слабоизменяющихся изображений небольшой взаимный сдвиг не приводит к сколько-нибудь заметному изменению функции кросскорреляции.

Следует отметить, что знание вектора параметров $\mathbf{b}$ позволяет находить интерполяционную оценку изображения эталонного фрагмента $\widehat{V}_0$ (по значению выделенного аналога V на контрольном изображении — см. (5)), в определенном смысле наиболее «близкую» к V_0: $\widehat{v}_0(x, y) = \sum_m \sum_t \widehat{b}_{mt} v(x + m, y + t)$. При сопоставлении повторных снимков уточнение взаимного положения сходных фрагментов позволяет компенсировать локальные различия в совмещенных изображениях. Экспериментальное исследование показало, что уточнение взаимного положения фрагментов до доли дискрета снижает дисперсию флуктуаций разностного фона и дает возможность избавиться от больших ложных выбросов, соответствующих нескомпенсированным резким перепадам интенсивности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Виноградов Б. В.** Аэрокосмический мониторинг экосистем.— М.: Наука, 1984.
2. **Киричук В. С., Перетягин Г. И.** Об установлении сходства фрагментов изображений с эталоном // Автометрия.— 1986.— № 4.
3. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982.
4. **Бочкарев А. М.** Корреляционно-экстремальные системы навигации // Зарубеж. радиоэлектрон.— 1981.— № 9.
5. **Kuglin C. D.** Map-matching techniques for terminal guidance using Fourier phase information // Proc. SPIE.— 1979.— V. 186.— P. 21—29.
6. **Mostafavi H., Smith F. W.** Image correlation with geometric distortion // IEEE Trans. on Aerospace and Electron. Syst.— 1978.— V. AES-14, N 3.— P. 487.
7. **Перетягин Г. И.** Представление изображений гауссовыми случайными полями // Автометрия.— 1984.— № 6.

Поступила в редакцию 27 октября 1987 г.

УДК 519.3

В. С. КИРИЧУК

(Новосибирск)

МНОГОКАНАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Пусть на изображении X, заданном на дискретной решетке, присутствуют объекты известной формы, но с неизвестными координатами и амплитудой:

$$X_{ij} = M_{ij} + \sum_{l=1}^{r_k} A_l f_{\nu_l}(i + i_l, j + j_l), \tag{1}$$

где f_{ν_l}— распределение интенсивности объектов $\nu = 1, m$; m — число различных форм объектов (в общем случае $m \leqslant r$); A_l — амплитуда, а $i_l j_l$ — координаты объектов. Относительно исходного изображения M_{ij} предполагаем, что M — реализация случайного процесса, подчиняющегося нормальному закону распределения с известной корреляционной матрицей $\sigma^2 K$. В дальнейшем будем полагать, что корреляционная матрица диагональна. Данное предположение не приводит к потери общности, поскольку проведение операции декоррелирования [1] $X^* = K^{-1/2} X$, $f^* = K^{-1/2} f$ преобразует задачу к виду (1).

Для определенности также положим, что

$$\sum_{ij \in \Omega} f_\nu^2(ij) = 1, \quad \nu = 1, m,$$

где Ω — область задания форм объектов.

Необходимо процедурами многоканальной линейной фильтрации выявить объекты и определить их координаты.

1. При числе каналов фильтрации n, равном числу различных форм объектов $n=m$, классический подход [2], основанный на максимизации отношения правдоподобия, приводит к следующему алгоритму:

Для каждой точки изображения IJ определяем манимумы следующих функционалов:

$$\min_{\text{по } A} J_\nu = \sum_{ij\in\Omega} \{X_{I+i,J+j} - A_\nu f_\nu(ij)\}^2, \quad \nu = 1, m,$$

или, переходя к векторной записи,

$$J_\nu = (\mathbf{X}_{IJ} - A_\nu F_\nu)^T (\mathbf{X}_{IJ} - A_\nu F_\nu),$$

где $\mathbf{X}_{IJ}$ — вектор изображения, полученный соответствующим упорядочиванием по области Ω с центром в точке IJ; F_ν — векторы форм объектов, упорядоченных аналогичным способом. Из условия минимальности получаем

$$\widehat{A}_\nu = E_\nu^T \mathbf{X}_{IJ} / F_\nu^T F_\nu = F_\nu^T \mathbf{X}_{IJ} \tag{2}$$

и $\min J_\nu \sim \max |\widehat{A}_\nu|$. Оценки $\widehat{A}_\nu$ подчиняются нормальному закону распределения $\widehat{A}_\nu \in N(A_\nu, \sigma^2)$.

Минимизация функционалов J_ν по ν определяет наиболее «правдоподобный» объект для данной точки изображения; для принятия решения о наличии объекта необходимо проверить гипотезу $H_0: A_\nu = 0$ при альтернативе $H_\nu: A_\nu \neq 0$ стандартным критерием [3]. При принятии H_ν делается вывод о наличии объекта формы ν в точке IJ, в противном случае принимается гипотеза H_0 (отсутствие объекта) и осуществляется переход к следующей точке. Таким образом, алгоритм сводится к фильтрации изображения m фильтрами, поиску максимума отклика и сравнению максимального отклика с выбранным порогом.

2. При числе каналов фильтрации n меньше чем m использование такого подхода неправомочно, поскольку невозможно предъявить все возможные описания объектов. Поэтому необходимо определить n фильтров, наилучшим образом аппроксимирующие формы объекта:

$$\min_{\text{по } P_j \lambda_j} W = \sum_{\nu=1}^{m} p_\nu \left(F_\nu - \sum_{j=1}^{n} \lambda_\nu(j) P_j\right)^T \left(F_\nu - \sum_{j=1}^{n} \lambda_\nu(j) P_j\right),$$

здесь также учтены вероятности появления форм p_ν. Потребуем от системы фильтров P_j ее ортонормированности:

$$P_i^T P_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Минимизация W по λ_j, P_j приводит к следующим соотношениям:

$$\lambda_\nu(j) = P_j^T F_\nu, \ \left(\sum p_\nu F_\nu F_\nu^T\right) P_j = \varkappa_j P_j.$$

Таким образом, $\varkappa_j$ — собственные числа, а P_j — собственные векторы матрицы $D = \sum p_\nu F_\nu F_\nu^T$. В точке минимума W по $\lambda_\nu(j)$ $W = 1 - \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j$ $\left(\text{заметим, что } \sum_{1}^{m} \varkappa_j = 1\right)$, и, следовательно, для достижения минимума W по P_j необходимо выбирать собственные векторы, соответствующие n максимальным собственным числам.

Качество аппроксимации функций F_ν характеризуется функционалом

$$W_\nu = \left(F_\nu - \sum_{j=1}^{n} \lambda_\nu(j) P_j\right)^T \left(F_\nu - \sum_{j=1}^{n} \lambda_\nu(j) P_j\right) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_\nu^2(j),$$

а при $n=m$ $W_\nu = 0$, поскольку $\sum_{j=1}^{m} \lambda_\nu^2(j) = 1$.

Аналогично алгоритму, рассмотренному в п. 1, в каждой точке поля определяются минимумы функционалов:

$$\min_{\text{по } A_\nu} J_\nu = \left\{X_{IJ} - A_\nu \sum_1^n \lambda_\nu(j) P_j\right\}^T \left\{X_{IJ} - A_\nu \sum_1^n \lambda_\nu(j) P_j\right\}.$$

Минимум J_ν достигается в точке максимума статистики

$$T_\nu = \widehat{A}_\nu \sqrt{\sum_1^n \lambda_\nu^2(j)}, \quad \widehat{A}_\nu = \sum \lambda_\nu(j) P_j^T X_{IJ} \Big/ \sum_1^n \lambda_\nu^2(j). \tag{3}$$

Статистика T_ν подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $A_\nu \sqrt{\sum_1^n \lambda_\nu^2(j)}$ и дисперсией σ^2 (т. е. данный алгоритм эквивалентен I, рассмотренному выше, с уменьшенной на величину $\sqrt{\sum_1^n \lambda_\nu^2(j)}$ амплитудой объектов).

Следовательно, алгоритм поиска объектов в этих предположениях соответствует фильтрации изображения

$$G_i = P_i^T X_{IJ}, \quad i = 1, n,$$

n фильтрами $P_1, \ldots, P_n$; поиску максимума линейной формы от G_i

$$\max_\nu R_\nu = \sum_1^n \lambda_\nu(j) G_j \Big/ \sqrt{\sum_1^n \lambda_\nu^2(j)}$$

и сравнению $\max\limits_\nu R_\nu$ с выбранным порогом.

3. Более простым в реализации является алгоритм, в котором функционалы

$$J_\nu = \left(X_{IJ} - \sum_1^n \eta_\nu(j) P_j\right)^T \left(X_{IJ} - \sum_1^n \eta_\nu(j) P_j\right)$$

минимизируются не по амплитуде объектов, а по параметрам разложения объекта по базисным функциям (опускается информация о коэффициентах разложения формы объекта по базисным функциям). Минимум J достигается в точке максимума величины $\Theta^2 = \sum_1^n \widehat{\eta}^2(j)$,

где
$$\widehat{\eta}(j) = P_j^T X_{IJ}, \tag{4}$$

и алгоритм после фильтрации изображения n фильтрами сводится к построению квадратичной формы от n-отфильтрованных изображений и сравнению построенного поля квадратичных форм с порогом, равным α-квантилю для $\chi^2(n)$-распределения с n степенями свободы, поскольку величина Θ^2/σ^2 при гипотезе H_0 подчиняется $\chi^2(n)$-распределению, а при гипотезе H_ν — нецентральному $\chi^2(n, \varkappa_\nu^2)$ с параметром нецентральности $\varkappa_\nu^2 = A_\nu^2 \sum_1^n \lambda_\nu^2(j)$. Заметим, что такой алгоритм применим и в том случае, если априори задано лишь пространство, в котором лежит описание объектов, а сама форма объектов не определена.

4. Проведем сравнение описанных алгоритмов по ошибкам первого (ложная тревога) и второго (пропуск объектов) рода.

В 1-м алгоритме область принятия гипотезы H_0 (гипотеза об отсутствии объекта) представляет собой m-мерный гиперкуб в пространстве оценок $\widehat{A}_\nu$. Вектор $\mathbf{A}$ оценок $\widehat{A}_\nu$ подчиняется m-мерному закону распределения $\mathbf{A} \in N(E_\nu, \sigma^2 K_A)$, где $K_A = \begin{bmatrix} 1 & & F_i^T F_j \\ & \cdot & \\ F_i^T F_j & & 1 \end{bmatrix}$, а $E_\nu = \begin{cases} 0 & \text{при } H_0; \\ A_\nu \begin{pmatrix} F_1^T F_\nu \\ \vdots \\ F_m^T F_\nu \end{pmatrix} & \text{при } H_\nu, \end{cases}$

и, следовательно, вероятность ошибки первого рода

$$1 - \alpha_0 = \text{const} \int_{-C_1}^{+C_1} \dots \int e^{-\Xi^T K_A^{-1} \Xi} d\Xi, \tag{5}$$

а вероятность отвергнуть гипотезу H_ν, когда она верна,—

$$\alpha_\nu = \text{const} \int_{-C_1}^{+C_1} \dots \int e^{-(\Xi - E_\nu)^T K_A^{-1} (\Xi - E_\nu)} d\Xi. \tag{6}$$

Во 2-м алгоритме область принятия гипотезы H_0 представляет собой m-мерный гиперкуб в пространстве статистик T_ν (3), m-мерный вектор статистик T_ν подчиняется m-мерному нормальному закону распределения с корреляционной матрицей $\sigma^2 K_T$, где

$$\{K_T\}_{ii} = 1, \quad \{K_T\}_{ij} = \sum_1^n \lambda_i(l) \lambda_j(l) \Big/ \sqrt{\sum_1^n \lambda_i^2(l) \sum_1^n \lambda_j^2(l)},$$

и средним, равным 0 при H_0 и $\{E_\nu\}_l = A_\nu \sum_1^n \lambda_\nu(j) \lambda_l(j) / \sqrt{\sum \lambda_\nu^2(j)}$. Очевидно, что при $n = m$ корреляционные матрицы и математические ожидания совпадают. Расчет вероятности ошибок первого и второго рода аналогичен (5), (6).

В 3-м алгоритме область принятия гипотезы H_0 представляет собой гиперсферу в n-мерном пространстве статистик $\hat{\eta}(j)$ (4). Вероятность ошибки первого рода

$$1 - \alpha_0 = \int_0^r \chi_l^2(\xi)\, d\xi,$$

вероятность пропуска объекта

$$\alpha_{II} = \int_0^r \chi_l^2(\varkappa, \xi)\, d\xi,$$

где $\chi_l^2(\varkappa, \xi)$ — нецентральное χ^2-распределение с параметром нецентральности $\varkappa_\nu^2$.

Характер изменения этих ошибок зависит от конкретного вида функций $F_1, \dots, F_m$, а именно от скорости уменьшения коэффициентов разложения функций F_i по базису P_j. Поэтому перед практическим использованием описанных выше алгоритмов необходимо проведение численного расчета данных статистик.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции.— М.: Сов. радио, 1972.
2. **Левин Б. Р., Шварц В.** Вероятностные модели и методы в системах связи и управления.— М.: Радио и связь, 1985.
3. **Леман Э.** Проверка статистических гипотез.— М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию 27 октября 1987 г.