножение исходной реализации на треугольное окно данных, сглаживающее края всех сечений реализации, параллельных ее короткой стороне. Сглаживание краев реализации позволяет нам уменьшить смещение периодограммы (ее определение см. ниже) и вместе с ним средний квадрат ошибки оценивания спектральной плотности $f(\boldsymbol{\lambda})$.

Итак, пусть $\xi(\mathbf{k})$, $k \in \mathbf{Z}^2$,— гауссово однородное случайное поле со средним значением (математическим ожиданием) $\langle \xi(\mathbf{k}) \rangle \equiv 0$ и спектральной плотностью $f(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_i \in \Pi = (-\pi, \pi]$, $i = 1, 2$. Будем предполагать, что функция $f(\lambda_1, \lambda_2)$, будучи продолженной периодическим образом (по обоим аргументам) на всю плоскость (совокупность пар вещественных чисел) $\mathbf{R}^2$, имеет все интересующие нас частные производные. Пусть нам даны значения случайного поля $\xi(k_1, k_2)$ в точках (k_1, k_2), где $k_i = \overline{1, N_i}$, причем $N_i = N_i(n)$, $n = 1, 2, \ldots, i = 1, 2$, и

$$N_1 \leqslant N_2, \quad N_2 \to \infty \text{ при } n \to \infty. \tag{1}$$

Оценку значения спектральной плотности $f(\boldsymbol{\lambda})$ в некоторой точке $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$, где $\omega_1 \in \Pi$ и $0 \leqslant \omega_2 \leqslant \pi$, будем искать в виде

$$f_n(\boldsymbol{\omega}) = h^{-2} \iint\limits_{\mathbf{R}^2} w\left(\frac{\lambda_1 - \omega_1}{h}\right) w\left(\frac{\lambda_2 - \omega_2}{h}\right) I_n(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2, \tag{2}$$

где $I_n(\lambda)$, $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)\in\mathbf{R}^2$,— периодограмма, определяемая соотношением

$$I_n(\lambda)=(4\pi^2N_1N_2)^{-1}\left|\sum_{k_1=1}^{N_1}\sum_{k_2=1}^{N_2}\xi(k_1, k_2)\,e^{-i(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2)}\right|^2, \tag{3}$$

$h=h(N_1, N_2)>0$, а $w(x)$, $x\in\mathbf{R}$,— некоторая весовая функция, удовлетворяющая условиям:

$$w(-x)=w(x), \tag{4}$$

$$w(x)=0, \quad \text{если} \quad |x|\geqslant 1, \tag{5}$$

и

$$\int_{-1}^{1}w(x)\,dx=1; \quad \int_{-1}^{1}w^2(x)\,dx<\infty. \tag{6}$$

Если предположить дополнительно, что $h\leqslant\pi$, то оценка (2) преобразуется к виду

$$f_n(\omega)=h^{-2}\int_{-2\pi}^{2\pi}d\lambda_1\int_{-\pi}^{2\pi}w\left(\frac{\lambda_1-\omega_1}{h}\right)w\left(\frac{\lambda_2-\omega_2}{h}\right)I_n(\lambda_1, \lambda_2)\,d\lambda_2=$$

$$=\iint_{\Pi^2}\varphi_n(\lambda_1, \lambda_2)\,I_n(\lambda_1, \lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2, \tag{7}$$

где $$\varphi_n(\lambda)=(2h^2)^{-1}\sum_{j_1=-1}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\left[w\left(\frac{\lambda_1-\omega_1+2j_1\pi}{h}\right)w\left(\frac{\lambda_2-\omega_2+2j_2\pi}{h}\right)+\right.$$

$$\left.+\,w\left(\frac{\lambda_1+\omega_1+2j_1\pi}{h}\right)w\left(\frac{\lambda_2+\omega_2-2j_2\pi}{h}\right)\right]. \tag{8}$$

Продолжим рассмотрение условий, налагаемых нами на весовую функцию $w(x)$. Четное число $r\geqslant 2$ назовем порядком весовой функции $w(x)=w_r(x)$, если она, наряду с условиями (4)—(6), удовлетворяет дополнительным условиям

$$\int_{-1}^{1}x^jw_r(x)\,dx=0, \quad j=\overline{1, r-1}, \quad \int_{-1}^{1}x^rw_r(x)\,dx\neq 0.$$

Применение весовых функций высших порядков (т. е. порядков $r>2$) позволит нам, как и в случае стационарных случайных процессов (см., например, [7]), получить при достаточно больших n существенный выигрыш в точности оценивания.

Теорема 1. Пусть оценка $f_n(\omega)$, определенная формулами (7) и (3), строится с использованием весовой функции $w(x)$ r-го порядка, а величина $h=h(n)$ выбирается пропорциональной $(N_1N_2)^{-1/(2r+2)}$ при $n\to\infty$. Тогда $\langle|f_n(\omega)-f(\omega)|^2\rangle=O\left((N_1N_2)^{-r/(r+1)}\right)$, если $N_2^r=O\left(N_1^{r+2}\right)$ при $n\to\infty$, и $\langle|f_n(\omega)-f(\omega)|^2\rangle=O\left(N_1^{-2}\right)$, если $N_1^{r+2}=O\left(N_2^r\right)$.

Доказательство. Начнем с изучения смещения оценки $f_n(\omega)$. Сопоставляя соотношения (7) и (6), находим, что

$$\varepsilon_n(\omega)\stackrel{\text{def}}{=}\langle f_n(\omega)\rangle-f(\omega)=\varepsilon_n'(\omega)+\varepsilon_n''(\omega), \tag{9}$$

где $$\varepsilon_n'(\omega)=h^{-2}\int_{-2\pi}^{2\pi}w\left(\frac{\lambda_1-\omega_1}{h}\right)d\lambda_1\int_{-\pi}^{2\pi}w\left(\frac{\lambda_2-\omega_2}{h}\right)[\langle I_n(\lambda_1, \lambda_2)\rangle-f(\lambda_1, \lambda_2)]\,d\lambda_2 \tag{10}$$

и $$\varepsilon_n''(\omega)=h^{-2}\int_{-2\pi}^{2\pi}w\left(\frac{\lambda_1-\omega_1}{h}\right)d\lambda_1\int_{-\pi}^{2\pi}w\left(\frac{\lambda_2-\omega_2}{h}\right)[f(\lambda_1, \lambda_2)-f(\omega_1, \omega_2)]\,d\lambda_2. \tag{11}$$

Рассмотрим сначала слагаемое $\varepsilon_n'(\omega)$. Пользуясь определением (3) периодограммы $I_n(\lambda)$, нетрудно показать, что

$$\langle I_n(\lambda)\rangle - f(\lambda) = \iint\limits_{\Pi^2} F_{N_1}(\mu_1-\lambda_1)\, F_{N_2}(\mu_2-\lambda_2)\,[f(\mu_1, \mu_2) - f(\lambda_1, \lambda_2)]\, d\mu_1\, d\mu_2,$$

где $F_n(\mu)$ — ядро Фейера, определяемое соотношением

$$F_n(\mu) = \sin^2\frac{n\mu}{2}\Big/2\pi n \sin^2\frac{\mu}{2}.$$

Отсюда, учитывая известные результаты, касающиеся приближения дифференцируемых периодических функций суммами Фейера (см., например, [8, гл. IV, § 3 и 5]) и принимая во внимание предположение (1), находим

$$\sup_{\lambda} |\langle I_n(\lambda)\rangle - f(\lambda)| = O\left(\max\left[N_1^{-1}, N_2^{-1}\right]\right) = O\left(N_1^{-1}\right). \tag{12}$$

Из соотношений (10), (6) и (12) следует теперь, что

$$|\varepsilon_n'(\omega)| = O\left(N_1^{-1}\right). \tag{13}$$

Что же касается величины $\varepsilon_n''(\omega)$, определенной формулой (11), то для нее в случае применения весовой функции $w(x)$ r-го порядка при построении оценки (7) справедливо соотношение

$$|\varepsilon_n''(\omega)| = 0(h^r), \quad h\to 0 \tag{14}$$

(см., например, формулу (8) из [9], полученную при аналогичных предположениях относительно гладкости оцениваемой функции).

Переходя к рассмотрению дисперсии оценки (7), имеем

$$\mathbf{D}f_n(\omega) = \langle |f_n(\omega)|^2\rangle - \langle f_n(\omega)\rangle^2 = \iiiint\limits_{\Pi^4} \varphi_n(\lambda_1, \mu_1)\, \varphi_n(\lambda_3, \mu_3) \times$$

$$\times [\langle I_n(\lambda_1, \mu_1)\, I_n(\lambda_3, \mu_3)\rangle - \langle I_n(\lambda_1, \mu_1)\rangle \langle I_n(\lambda_3, \mu_3)\rangle]\, d\lambda_1\, d\mu_1\, d\lambda_3\, d\mu_3. \tag{15}$$

При этом в силу определения (3) периодограммы $I_n(\lambda)$ и предположения о гауссовости случайного поля $\xi(\mathbf{k})$

$$\langle I_n(\lambda_1, \mu_1)\, I_n(\lambda_3, \mu_3)\rangle - \langle I_n(\lambda_1, \mu_1)\rangle\langle I_n(\lambda_3, \mu_3)\rangle =$$

$$= \frac{2}{(4\pi^2 N_1 N_2)^2} \sum_{j_1=1}^{N_1}\sum_{j_2=1}^{N_2}\sum_{k_1=1}^{N_1}\sum_{k_2=1}^{N_2} e^{i(j_1-k_1)\lambda_1} e^{i(j_2-k_2)\mu_1} \sum_{l_1=1}^{N_1}\sum_{l_2=1}^{N_2}\sum_{m_1=1}^{N_1}\sum_{m_2=1}^{N_2} e^{i(m_1-l_1)\lambda_3} \times$$

$$\times e^{i(m_2-l_2)\mu_3} \langle \xi(j_1, j_2)\, \xi(l_1, l_2)\rangle \; \langle \xi(k_1, k_2)\, \xi(m_1, m_2)\rangle =$$

$$= \frac{2}{(4\pi^2 N_1 N_2)^2} \iiiint\limits_{\Pi^4} \left\{ \sum_{j_1=1}^{N_1} e^{ij_1(\lambda_1-\lambda_2)} \sum_{j_2=1}^{N_2} e^{ij_2(\mu_1-\mu_2)} \sum_{l_1=1}^{N_1} e^{il_1(\lambda_2-\lambda_3)} \times \right. \tag{16}$$

$$\left. \times \sum_{l_2=1}^{N_2} e^{il_2(\mu_2-\mu_3)} \sum_{m_1=1}^{N_1} e^{im_1(\lambda_3-\lambda_4)} \sum_{m_2=1}^{N_2} e^{im_2(\mu_3-\mu_4)} \sum_{k_1=1}^{N_1} e^{ik_1(\lambda_4-\lambda_1)} \sum_{k_2=1}^{N} e^{ik_2(\mu_4-\mu_1)} \right\} \times$$

$$\times f(\lambda_2, \mu_2)\, f(\lambda_4, \mu_4)\, d\lambda_2\, d\mu_2\, d\lambda_4\, d\mu_4.$$

Сопоставляя теперь соотношения (15) и (16), находим

$$\mathbf{D}f_n(\omega) = \frac{2}{N_1^2 N_2^2} \iiiint\limits_{\Pi^4} \Phi_n(\lambda_2, \mu_2, \lambda_1, \mu_1)\, d\lambda_1\, d\mu_1\, d\lambda_2\, d\mu_2 \times$$

$$\times \iiiint\limits_{\Pi^4} \frac{1}{16\pi^4} [\Phi_n(\lambda_4, \mu_4, \lambda_3, \mu_3)] \sum_{l_1=1}^{N_1} e^{il_1(\lambda_2-\lambda_3)} \sum_{l_2=1}^{N_2} e^{il_2(\mu_2-\mu_3)} \times$$

$$\times \sum_{k_1=-N_1}^{-1} e^{ik_1(\lambda_1-\lambda_4)} \sum_{k_2=-N_2}^{-1} e^{ik_2(\mu_1-\mu_4)}\, d\lambda_3\, d\mu_3\, d\lambda_4\, d\mu_4, \tag{17}$$

где $\Phi_n(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) = f(\lambda_1, \mu_1)\varphi_n(\lambda_2, \mu_2)\sum_{j_1=1}^{N_1} e^{ij_1(\lambda_2-\lambda_1)} \sum_{j_2=1}^{N_2} e^{ij_2(\mu_2-\mu_1)}$.

Легко видеть, что внутренний четырехкратный интеграл в правой части соотношения (17) есть не что иное, как прямоугольная частная сумма комплексной формы четырехкратного ряда Фурье от функции $\Phi_n(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2)$. Это обстоятельство позволяет нам, исходя из формулы (17) и используя неравенства Коши — Буняковского и Бесселя, получить неравенство

$$\mathrm{D}f_n(\omega) \leqslant \frac{2}{N_1^2 N_2^2}\int\int\int\int_{\Pi^4} |\Phi_n(\lambda_2, \mu_2, \lambda_1, \mu_1)|^2 d\lambda_1\, d\mu_1\, d\lambda_2\, d\mu_2 =$$

$$= \frac{2}{N_1^2 N_2^2}\int\int\int\int_{\Pi^4} \frac{\sin^2[N_1(\lambda_1-\lambda_2)/2]}{\sin^2[(\lambda_1-\lambda_2)/2]}\,\frac{\sin^2[N_2(\mu_1-\mu_2)/2]}{\sin^2[(\mu_1-\mu_2)/2]}\times$$

$$\times\varphi_n^2(\lambda_1, \mu_1) f^2(\lambda_2, \mu_2)\, d\lambda_1\, d\mu_1\, d\lambda_2\, d\mu_2.$$

Отсюда, учитывая свойства ядра Фейера и соотношение (8), находим

$$\mathrm{D}f_n(\omega) \leqslant \frac{8\pi^2}{N_1 N_2}\left[\max_{\lambda} f(\lambda)\right]^2 \int\int_{\Pi^2} \varphi_n^2(\nu, \Theta)\, d\nu\, d\Theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8\pi^2}{N_1 N_2 h^2}\left[\max_{\lambda} f(\lambda)\right]^2 \left(\int_{-1}^{1} w^2(x)\, dx\right)^2. \tag{18}$$

Утверждение теоремы следует теперь из формулы

$$\langle |f_n(\omega) - f(\omega)|^2\rangle = \mathrm{D}f_n(\omega) + \varepsilon_n^2(\omega)$$

и соотношений (9), (13), (14) и (18).

В случае, когда $N_1^{r+2} = o(N_2^r)$ при $n \to \infty$, но $N_1 \geqslant 3$, улучшение сходимости оценки $f_n(\omega)$ к оцениваемой величине $f(\omega)$ может быть достигнуто за счет использования окна данных, сглаживающего эту реализацию вдоль всех ее сечений, параллельных оси k_1. А именно, положим

$$f_n^{(B)}(\omega) = \int_{\Pi^2} \varphi_n(\lambda) I_n^{(B)}(\lambda)\, d\lambda, \tag{19}$$

где функция $\varphi_n(\lambda)$ определяется соотношением (8),

$$I_n^{(B)}(\lambda) = (8\pi^2 L N_2)^{-1}\left|\sum_{k_1=1}^{N_1} b(k_1) \sum_{k_2=1}^{N_2} \xi(k_1, k_2)\, e^{-i(k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)}\right|^2, \tag{20}$$

$$b(k) = \sqrt{6/(2L^2+1)}\,(L - |L-k|) \quad (k = \overline{1, 2L}) \tag{21}$$

и

$$L = \mathrm{entier}\left[2^{-1}(N_1+1)\right]. \tag{22}$$

Теорема 2. Пусть оценка $f_n^{(B)}(\omega)$, определенная соотношениями (19) — (22) и (8), строится с использованием весовой функции $w(x)$ r-го порядка, а величина $h = h(n)$ выбирается пропорциональной $(N_1 N_2)^{-1/(2r+2)}$ при $n \to \infty$. Тогда $\langle |f_n^{(B)}(\omega) - f(\omega)|^2\rangle = O\left((N_1 N_2)^{-r/(r+1)}\right)$, если $N_2^r = O(N_1^{r+4})$ при $n \to \infty$, и $\langle |f_n^{(B)}(\omega) - f(\omega)|^2\rangle = O(N_1^{-4})$, если $N_1^{3r+4} = O(N_2^r)$.

Доказательство теоремы 2 опускаем. Отметим лишь, что оно опирается на свойства не только ядра Фейера, но и ядра Джексона (см., например, [10, гл. II, § 3]).

В заключение отметим, что используемое нами окно данных $B = \{b(k),\ k = \overline{1, 2L}\}$ ни в коей мере не является единственно возможным. Применение другого окна данных потребовало бы, однако, внесения изменений в формулировку и доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Конончук Л. П.** Об оценке спектра однородного случайного поля // Теория вероятностей и математическая статистика.— Киев: Вища шк., 1970.— Вып. 3.
2. **Кнопов П. С.** Об оценке спектральной плотности однородного случайного поля // Кибернетика.— 1972.— № 2.
3. **Бенткус Р., Руткаускас В.** Об асимптотике первых двух моментов спектральных оценок второго порядка // Литовский мат. сб.— 1973.— **13**, № 1.
4. **Алексеев В. Г.** Эмпирический спектральный анализ гауссовских однородных случайных полей // ППИ.— 1973.— **9**, № 2.
5. **Ripley B. D.** Spatial Statistics.— New York — Chichester — Brisbane — Toronto: John Wiley, 1981.
6. **Rosenblatt M.** Stationary Sequences and Random Fields.— Boston — Basel — Stuttgart: Birkhäuser, 1985.
7. **Alekseev V. G.** On the use of alternating kernels in nonparametric statistical estimation // Lecture Notes in Mathematics.— Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo: Springer — Verlag, 1983.— V. 1021.
8. **Степанец А. И.** Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.—

УДК 535.317.1

И. П. ТРОИЦКИЙ, М. С. УМАНСКИЙ

(Москва)

РАСПОЗНАВАНИЕ ПРОЕКЦИОННЫХ ДАННЫХ, ПОЛУЧЕННЫХ В ТОМОГРАФИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ, ПРИ НАЛИЧИИ СВОБОДНОЙ АЛЬТЕРНАТИВЫ

Постановка задачи. Анализ результатов томографического эксперимента часто начинается с установления факта о соответствии внутренней структуры анализируемого объекта некоторой структуре заранее известного вида. Так, например, ставится задача дефектоскопии изделия, повторной диспансеризации пациента и т. п. Очевидно, что в такой постановке задача анализа томограмм может быть легко автоматизирована. Для обеспечения оптимальной автоматизации за основу должен быть принят соответствующий алгоритм распознавания. В теории статистических решений рассматриваемая ситуация характеризуется двуальтернативной гипотезой со свободной альтернативой. Первая гипотеза — анализируемое сечение — описывается данной функцией $f_0(x, y)$, вторая — какой-то произвольной неизвестной функцией $f(x, y)$. Задача состоит в том, чтобы по зарегистрированным проекционным данным $R_u(s, \varphi)$ принять решение в пользу первой или второй гипотезы.

Цель настоящей статьи — исследовать известный алгоритм теории статистических решений применительно к сформулированной задаче и оценить его эффективность с учетом специфических особенностей проекционных данных.

Общая структура алгоритма распознавания. Один из способов решения задачи распознавания двуальтернативной гипотезы с одной свободной альтернативой состоит в следующем: пусть первая гипотеза описывается некоторым набором признаков $C_p^0 (p = 0, 1, \ldots, M_0)$. Реально измеряемые значения этих признаков $\widehat{C}_p^0$ отличаются от значений C_p^0 в силу наличия различных случайных факторов и описываются плотностью вероятности $\Phi\left[\widehat{C}_1^0, \ldots, \widehat{C}_{M_0}^0 / f_0(x, y)\right]$. Решение принимается