

Для определения $U_1(t)$, $U_2(t)$ получим систему уравнений

$$(1 + \alpha)U_1 + \alpha U_2 = 0; \quad 2\alpha U_1 + (1 + 2\alpha)U_2 = e^{-t},$$

где

$$\alpha(t) = \left(\frac{4 + \sqrt{7}}{6\sqrt{7}} e^{(\sqrt{7}-1)t} - \frac{4 - \sqrt{7}}{6\sqrt{7}} e^{-(\sqrt{7}+1)t} - \frac{1}{3} \right),$$

отсюда

$$U_2(t) = \frac{1 + \alpha(t)}{1 + 3\alpha(t)} e^{-t}; \quad U_1(t) = \frac{-\alpha(t)}{1 + 3\alpha(t)} e^{-t}.$$

Поэтому

$$g_1(t, t_1) = \frac{e^{-t}}{1 + 3\alpha(t)} \left(\frac{\sqrt{7} + 1}{2\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}t_1} + \frac{\sqrt{7} - 1}{2\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}t_1} \right);$$

$$g_2(t, t_1) = \frac{2e^{-t}}{1 + 3\alpha(t)} \left(\frac{\sqrt{7} + 1}{2\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}t_1} + \frac{\sqrt{7} - 1}{2\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}t_1} \right).$$

Положим

$$G_i(t, s) = \int_0^t g_i(t, t_1) e^{-s(t-t_1)} dt, \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$G_2(t, s) = 2G_1(t, s) = \frac{2e^{-t}}{1 + 3\alpha(t)} \left(\frac{\sqrt{7} + 1}{2\sqrt{7}(s + \sqrt{7})} e^{\sqrt{7}t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{7} - 1}{2\sqrt{7}(s - \sqrt{7})} e^{-\sqrt{7}t} + \frac{s - 1}{s^2 - 7} e^{-st} \right).$$

Заметим, что если $\operatorname{Re} s \geq 0$ или $\operatorname{Re} s > -\sqrt{7}$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_2(t, s) = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} G_1(t, s) = \frac{2(\sqrt{7} - 1)}{3} \frac{1}{s + \sqrt{7}},$$

что совпадает с решением аналогичного предельного уравнения, полученным методом неопределенных коэффициентов в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Современная теория систем управления/Под ред. К. Т. Леондеса.— М.: Наука, 1970.
2. Статистический анализ и оптимизация систем автоматического управления/Под ред. И. Л. Питерсона.— М.: Сов. радио, 1964.

Поступило в редакцию 7 июня 1985 г.

УДК 517.518.8

А. И. СЕДЕЛЬНИКОВ

(Новосибирск)

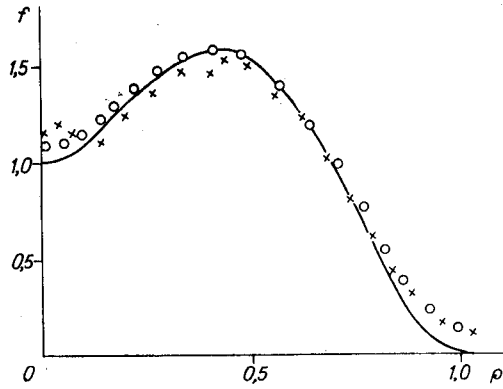
ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБЪЕКТА ПО ПРОЕКЦИИ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАНКЕЛЯ

Широкий круг диагностических задач связан с необходимостью восстановления внутренней структуры осесимметричного объекта по регистрируемой в эксперименте его проекции. Связь радиального профиля $f(\rho)$ исследуемой физической характеристики и регистрируемого сигнала $u(r)$ при этом обычно описывается интегральным уравнением Абеля

$$2 \int_r^R \frac{f(\rho) \rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} = u(r), \quad (1)$$

причем $u(r)$ включает шум измерения, $r \in [0, R]$.

Восстановленная функция $f(\rho)$ при уровне зашумленности $\sigma = 1$ (o) и $\sigma = 10\%$ (X):
сплошная линия — точное решение (3)



В настоящее время разработано несколько алгоритмов решения уравнения (1) [1–3]. В данной работе анализируется еще одна возможность определения $f(\rho)$ по $u(r)$, основанная на математической связи этих функций, отличной от связи, даваемой уравнением (1).

Нахождение $f(\rho)$ по $u(r)$ может быть также рассмотрено как вырожденная задача двумерной вычислительной томографии для случая круговой симметрии. В вычислительной томографии на основе проекционной теоремы о центральном сечении [4] фурье-образ $M(\omega_x, \omega_y)$ искомого двумерного распределения $\mu(x, y)$ связан с фурье-образом $U(\omega, \varphi)$ по перпендикулярной r проекции $u(r, \varphi)$ (наблюдаемой при угловом ракурсе φ) соотношением $M(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) = U(\omega, \varphi)$. Данное соотношение при наличии набора функций $u(r, \varphi)$ для различных $\varphi \in [0, 2\pi]$ может быть использовано для построения функции $M(\omega_x, \omega_y)$ с последующим двумерным фурье-обращением. На этом принципе построен известный в томографии метод фурье-реконструкции [4, 5].

Рассмотрим случай, когда функция $\mu(x, y)$ обладает свойством круговой симметрии. При этом $\mu(x, y) = \mu(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = f(\rho, \theta) = f(\rho)$ ((ρ, θ) — полярные координаты), $U(\omega, \varphi) = U(\omega)$, а двумерное обратное преобразование Фурье от $M(\omega_x, \omega_y)$ (записанное в полярной системе координат) отождествляется с преобразованием Ганкеля нулевого порядка [5]. Нетрудно показать, что использование метода фурье-реконструкции [4] в этом случае приводит к соотношению

$$f(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) R(\omega) |\omega| J_0(2\rho\omega) d\omega, \quad (2)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка; $R(\omega)$ — весовая функция сглаживающего окна. Таким образом, $f(\rho)$ может быть определено как преобразование Ганкеля нулевого порядка от произведения фурье-образа регистрируемой в эксперименте функции $u(r)$ на $R(\omega)$.

Если при численной реализации соотношения (2) воспользоваться алгоритмом быстрого преобразования Ганкеля [6], то задача нахождения $f(\rho)$ по $u(r)$ может быть сведена к последовательному применению двух быстрых преобразований: Фурье и Ганкеля, что позволит снизить затраты машинного времени по сравнению с методами [1–3].

В данной работе проведены тестовые расчеты по предложенному алгоритму для модельной функции вида

$$f(\rho) = 17\rho^4 - 32\rho^3 + 14\rho^2 + 1, \quad (3)$$

для которой известно преобразование Абеля (см. [7]):

$$u(r) = 8(1-r^2)^{1/2}(34r^4 + 7r^2 + 4)/15 + 12r^4 \ln[(1 - (1-r^2)^{1/2})/(1 + (1-r^2)^{1/2})].$$

В расчетах функция $R(\omega)$ принималась в виде

$$R(\omega) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi\omega}{B}\right) \left| \frac{\pi\omega}{B} \right| & \text{при } |\omega| \leq B; \\ 0 & \text{при } |\omega| > B, \end{cases} \quad (4)$$

где B — параметр, характеризующий ширину полосы пропускания частот. Выбор $R(\omega)$ в виде (4) соответствует применяемому в вычислительной томографии фильтру Шенпа — Логана [8].

Результаты расчетов приведены на рисунке. Исходная функция $u(r)$ зашумлялась некоррелированной случайной последовательностью с нормальным законом распределения и дисперсией σ^2 . Значения σ взяты в процентах от $\max_r u(r)$ при числе отсчетов по переменным r и ρ , равным 128.

ЛИТЕРАТУРА

1. Преображенский Н. Г., Пикалов В. В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. — Новосибирск: Наука, 1982.
2. Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. — Новосибирск: Наука, 1984.

3. Апарцин А. С. Об одном методе регуляризации для уравнения Абеля // II Всесоюз. симп. по вычислительной томографии: Тез. докл.— Куйбышев, 1985.
4. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям.— М.: Мир, 1983.
5. Barret H. H., Swindell W. Radiological imaging.— N. Y.: Academic Press, 1981.— V. 2.
6. Anderson W. L. Computer program numerical integration of Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering // Geophysics.— 1979.— V. 44, N 7.— P. 1287.
7. Воскобойников Ю. Е. Обращение уравнения Абеля с использованием кубических сплайнов // Инверсия Абеля и ее обобщения.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1978.
8. Shepp L. A., Logan B. F. The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Trans. Nucl. Sci.— 1974.— V. NS-21.— P. 21.

Поступило в редакцию 23 октября 1985 г.

УДК 681.174

З. Д. ГРИЦКИВ, В. И. ШКЛЯРСКИЙ

(Львов)

ПРЕДЕЛЬНОЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ОТКЛОНЕНИЯ ЛУЧА В СКАНИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВАХ НА ПРЕЦИЗИОННЫХ ЭЛТ

Одним из важнейших параметров сканирующих устройств является их быстродействие, определяющее производительность процессов обработки информации, а в отдельных случаях возможность работы в реальном масштабе времени. Особенность сканеров на прецизионных ЭЛТ — использование для отклонения луча ЭЛТ исключительно магнитных отклоняющих систем (МОС), имеющих лучшие по сравнению с электростатическими системами абберационные характеристики. Необходимость формирования магнитного отклоняющего поля накладывает принципиальное ограничение на достижимое быстродействие, количественная оценка которого и является задачей настоящей работы.

Под быстродействием понимается время τ , за которое ток в отклоняющей системе достигает заданного значения I . Значение тока тем или иным способом фиксируется на определенный временной интервал, зависящий от условий сканирования. Способ получения этого тока в конечном итоге сводится к подключению к индуктивности L источника напряжения E , которое для обеспечения скорости di/dt должно соответствовать известному условию $E = L(di/dt)$. Переходя к конечным приращениям, получаем, что быстродействие отклонения $\tau = LI/E$. Минимально возможное значение L определяется объемом V , в котором необходимо создать магнитное поле напряженностью H . Если L минимизировано, а реально существующие в МОС потери активной мощности и ее емкостные свойства не учтены, эта величина может рассматриваться в качестве предельного быстродействия.

На рис. 1 схематично показано поперечное сечение МОС, отклоняющей луч в направлении оси x . На внутренней поверхности магнитопровода с бесконечной магнитной проницаемостью расположены рабочие участки проводников с током I . Их число в каждой из половин системы равно N , а распределение плотности витков по периметру системы подчинено синусоидальному закону, обеспечивающему однородность поля. С учетом [1] нетрудно показать, что соответствующая этим виткам энергия равна $W = \mu_0 H^2 \pi d^2 l / 16$, где $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м; l и d — длина и диаметр области отклонения. Принимая во внимание равенство $W = LI^2/2$, для индуктивности рабочей части проводников половины системы получим $L' = \pi^2 N^2 d^2 / 2$ Гн.

Такое же число проводников N , но с противоположным направлением тока содержится во второй половине системы. Так как нас интересует предельное быстродействие, наименьшая достижимая индуктивность будет соответствовать параллельному соединению обеих половин системы. При этом необходимо также учесть взаимную индукцию M между ними. Поскольку половины системы включены встречно, индуктивность системы $L = (L' - M)/2$. Опыт показывает, что $M \approx (0,2 - 0,8)L'$. Следовательно, минимальное значение индуктивности $L_{\min} \approx (L' - 0,8L')/2 \approx 0,1L'$. Соответственно для быстродействия имеем

$$\tau_{\min} = L_{\min} 2I/E \approx 2,7N\sqrt{U_a d} \sin \alpha 10^{-7}/E \text{ с,}$$

где учтено, что при напряжении анода ЭЛТ U_a для отклонения луча на угол α требуется ток [2] $I = 2,7\sqrt{U_a d} \sin \alpha / N$. Из выражения видно, что время τ_{\min} пропорционально числу проводников N . Вообще говоря, возможно создание МОС с $N = 1$. Если при этом обеспечить синусоидальное распределение плотности тока в поперечном сечении проводника, то поле в рабочем объеме останется однородным. Такая МОС могла бы обладать максимальным быстродействием. Практически, однако,