$$W_3(\tau)=\begin{vmatrix} -\tau & \frac{2}{\tau+1} & \frac{2(\tau+2)}{(\tau+1)^2} \\ -\frac{\tau+3}{\tau+1} & -\frac{2(\tau+3)}{(\tau+1)^2} & -\frac{2(\tau+3)}{(\tau+1)^3} \\ \frac{2(\tau+4)}{(\tau+1)^2} & \frac{4(\tau+4)}{(\tau+1)^3} & \frac{4(\tau+4)}{(\tau+1)^4} \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, по формулам (12) $n=2$, а так как $k(\tau,\tau)=-\tau\neq 0$, то $m=n-1=1$. Поэтому искомое дифференциальное уравнение имеет вид

$$x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=b_0(t)\delta(t-\tau)+b_1(t)\delta'(t-\tau). \tag{21}$$

Функции

$$k(t,\tau)=\frac{(\tau+2)t^2-2(\tau^2+\tau-1)t-(2\tau^2+3\tau)}{(\tau+1)^2},\quad \frac{\partial k(t,\tau)}{\partial\tau}=-\frac{(\tau+3)(t+1)^2}{(\tau+1)^3}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения $x''(t)+a_1(t)x'(t)+a_0(t)x(t)=0$. По формуле (16) находим

$$a_0(t)=\frac{t+1}{2(t+3)}\begin{vmatrix} \frac{2}{t+1} & -\frac{2(t+3)}{(t+1)^2} \\ \frac{2(t+2)}{(t+1)^2} & -\frac{2(t+3)}{(t+1)^3} \end{vmatrix}=\frac{2}{(t+1)^2};$$

$$a_1(t)=-\frac{t+1}{2(t+3)}\begin{vmatrix} -t & -\frac{t+3}{t+1} \\ \frac{2(t+2)}{(t+1)^2} & -\frac{2(t+3)}{(t+1)^3} \end{vmatrix}=-\frac{2}{t+1}.$$

Далее по формуле (20) получается

$$b_1(\tau)=k(\tau,\tau)=-\tau;$$

$$b_0(\tau)=b_1'(\tau)+a_1(\tau)k(\tau,\tau)+k_t'(\tau,\tau)=-1+\frac{2\tau}{\tau+1}+\frac{2}{\tau+1}=1.$$

Итак, $b_0(t)=1$, $b_1(t)=-t$. Таким образом, искомое уравнение (3) имеет вид

$$x''(t)-\frac{2}{t+1}x'(t)+\frac{2}{(t+1)^2}x(t)=\delta(t-\tau)-t\delta'(t-\tau).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Питерсон И. Л.** Статистический анализ и оптимизация систем автоматического управления.— М.: Сов. радио, 1964.
2. **Солодов А. В., Петров Ф. С.** Линейные автоматические системы с переменными параметрами.— М.: Наука, 1971.
3. **Степанов В. В.** Курс дифференциальных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1953.

Поступила в редакцию 21 июня 1985 г.

УДК 621.317 : 519.21

Ю. Г. ЗОЛОТАРЕВ, М. Г. ЗОТОВ

(Москва)

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ШИНБРОТА НА РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БУТОНА

Рассмотрим систему нестационарных интегральных уравнений Бутона, записанную в матричном виде [1]:

$$\int_0^t (K_x(t_1,\sigma)+\delta(t_1-\sigma)L(t_1,\sigma))G(t,\sigma)\,d\sigma-R(t_1,t)=0,\quad t\geqslant 0,\quad 0\leqslant t_1\leqslant t, \tag{1}$$

здесь $G(t,\sigma)$ — искомая вектор-функция; $\delta(\tau)$ — дельта-функция.

Матрицы $K_x(t_1, \sigma)$ и $L(t_1, \sigma)$ удовлетворяют условиям

$$L(t_1, \sigma) = L(\sigma, t_1);$$
$$K_x(t_1, \sigma) = \begin{cases} K(t_1, \sigma) & \text{при} \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant t_1; \\ K(\sigma, t_1) & \text{при} \quad t_1 \leqslant \sigma \leqslant t. \end{cases} \tag{2}$$

Матрица $K(t_1, \sigma)$ может быть записана в форме

$$K(t_1, \sigma) = \sum_{s=1}^{m} P_s(\sigma) Q_s(t_1), \tag{3}$$

где $P_s(\sigma)$ и $Q_s(t_1)$ — квадратные матрицы n-го порядка:

$$P_s(\sigma) = \begin{Vmatrix} p_{11}^s(\sigma) \dots p_{1n}^s(\sigma) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ p_{n1}^s(\sigma) \dots p_{nn}^s(\sigma) \end{Vmatrix}; \quad Q_s(t_1) = \begin{Vmatrix} q_{11}^s(t_1) \dots q_{1n}^s(t_1) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ q_{n1}^s(t_1) \dots q_{nn}^s(t_1) \end{Vmatrix}; \quad s = 1 - m. \tag{4}$$

Отметим, что в виде (3) может быть записано любое вырожденное ядро $K(t_1, \sigma)$. Предположим, что вектор-функция $R(t_1, t)$ записана в виде

$$R(t_1, t) = \sum_{s=1}^{m} P_s(t_1) V_s(t), \tag{5}$$

где матрицы $P_s(t_1)$ определены соотношениями (4), а $V_s(t)$ являются векторами:

$$V_s(t) = \| v_1^s(t) \dots v_n^s(t) \|^{\mathrm{T}}, \quad s = 1 - m,$$

т — операция транспонирования.

Решение $G(t, \sigma)$ системы (1) будем искать в виде

$$G(t, \sigma) = \sum_{i=1}^{m} M_i(\sigma) U_i(t), \tag{6}$$

где $M_i(\sigma)$ — матрицы:

$$M_i(\sigma) = \begin{Vmatrix} m_{11}^i(\sigma) \dots m_{1n}^i(\sigma) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ m_{n1}^i(\sigma) \dots m_{nn}^i(\sigma) \end{Vmatrix}, \quad i = 1 - m,$$

а $U_i(t)$ — векторы: $U_i(t) = \| u_1^i(t) \dots u_n^i(t) \|^T$, $i = 1 - m$. При $n = 1$ система (1) вырождается в одномерное интегральное уравнение с предложенным Шинбротом способом представления корреляционных функций [2]. Воспользовавшись условием (2), запишем уравнение (1) в следующей форме:

$$L(t_1, t_1) G(t_0, t_1) + \int_0^{t_1} (K(t_1, \sigma) - K(\sigma, t_1)) G(t, \sigma)\, d\sigma +$$
$$+ \int_0^{t} K(\sigma, t_1) G(t, \sigma)\, d\sigma - R(t_1, t) = 0. \tag{7}$$

Учитывая выражения (3), (5) и (6), матричное уравнение (7) можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{m} \left[L(t_1, t_1) M_i(t_1) + \int_0^{t_1} (K(t_1, \sigma) - K(\sigma, t_1)) M_i(\sigma)\, d\sigma \right] \times$$
$$\times U_i(t) + \sum_{s=1}^{m} P_s(t_1) \left[\int_0^{t} Q_s(\sigma) \left(\sum_{i=1}^{m} M_i(\sigma) U_i(t) \right) d\sigma - V_s(t) \right] = 0.$$

Меняя наименование индексов суммирования, во втором слагаемом получим

$$\sum_{i=1}^{m} \left[L(t_1, t_1) M_i(t_1) + \int_0^{t_1} (K(t_1, \sigma) - K(\sigma, t_1)) M_i(\sigma)\, d\sigma \right] U_i(t) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} P_i(t_1) \left[\int_0^{t} Q_i(\sigma) \left(\sum_{s=1}^{m} M_s(\sigma) U_s(t) \right) d\sigma - V_i(t) \right] = 0. \tag{8}$$

Равенство (8) будет выполняться, если положить

$$L(t_1, t_1) M_i(t_1) + \int_0^{t_1} (K(t_1, \sigma) - K(\sigma, t_1)) M_i(\sigma)\, d\sigma = P_i(t_1), \quad i = 1 - m; \tag{9}$$

$$U_i(t) + \sum_{s=1}^{m} \left(\int_0^t Q_i(\sigma) M_s(\sigma)\, d\sigma \right) U_s(t) = V_i(t), \quad i = 1 - m. \tag{10}$$

Каждое из m уравнений (9) есть интегральное уравнение Вольтера относительно [illegible] $M_i(t_1)$. Важно заметить, что ядро этого интеграль-

$$L(t_1, \sigma) = L(|t_1 - \sigma|), \; K(t_1, \sigma) - K(\sigma, t_1) = W(t_1 - \sigma). \tag{11}$$

Условия эти аналогичны условиям Шинброта при решении одномерного интегрального уравнения [2]. В этом случае система уравнений (9) примет вид

$$L(0) M_i(t) + \int_0^t W(t_1 - \sigma) M_i(\sigma)\, d\sigma = P_i(t_1), \quad i = 1 - m. \tag{12}$$

Допустим, что для матричных функций $W(t_1)$ и $P_i(t_1)$, $i = 1 \ldots m$, существует преобразование Лапласа. Обозначив через $\widehat{W}(p)$, $\widehat{P}_i(p)$, $\widehat{M}_i(p)$ матрицы преобразований Лапласа для матриц $W(t_1)$, $P_i(t_1)$, $M_i(t)$, получим

$$L(0)\widehat{M}_i(p) + \widehat{W}(p)\widehat{M}_i(p) = \widehat{P}_i(p) \tag{13}$$

и, следовательно,

$$\widehat{M}_i(p) = (L(0) + \widehat{W}(p))^{-1}\widehat{P}_i(p), \quad i = 1 - m. \tag{14}$$

Зная преобразования Лапласа $\widehat{M}_i(p)$, можно найти матрицы $M_i(t)$, а затем из системы (10) определить и векторы $U_i(t)$.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\int_0^t \left[\left(\delta(t_1 - \sigma) + \alpha^2 t_1 \sigma \right) g_1(t, \sigma) + \alpha^2 t_1 \sigma g_2(t, \sigma) \right] d\sigma - \alpha^2 t t_1 = 0;$$

$$\int_0^t \left[\alpha^2 t_1 \sigma g_1(t_1 \sigma) + \left(0{,}5\delta(t_1 - \sigma) + \alpha^2 t_1 \sigma \right) g_2(t, \sigma) \right] d\sigma - \alpha^2 t t_1 = 0.$$

В этом случае

$$L = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{Vmatrix}; \quad K(t_1, \sigma) = \begin{Vmatrix} \alpha^2 t_1 \sigma & \alpha^2 t_1 \sigma \\ \alpha^2 t_1 \sigma & \alpha^2 t_1 \sigma \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{\alpha t_1}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha t_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha t_1}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha t_1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix};$$

$$R(\sigma) = \begin{Vmatrix} \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}; \quad Q(t_1) = \begin{Vmatrix} \frac{\alpha t_1}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha t_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha t_1}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha t_1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}; \quad V(t) = \begin{Vmatrix} \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}; \quad G(t, \sigma) = M(\sigma) U(t).$$

Перейдем к решению систем (9) и (10). Так как матрица $K(t_1, \sigma)$ симметрична, т. е. $K(t_1, \sigma) = K(\sigma, t_1)$, а $\det(L(t_1, t_1)) \neq 0$ (при $t_1 \geqslant 0$), то система (9) примет вид

$$L(t_1, t_1) M_i(t_1) = P_i(t_1), \quad i = 1 - m,$$

и, следовательно,

$$M_i(t_1) = L^{-1}(t_1, t_1) P_i(t_1), \quad i = 1 - m. \tag{15}$$

Поэтому система уравнений (10) будет

$$U_i(t) + \sum_{s=1}^{m} \left(\int_0^t Q_i(\sigma) L^{-1}(\sigma, \sigma) P_s(\sigma)\, d\sigma \right) U_s(t) = V_i(t), \quad i = 1 - m. \tag{16}$$

Решая ее, найдем векторы $U_1(t) \dots U_m(t)$, а тем самым и вектор-функцию $G(t, t_1)$. Из выражений (15) получаем

$$M(t_1) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\alpha t_1}{\sqrt{2}} & \dfrac{\alpha t_1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}\alpha t_1 & \sqrt{2}\alpha t_1 \end{Vmatrix},$$

и, следовательно, система (16) будет иметь вид

$$U(t) = \int_0^t \begin{Vmatrix} \dfrac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} & \dfrac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} & \dfrac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dfrac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} & \dfrac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}\alpha\sigma & \sqrt{2}\alpha\sigma \end{Vmatrix} d\sigma U(t) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\alpha t}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{\alpha t}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix},$$

откуда

$$U_1 + \frac{\alpha^2 t^3}{2}(U_1 + U_2) = \frac{\alpha t}{\sqrt{2}}, \quad U_2 + \frac{\alpha^2 t^3}{2}(U_1 + U_2) = \frac{\alpha t}{\sqrt{2}}.$$

Решая ее, получим

$$U_1(t) = U_2(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{2}(1 + \alpha^2 t^3)}$$

и окончательно

$$g_1(t, t_1) = \frac{\alpha^2 t t_1}{1 + \alpha^2 t^3}, \quad g_2(t, t_1) = \frac{2\alpha^2 t t_1}{1 + \alpha^2 t^3}.$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\int_0^t \left(e^{-|t_1 - \sigma|} + \delta(t_1 - \sigma)\right) g_1(t, \sigma)\, d\sigma + \int_0^t e^{-|t_1 - \sigma|} g_2(t, \sigma)\, d\sigma - e^{-|t - t_1|} = 0;$$

$$\int_0^t e^{-|t_1 - \sigma|} g_1(t, \sigma)\, d\sigma + \int_0^t \left(e^{-|t_1 - \sigma|} + 0{,}5\delta(t_1 - \sigma)\right) g_2(t, \sigma)\, d\sigma - e^{-|t - t_1|} = 0.$$

В этом случае

$$L = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{Vmatrix}; \quad K(t_1, \sigma) = \begin{Vmatrix} e^{-(t_1 - \sigma)} & e^{-(t_1 - \sigma)} \\ e^{-(t_1 - \sigma)} & e^{-(t_1 - \sigma)} \end{Vmatrix}$$

и можно положить $K_1(t_1, \sigma) = P(\sigma)Q(t_1)$, $R(t_1, t) = P(t_1)V(t)$, где

$$P(\sigma) = \begin{Vmatrix} e^{\sigma} & e^{\sigma} \\ e^{\sigma} & e^{\sigma} \end{Vmatrix}; \quad Q(t_1) = \begin{Vmatrix} e^{-t_1} & 0 \\ 0 & e^{-t_1} \end{Vmatrix}; \quad V(t) = \begin{Vmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{Vmatrix}.$$

Далее

$$K(t_1, \sigma) - K(\sigma, t_1) = -2 \begin{Vmatrix} \operatorname{Sh}(t_1 - \sigma) & \operatorname{Sh}(t_1 - \sigma) \\ \operatorname{Sh}(t_1 - \sigma) & \operatorname{Sh}(t_1 - \sigma) \end{Vmatrix} = W(t_1 - \sigma).$$

Отсюда имеем

$$\widehat{P}(s) = \frac{1}{s - 1} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}; \quad \widehat{W}(s) = \frac{-2}{s^2 - 1} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

и, следовательно, уравнение (13) примет вид

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{s^2 - 3}{s^2 - 1} & -\dfrac{2}{s^2 - 1} \\ -\dfrac{2}{s^2 - 1} & \dfrac{s^2 - 5}{2(s^2 - 1)} \end{Vmatrix} \widehat{M}(s) = \frac{1}{s - 1} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

откуда

$$\widehat{M}(s) = \begin{Vmatrix} \dfrac{s + 1}{s^2 - 7} & \dfrac{s + 1}{s^2 - 7} \\ \dfrac{2(s + 1)}{s^2 - 7} & \dfrac{2(s + 1)}{s^2 - 7} \end{Vmatrix}; \quad M(t_1) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix} \left(\frac{\sqrt{7} + 1}{2\sqrt{7}} e^{\sqrt{7} t_1} + \frac{\sqrt{7} - 1}{2\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7} t_1} \right).$$

Для определения $U_1(t)$, $U_2(t)$ получим систему уравнений

$$(1+\alpha)U_1 + \alpha U_2 = 0;\quad 2\alpha U_1 + (1+2\alpha)U_2 = e^{-t},$$

где

$$\alpha(t) = \left(\frac{4+\sqrt{7}}{6\sqrt{7}} e^{(\sqrt{7}-1)t} - \frac{4-\sqrt{7}}{6\sqrt{7}} e^{-(\sqrt{7}+1)t} - \frac{1}{3}\right),$$

отсюда

$$U_2(t) = \frac{1+\alpha(t)}{1+3\alpha(t)} e^{-t};\quad U_1(t) = \frac{-\alpha(t)}{1+3\alpha(t)} e^{-t}.$$

Поэтому

$$g_1(t, t_1) = \frac{e^{-t}}{1+3\alpha(t)} \left(\frac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}t_1} + \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}t_1}\right);$$

$$g_2(t, t_1) = \frac{2e^{-t}}{1+3\alpha(t)} \left(\frac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}} e^{\sqrt{7}t_1} + \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{7}} e^{-\sqrt{7}t_1}\right).$$

Положим

$$G_i(t, s) = \int_0^t g_i(t, t_1)\, e^{-s(t-t_1)} dt,\quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$G_2(t, s) = 2G_1(t, s) = \frac{2e^{-t}}{1+3\alpha(t)} \left(\frac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}(s+\sqrt{7})} e^{\sqrt{7}t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{7}(s-\sqrt{7})} e^{-\sqrt{7}t} + \frac{s-1}{s^2-7} e^{-st}\right).$$

Заметим, что если $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ или $\operatorname{Re} s > -\sqrt{7}$, то

$$\lim_{t\to\infty} G_2(t, s) = 2\lim_{t\to\infty} G_1(t, s) = \frac{2(\sqrt{7}-1)}{3} \frac{1}{s+\sqrt{7}},$$

что совпадает с решением аналогичного предельного уравнения, полученным методом неопределенных коэффициентов в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Современная** теория систем управления/Под ред. К. Т. Леондеса.— М.: Наука, 1970.
2. **Статистический** анализ и оптимизация систем автоматического управления/Под ред. И. Л. Питерсона.— М.: Сов. радио, 1964.

Поступило в редакцию 7 июня 1985 г.

УДК 517.518.8

А. И. СЕДЕЛЬНИКОВ

(Новосибирск)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБЪЕКТА ПО ПРОЕКЦИИ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАНКЕЛЯ

Широкий круг диагностических задач связан с необходимостью восстановления внутренней структуры осесимметричного объекта по регистрируемой в эксперименте его проекции. Связь радиального профиля $f(\rho)$ исследуемой физической характеристики и регистрируемого сигнала $u(r)$ при этом обычно описывается интегральным уравнением Абеля

$$2\int_r^R \frac{f(\rho)\,\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} = u(r), \tag{1}$$

причем $u(r)$ включает шум измерения, $r \in [0, R]$.