АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 3 1988

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 621.317 : 519.21

Ю. Г. ЗОЛОТАРЕВ, М. Г. ЗОТОВ
(Москва)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПО ЕГО ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ

Теория оптимизации линейных систем по различным критериям позволяет найти импульсную переходную функцию, например, методом Шипброта [1]. Однако конечным результатом при проектировании системы должна быть структурная схема, которую можно построить, если известно соответствующее дифференциальное уравнение, связывающее входной и выходной сигналы системы. Пусть функция $\tilde{k}(t, \tau) = k(t, \tau)1(t-\tau) + \gamma(\tau)\delta(t-\tau)$, где $1(t)$ — единичная функция Хевисайда, а $\delta(t)$ — дельта-функция, является импульсной переходной функцией некоторого дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\tilde{a}_n(t)x^{(n)}(t) + \tilde{a}_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + \tilde{a}_0(t)x(t) = \delta(t-\tau) + \tilde{b}_1(t)\delta'(t-\tau) + \ldots$$
$$\ldots + \tilde{b}_m(t)\delta^{(m)}(t-\tau), \quad m \leqslant n. \tag{1}$$

Если известно представление функции $k(t, \tau)$ в виде

$$k(t, \tau) = \sum_{l=1}^{n} u_l(t)\, v_l(\tau), \tag{2}$$

где функции $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ представляют собой фундаментальную систему решений дифференциального уравнения

$$\tilde{a}_n(t)x^{(n)}(t) + \tilde{a}_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + \tilde{a}_1(t)x'(t) + \tilde{a}_0(t)x(t) = 0,$$

то решение задачи идентификации дифференциального уравнения (1) по его импульсной переходной функции $\tilde{k}(t, \tau)$ известно. Один из алгоритмов приведен, например, в [2].

Допустим, что представление (2), как это чаще всего и бывает, заранее неизвестно, и будем искать дифференциальное уравнение, соответствующее импульсной переходной функции в виде

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)x(t) =$$
$$= b_0(t)\delta(t-\tau) + b_1(t)\delta'(t-\tau) + \ldots + b_m(t)\delta^{(m)}(t-\tau), \tag{3}$$

где $a_n(t) = 1$; $b_0 = 1/\tilde{a}_n(t)$; $a_k(t) = \tilde{a}_k(t)/\tilde{a}_n(t)$,

$k = 0, 1, \ldots, n-1$; $b_i(t) = \tilde{b}_i(t)/\tilde{a}_n(t)$, $i = 1, \ldots, m$.

Введем дифференциальные операторы

$$L(x) = a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t);$$
$$M(y) = b_m(t)y^{(m)}(t) + b_{m-1}(t)y^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1(t)y'(t) + b_0(t)y(t).$$

Для восстановления дифференциального уравнения (3) по функции $\tilde{k}(t, \tau)$ необходимо определить: 1) порядки n и m дифференциальных операторов $L(x)$ и $M(y)$; 2) коэффициенты оператора $L(x)$; 3) коэффициенты оператора $M(y)$.

Можно считать, что дифференциальные уравнения $L(x) = 0$ и $M(y) = 0$ не имеют общего решения $x = z(t)$, $y = z(t)$, так как в этом случае порядок и правой, и левой частей уравнения (3) может быть понижен, т. е. фактически импульсная переходная функция $\tilde{k}(t, \tau)$ является решением дифференциального уравнения более низкого порядка, чем уравнение (3).

Пусть $g(t, t_0)$ есть решение дифференциального уравнения

$$L(x) = 0 \tag{4}$$

при начальных условиях

$$g(t_0,\ t_0) = g'(t_0,\ t_0) = \ldots = g^{(n-2)}(t_0,\ t_0) = 0; \quad g^{(n-1)}(t_0,\ t_0) = 1 \tag{5}$$

и $f(t)$ — произвольная функция. Тогда дифференциальное уравнение $L(z(t)) = f(t)$ имеет решение

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} f(\mu)\, g(t,\ \mu)\, d\mu, \tag{6}$$

удовлетворяющее начальным условиям $z(t_0) = z'(t_0) = \ldots = z^{(n-1)}(t_0) = 0$[3], причем это решение единственно. Поэтому и уравнение (3), в свою очередь, имеет решение

$$x(t,\ \tau) = \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{k=0}^{m} b_k(\mu)\, \delta^{(k)}(\mu - \tau) \right) g(t,\ \mu)\, d\mu, \quad 0 \leqslant t_0 \leqslant \tau < t.$$

Последнее выражение равносильно соотношению

$$x(t,\ \tau) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} (b_k(\tau)\, g(t,\ \tau)).$$

В силу единственного решения уравнения (3) имеем окончательно

$$k(t,\ \tau) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} (b_k(\tau)\, g(t,\ \tau)). \tag{7}$$

Отсюда видно, что функции

$$k(t,\ \tau),\ \frac{\partial k(t,\ \tau)}{\partial \tau},\ \frac{\partial^2 k(t,\ \tau)}{\partial \tau^2},\ \frac{\partial^3 k(t,\ \tau)}{\partial \tau^3},\ \ldots \tag{8}$$

есть решения уравнения (4). Поэтому для определения порядка дифференциального оператора $L(x)$ достаточно найти число линейно независимых функций в последовательности (8). Известно, что условием линейной независимости системы функций $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots, \varphi_l(t)$ является отличие от нуля ее вронскиана:

$$W(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_l) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots\ \varphi_l(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots\ \varphi_l'(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(l-1)}(t) & \varphi_2^{(l-1)}(t) & \ldots\ \varphi_l^{(l-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9}$$

Так как функции, составляющие последовательность (8), представляют собой решение линейного дифференциального уравнения, то из обращения вронскиана $W\left(k(t,\ \tau),\ \frac{\partial k(t,\ \tau)}{\partial \tau},\ \ldots,\ \frac{\partial^l k(t,\ \tau)}{\partial \tau^l}\right)$ в нуль хотя бы в одной точке следует, согласно формуле Остроградского — Лиувилля [3], что этот вронскиан тождественно равен нулю. Поэтому условие (9) для системы (8) достаточно проверить лишь при $t = \tau$.

Положим

$$\begin{gathered} W_1(\tau) = W(k(t,\ \tau))\,|_{t=\tau}; \quad W_2(\tau) = W\left(k(t,\ \tau),\ \frac{\partial k(t,\ \tau)}{\partial \tau}\right)\Bigg|_{t=\tau}; \ldots \\ W_j(\tau) = W\left(k(t,\ \tau),\ \ldots,\ \frac{\partial^{j-1} k(t,\ \tau)}{\partial \tau^{j-1}}\right)\Bigg|_{t=\tau}; \\ W_{j+1}(\tau) = W\left(k(t,\tau),\ \ldots,\ \frac{\partial^{j} k(t,\ \tau)}{\partial \tau^{j}}\right)\Bigg|_{t=\tau}; \ldots \end{gathered} \tag{10}$$

и пусть j — первое из чисел 1, 2, 3, ..., при котором $W_j(\tau) \neq 0$, $W_{j+1}(\tau) = 0$. Тогда функции

$$k(t,\ \tau),\ \frac{\partial k(t,\ \tau)}{\partial \tau},\ \ldots,\ \frac{\partial^{j-1} k(t,\ \tau)}{\partial \tau^{j-1}} \tag{11}$$

линейно независимы, а функция $\dfrac{\partial^j k(t,\ \tau)}{\partial \tau^j}$ представляет собой их линейную комбинацию. Следовательно, и любая из функций $\dfrac{\partial^r k(t,\tau)}{\partial\tau^r}$ при $r \geqslant j$ также является линейной комбинацией функций, содержащихся в системе (11). Поэтому система (11) — фундаментальная система решений уравнений (4) и порядок n этого уравнения может быть определен из условия

$$W_n(\tau) \neq 0; \quad W_{n+1}(\tau) = 0. \tag{12}$$

Заметим далее, что из представления $\tilde{k}(t,\tau) = k(t,\tau)1(t-\tau) + \gamma(\tau)\delta(t-\tau)$ видно, что если $\gamma(\tau) \neq 0$, то порядок m дифференциального оператора $M(y)$ будет равен числу n — порядку оператора $L(x)$. Пусть теперь $\gamma(\tau) = 0$, тогда $m \leqslant n-1$. Воспользовавшись в силу (5) равенствами

$$\left.\frac{\partial^{k+l} g(t,\tau)}{\partial\tau^k\,\partial t^l}\right|_{t=\tau} = 0, \quad k+l < n-1; \quad \left.\frac{\partial^{n-1} g(t,\tau)}{\partial\tau^k\partial t^{n-k-1}}\right|_{t=\tau} = (-1)^k,$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

получим из равенства (7) соотношения

$$\left.\frac{\partial^l k(t,\tau)}{\partial t^l}\right|_{t=\tau} = 0 \quad \text{при} \quad l+m < n-1;$$

$$\left.\frac{\partial^l k(t,\tau)}{\partial t^l}\right|_{t=\tau} = (-1)^m b_m(\tau) \quad \text{при} \quad l+m = n-1.$$

Поэтому если $k(t,\tau)|_{t=\tau} \neq 0$, то $m = n-1$, а если

$$k(t,\tau)|_{t=\tau} = \left.\frac{\partial k(t,\tau)}{\partial\tau}\right|_{t=\tau} = \ldots = \left.\frac{\partial^{r-1} k(t,\tau)}{\partial t^{r-1}}\right|_{t=\tau} = 0; \quad \left.\frac{\partial^r k(t,\tau)}{\partial t^r}\right|_{t=\tau} \neq 0, \tag{13}$$

то $r + m = n - 1$ и, следовательно,

$$m = n - r - 1, \tag{14}$$

где число r отыскивается из условия (13).

Для нахождения коэффициентов дифференциального уравнения (4) используем полученный при определении порядка n оператора $L(x)$ результат: система функций

$$k(t,\tau), \frac{\partial k(t,\tau)}{\partial\tau}, \ldots, \frac{\partial^{n-1}k(t,\tau)}{\partial\tau^{n-1}}$$

является фундаментальной системой решений уравнения (4). Поэтому уравнение (4) может быть записано в виде [2]

$$L(x) \equiv \frac{W\left(k(t,\tau), \dfrac{\partial k(t,\tau)}{\partial\tau}, \ldots, \dfrac{\partial^{n-1}k(t,\tau)}{\partial\tau^{n-1}}, x\right)}{W\left(k(t,\tau), \dfrac{\partial k(t,\tau)}{\partial\tau}, \ldots, \dfrac{\partial^{n-1}k(t,\tau)}{\partial\tau^{n-1}}\right)} = 0. \tag{15}$$

Так как коэффициенты $a_l(t)$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$, этого уравнения не зависят от τ, то, полагая в выражении (15) $\tau = t$, получим

$$L(x) \equiv \frac{\left.W\left(k(t,\tau), \dfrac{\partial k(t,\tau)}{\partial\tau}, \ldots, \dfrac{\partial^{n-1}k(t,\tau)}{\partial\tau^{n-1}}, x\right)\right|_{\tau=t}}{W_n(t)} = 0.$$

Отсюда находятся формулы для определения коэффициентов $a_l(t)$, $l = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, оператора $L(x)$:

$$a_l(t) = \frac{(-1)^{n-l}}{W_n(t)} \left.\begin{vmatrix} k(t,\tau) & \dfrac{\partial k(t,\tau)}{\partial\tau} & \ldots & \dfrac{\partial^{n-1}k(t,\tau)}{\partial\tau^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^{l-1}k(t,\tau)}{\partial t^{l-1}} & \dfrac{\partial^l k(t,\tau)}{\partial t^{l-1}\partial\tau} & \ldots & \dfrac{\partial^{n+l-2}k(t,\tau)}{\partial t^{l-1}\partial\tau^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^{l+1}k(t,\tau)}{\partial t^{l+1}} & \dfrac{\partial^{l+2}k(t,\tau)}{\partial t^{l+1}\partial\tau} & \ldots & \dfrac{\partial^{n+l}k(t,\tau)}{\partial t^{l+1}\partial\tau^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^n k(t,\tau)}{\partial t^n} & \dfrac{\partial^{n+1}k(t,\tau)}{\partial t^n\partial\tau} & \ldots & \dfrac{\partial^{2n-1}k(t,\tau)}{\partial t^n\partial\tau^{n-1}} \end{vmatrix}\right|_{\tau=t}, \quad l = 0 - n - 1. \tag{16}$$

Обозначим теперь для сокращения записи

$$\left.\frac{\partial^l k(t,\tau)}{\partial t^l}\right|_{t=\tau} = k^{(l)}(\tau,\tau), \quad l=0,1,2\ldots$$

Тогда справедливы равенства

$$\frac{d^r\widetilde{k}(t,\tau)}{dt^r} = \frac{\partial^r k(t,\tau)}{\partial t^r}1(t-\tau) + k^{(r-1)}(\tau,\tau)\,\delta(t-\tau) + \ldots + k'(\tau,\tau)\,\delta^{(r-2)}(t-\tau) +$$
$$+ k(\tau,\tau)\,\delta^{(r-1)}(t-\tau) + \gamma(\tau)\,\delta^{(r)}(t-\tau), \quad r=0,1,\ldots,n.$$

Поэтому если положить в дифференциальном уравнении (3) $x=\widetilde{k}(t,\tau)$, получим тождество

$$L(k(t,\tau))1(t-\tau) + (a_0(t)\gamma(\tau) + a_1(t)k(\tau,\tau) + \ldots + a_n(t)k^{(n-1)}(\tau,\tau) - b_0(t))\delta(t-\tau) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{l-1}(t)\gamma(\tau) + a_l(t)k(\tau,\tau) + \ldots + a_n(t)k^{(n-l)}(\tau,\tau) - b_{l-1}(t))\delta^{(l-1)}(t-\tau) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-1}(t)\gamma(\tau) + a_n(t)k(\tau,\tau) - b_{n-1}(t))\delta^{(n-1)}(t-\tau) + (a_n(t)\gamma(\tau) -$$
$$- b_n(t))\delta^{(n)}(t-\tau) \equiv 0. \tag{17}$$

Отметим, что в этом соотношении $a_n(t)=1$ и $b_k(t)=0$ при $k>m$.

Если положить

$$f_l(t,\tau) = a_l(t)\gamma(\tau) + a_{l+1}(t)k(\tau,\tau) + \ldots + a_n(t)k^{(n-l-1)}(\tau,\tau) - b_l(t),$$
$$l=0,\ldots,n-1; \tag{18}$$
$$f_n(t,\tau) = a_n(t)\gamma(\tau) - b_n(t)$$

и учесть, что $L(k(t,\tau))\equiv 0$ и справедливы равенства

$$f_l(t,\tau)\,\delta^l(t-\tau) = (-1)^l \sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k f_l^{(l-k)}(\tau,\tau)\,\delta^{(k)}(t-\tau),$$

где $C_l^k = l!/k!\,(l-k)!$ то из тождества (17) получим

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=k}^{n}(-1)^l C_l^k f_l^{(l-k)}(\tau,\tau)\right)\delta^{(k)}(t-\tau)\equiv 0.$$

Если умножить это тождество на $(t-\tau)p/p!$, $p=0,1,\ldots,n$, и проинтегрировать от 0 до t, то будем иметь систему равенств

$$\sum_{l=p}^{n}(-1)^l C_l^p f_l^{(l-p)}(\tau,\tau)=0, \quad p=0,1,\ldots,n. \tag{19}$$

Подставляя в эти равенства значение $f_l(t,\tau)$, определенные по формулам (18), находим

$$b_n(\tau) = a_n(\tau)\,\gamma(\tau);$$
$$b_k(\tau) = \sum_{l=1}^{n-k}(-1)^{l-1}C_{k+l}^k b_{k+l}^{(l)}(\tau) + \left(\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l C_{k+l}^k a_{k+l}^{(l)}(\tau)\right)\gamma(\tau) + \tag{20}$$
$$+ \sum_{l=0}^{n-k-1}(-1)^l C_{k+l}^{(k)}\sum_{\mu=1}^{n-k-l}a_{k+l+\mu}^{(l)}(\tau)\,k^{(\mu-1)}(\tau,\tau), \quad k=n-1,\ n-2,\ldots,2,1,0.$$

Так как функции $a_r(t)$, $r=0,1,\ldots,n$, уже определены по формулам (16), то выражение (20) позволяет последовательно отыскать $b_n(\tau)$, $b_{n-1}(\tau)$, …, $b_1(\tau)$, $b_0(\tau)$ и тем самым полностью идентифицировать дифференциальное уравнение (3).

Пример. Пусть $\widetilde{k}(t,\tau) = k(t,\tau)1(t-\tau)$, где

$$k(t,\tau) = \frac{(\tau+2)\,t^2 - 2(\tau^2+\tau-1)\,t - 2\tau^2 - 3\tau}{(\tau+1)^2}.$$

Для нахождения порядка n дифференциального уравнения $L(x)=0$ по формулам (10) вычислим определители

$$W_1(\tau) = k(\tau,\tau) = -\tau; \quad W_2(\tau) = \begin{vmatrix} -\tau & \dfrac{2}{\tau+1} \\ -\dfrac{\tau+3}{\tau+1} & -\dfrac{2(\tau+3)}{(\tau+1)^2}\end{vmatrix} = \frac{2(\tau+3)}{\tau+1};$$

$$W_3(\tau) = \begin{vmatrix} -\tau & \frac{2}{\tau+1} & \frac{2(\tau+2)}{(\tau+1)^2} \\ -\frac{\tau+3}{\tau+1} & -\frac{2(\tau+3)}{(\tau+1)^2} & -\frac{2(\tau+3)}{(\tau+1)^3} \\ \frac{2(\tau+4)}{(\tau+1)^2} & \frac{4(\tau+4)}{(\tau+1)^3} & \frac{4(\tau+4)}{(\tau+1)^4} \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, по формулам (12) $n = 2$, а так как $k(\tau, \tau) = -\tau \neq 0$, то $m = n - 1 = 1$. Поэтому искомое дифференциальное уравнение имеет вид

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b_0(t)\delta(t-\tau) + b_1(t)\delta'(t-\tau). \qquad (21)$$

Функции

$$k(t, \tau) = \frac{(\tau+2)t^2 - 2(\tau^2+\tau-1)t - (2\tau^2+3\tau)}{(\tau+1)^2}, \quad \frac{\partial k(t, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{(\tau+3)(t+1)^2}{(\tau+1)^3}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения $x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0$. По формуле (16) находим

$$a_0(t) = \frac{t+1}{2(t+3)} \begin{vmatrix} \frac{2}{t+1} & -\frac{2(t+3)}{(t+1)^2} \\ \frac{2(t+2)}{(t+1)^2} & -\frac{2(t+3)}{(t+1)^3} \end{vmatrix} = \frac{2}{(t+1)^2};$$

$$a_1(t) = -\frac{t+1}{2(t+3)} \begin{vmatrix} -t & -\frac{t+3}{t+1} \\ \frac{2(t+2)}{(t+1)^2} & -\frac{2(t+3)}{(t+1)^3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{t+1}.$$

Далее по формуле (20) получается

$$b_1(\tau) = k(\tau, \tau) = -\tau;$$

$$b_0(\tau) = b_1'(\tau) + a_1(\tau)\,k(\tau, \tau) + k_t'(\tau, \tau) = -1 + \frac{2\tau}{\tau+1} + \frac{2}{\tau+1} = 1.$$

Итак, $b_0(t) = 1$, $b_1(t) = -t$. Таким образом, искомое уравнение (3) имеет вид

$$x''(t) - \frac{2}{t+1}x'(t) + \frac{2}{(t+1)^2}x(t) = \delta(t-\tau) - t\delta'(t-\tau).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Питерсон И. Л.** Статистический анализ и оптимизация систем автоматического управления.— М.: Сов. радио, 1964.
2. **Солодов А. В., Петров Ф. С.** Линейные автоматические системы с переменными параметрами.— М.: Наука, 1971.
3. **Степанов В. В.** Курс дифференциальных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1953.

Поступила в редакцию 21 июня 1985 г.

УДК 621.317 : 519.21

Ю. Г. ЗОЛОТАРЕВ, М. Г. ЗОТОВ

(Москва)

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ШИНБРОТА НА РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БУТОНА

Рассмотрим систему нестационарных интегральных уравнений Бутона, записанную в матричном виде [1]:

$$\int_0^t (K_x(t_1, \sigma) + \delta(t_1 - \sigma)L(t_1, \sigma))\,G(t, \sigma)\,d\sigma - R(t_1, t) = 0, \quad t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t, \quad (1)$$

здесь $G(t, \sigma)$ — искомая вектор-функция; $\delta(\tau)$ — дельта-функция.