микронную толщину. От модели [2] ИДДМ отличается тем, что функциями средней энергии считаются подвижности и коэффициенты диффузии не только электронов, но и дырок, а также коэффициенты ударной ионизации. Исходные данные ИДДМ совпадают с исходными данными варианта ДДМ, в котором коэффициенты диффузии рассчитываются по формулам

$$D_p = \left[\frac{2}{3}\tau_w E v_p(E) + \frac{kT}{q}\right]\frac{v_p(E)}{E}; \quad D_n = \left[\frac{2}{3}\tau_u E v_n(E) + \frac{kT}{q}\right]\frac{v_n(E)}{E}.$$

ИДДМ достаточно экономична: при переходе от ДДМ затраты машинного времени возрастают лишь вдвое. На основе описанного метода разработана программа расчета СВЧ-параметров арсенид-галлиевых ЛПД, которая эксплуатируется на ЭВМ ЕЭСМ-6 в системе БЭСМ — АЛГОЛ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Scharfetter D. L., Gummel H. K.** Large-signal analysis of a silicon Read diode oscillator // IEEE Trans. Electron Devic.— 1969.— V. ED-16, N 1.— P. 64.
2. **Гарбер Г. З., Захаров А. Л.** Моделирование работы арсенид-галлиевых лавинно-пролетных диодов с учетом тепловой инерции электронов // Электрон. техника. Сер. 2. Полупроводниковые приборы.— 1983.— Вып. 3 (162).
3. **Mains R. K., Haddad G. I., Blakey P. A.** Simulation of GaAs IMPATT diodes including energy and velocity transport equations // IEEE Trans. Electron Devic.— 1983.— V. ED-30, N 10.— P. 1327.
4. **Польский Б. С., Римшанс Я. С.** Об одной разностной схеме для решения нестационарных задач теории полупроводниковых приборов // Численные методы механики сплошной среды.— 1985.— Т. 16, № 4.
5. **Гарбер Г. З., Захаров А. Л.** Численный метод анализа работы лавинно-пролетных диодов // Электрон. техника. Сер. 2. Полупроводниковые приборы.— 1979.— Вып. 5 (131).

Поступила в редакцию 12 июня 1987 г.

УДК 519.63

И. А. БЛАТОВ, Е. П. СОБОЛЕВСКИЙ, А. А. ТЕРТЕРЯН, В. Л. ХАЦКЕВИЧ

(Воронеж)

О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ МДП-СТРУКТУР

В статье рассмотрены вопросы математического обоснования алгоритмов численного решения фундаментальной системы уравнений (ФСУ) переноса заряда в полупроводниковых структурах. В разд. 1 исследована корректность ФСУ. В разд. 2 проведено частичное обоснование метода Гуммеля. Разд. 3 посвящен асимптотическому анализу ФСУ.

1. **Теорема существования и единственности.** Для двумерной МДП-структуры, работающей как триод, характерна следующая область изменения независимых переменных (линия Г означает $p - n$-переход) (см. рисунок). Перенос заряда в этой области при $t > 0$ описывается ФСУ [1]:

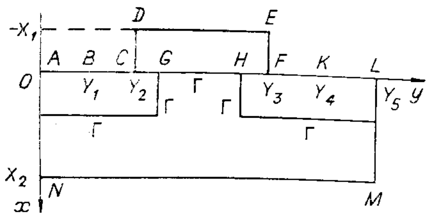
$$\varepsilon^2 \Delta\varphi = n - p - N_{np}, \ 0 < x < X_2, \ 0 < y < Y_5; \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla J_n - R(p, n), \ J_n = \mu_n(\nabla n - n\nabla\varphi), \ 0 < x < X_2, \ 0 < y < Y_5; \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla J_p - R(p, n), \ J_p = -\mu_p(\nabla p + p\nabla\varphi), \ 0 < x < X_2, \ 0 < y < Y_5; \quad (3)$$

$$\Delta\Phi = \rho(x, y), \ -X_1 < x < 0, \ Y_2 < y < Y_3. \quad (4)$$

Безразмерные величины n, p, φ, Φ представляют собой соответствующим образом нормированные концентрации электронов n и дырок p и потенциалы электрического поля φ, Φ; выражение



$$R(p,\ n)=(np-\alpha^2)/\tau_n(p+\alpha)+$$
$$+\tau_p(n+\alpha) \qquad (5)$$

характеризует рекомбинацию носителей заряда; постоянные ε^2, μ_n, μ_p, τ_n, τ_p, α положительны; $N_{np}(x,\ y)$ — заданная функция (нормированная суммарная концентрация легирующих примесей). На границе области предполагается выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial n}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial y}=0\,(AN,\ LM),\ \ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0\,(CD,\ EF); \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial n}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}=0\ (BC,\ FK); \qquad (7)$$

$$\varphi=\tilde{\varphi},\ n-p-N_{np}=0,\ np=\alpha^2(AB,\ KL,\ MN),\ \Phi=\tilde{\Phi}(DE), \qquad (8)$$

где $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\Phi}$ — заданные кусочно-непрерывные функции x и y; на общей границе верхнего и нижнего прямоугольников (т. е. на «линии склейки» CF) выполнены условия сопряжения:

$$\frac{\partial n}{\partial x}-n\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial x}+p\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0; \qquad (9)$$

$$\Phi=\varphi,\ \varepsilon_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}=Q\,(y), \qquad (10)$$

где ε_1, ε_2 — положительные константы; $Q(y)$ — заданная кусочно-непрерывная функция. Кроме того, функции n и p заданы в начальный момент времени:

$$n(0,\ x,\ y)=n_0(x,\ y),\ p(0,\ x,\ y)=p_0(x,\ y). \qquad (11)$$

Первый вопрос, который здесь возникает,— о корректности ФСУ, т. е. существует ли единственное решение задачи (1)—(11). Этот вопрос частично исследован в работах Мока (см. его книгу [2]), а также Гаевского [3].

Чтобы воспользоваться результатом из [3], достаточно проверить, что задача

$$\Delta\varphi=f,\ \Delta\Phi=F \qquad (12)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\,(AN,\ LM),\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}=0\,(BC,\ FK),\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0\,(CD,\ EF); \qquad (13)$$

$$\varphi=0\,(AB,\ KL,\ MN),\ \Phi=0\,(DE),\ \varphi=\Phi\,(CF); \qquad (14)$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0\,(CF) \qquad (15)$$

при произвольных квадратично суммируемых функциях f и F имеет единственное решение, принадлежащее пространству Соболева W_2^2. Специфика (12)—(15)— в краевом условии (15). От этого условия можно избавиться и заодно сузить область на один лишь нижний прямоугольник $ALMN$, если рассмотреть следующую задачу:

$$\Delta\Phi=F,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0\,(DC,\ EF),\ \Phi=0\,(DE),\ \Phi=\varphi\,(CF) \qquad (16)$$

в верхнем прямоугольнике $CDEF$.

Решение (16) может быть получено методом Фурье (разделения переменных). Оно имеет вид

$$\Phi\,(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\,\mathrm{sh}\left\{\frac{\pi kx}{l_2-l_1}\right\}\cos\left\{\frac{\pi k\,(y-l_1)}{l_2-l_1}\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\,(x)\cos\left\{\frac{\pi k\,(y-l_1)}{l_2-l_1}\right\}, \qquad (17)$$

где величины A_k вычисляются по формуле

$$A_k = \left[(l_2 - l_1)\,\mathrm{sh}\left\{\frac{\pi k m}{l_2 - l_1}\right\}\right]^{-1} \int\limits_0^{l_2 - l_1} \varphi(-m, y + l_1)\cos\left\{\frac{\pi k y}{l_2 - l_1}\right\} dy, \qquad (18)$$

а функции $\gamma_k(x)$ определяются из равенств

$$\gamma_k'' - \left(\frac{\pi k}{l_2 - l_1}\right)^2 \gamma_k = \frac{2}{l_2 - l_1} \int\limits_0^{l_2 - l_1} F(x, y + l_1)\cos\left\{\frac{\pi k y}{l_2 - l_1}\right\} dy; \qquad (19)$$

$$\gamma_k(0) = \gamma_k(m) = 0. \qquad (20)$$

В соотношениях (17)—(20) числа l_1, l_2 и m — соответственно длины отрезков AC, AF и CD. Отметим, что функции $\gamma_k(x)$ могут быть выписаны явным образом через известную функцию Грина задачи (19), (20).

Используя (17)—(20), запишем равенство (15) в виде краевого условия типа Бицадзе — Самарского на участке границы CF. Тогда в прямоугольнике $ALMN$ задача становится стандартной. Она, как нетрудно проверить, имеет единственное решение класса W_2^2 при любой f из L_2 [12].

Таким образом, по теореме Гаевского получаем существование и единственность решения (1)—(11); более того, при $t \to \infty$ оно стремится по некоторой норме к решению соответствующей стационарной задачи.

2. **О разностном методе.** Можно выделить два основных подхода к численному решению ФСУ. Первый состоит в том, чтобы использовать наличие малого параметра (ε^2) и применять различные асимптотические методы (см. [4—6 и др.], этому же посвящен разд. 3 настоящей статьи). Недостаток этого подхода заключается в том, что предполагается известным расположение пограничных слоев у искомого решения либо возникает задача со свободными границами. Второй подход игнорирует наличие малого параметра. Он состоит в прямом применении к ФСУ конечно-разностных методов (см., например, [7—9]). При аппроксимации ФСУ обычно используется так называемый метод Гуммеля (см. [2]), который фактически сводится к введению временного запаздывания в члены с φ в уравнениях неразрывности (2), (3). Тогда на каждом шаге по времени на первом этапе решают относительно n и p уравнения неразрывности, в которых распределение потенциала φ известно с предыдущего момента. На втором этапе определяют потенциалы φ и Φ, используя найденные концентрации электронов и дырок.

По-видимому, основную трудность здесь представляет именно вторая задача — совместное решение двух эллиптических уравнений (1), (4) в примыкающих областях со связывающими краевыми условиями на линии склейки. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Вводя сетку с шагами h и l в направлении осей x и y соответственно и заменяя производные простейшими разностными отношениями, приходим к разностной задаче вида

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{l^2} = \rho_{i,j}, \qquad (21)$$

$$i = 1, \ldots, I_1 - 1, \quad j = J_2 + 1, \ldots, J_3 - 1;$$

$$\Phi_{0,j} = \tilde{\Phi}_j, \; j = J_2, \ldots, J_3; \qquad (22)$$

$$\Phi_{i,J_2} = \Phi_{i,J_2+1}, \; \Phi_{i,J_3-1} = \Phi_{i,J_3}, \; i = 1, \ldots, I_1 - 1; \qquad (23)$$

$$\Phi_{I_1,j} = \varphi_{I_1,j}, \; \varepsilon_1(\Phi_{I_1,j} - \Phi_{I_1-1,j}) - \varepsilon_2\varphi_{I_1+1,j} - \varphi_{I_1,j} = hQ_j, \qquad (24)$$

$$j = J_2 + 1, \ldots, J_3 - 1;$$

$$\frac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{h^2}+\frac{\varphi_{i,j+1}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j-1}}{l^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}(n_{i,j}-p_{i,j}-N_{i,j}), \quad (25)$$

$$i=I_1+1,\ \ldots,\ I_2-1,\ j=1,\ \ldots,\ J_5-1;$$

$$\varphi_{I_1,j}=\tilde{\varphi}_{I_1,j},\ j=0,\ \ldots,\ J_1,\ j=J_4,\ \ldots,\ J_5; \quad (26)$$

$$\varphi_{I_1+1,j}=\varphi_{I_1,j},\ j=J_1+1,\ \ldots,\ J_2,\ j=J_3,\ldots,J_4-1; \quad (27)$$

$$\varphi_{i,0}=\varphi_{i,1},\ \varphi_{i,J_5-1}=\varphi_{i,J_5},\ i=I_1+1,\ \ldots,\ I_2-1; \quad (28)$$

$$\varphi_{I_2,j}=\tilde{\varphi}_{I_2,j},\ j=0,\ \ldots,\ J_5, \quad (29)$$

для неизвестных сеточных функций $\Phi=\{\Phi_{i,j}\colon i=0,\ \ldots,\ I_1,\ j=J_2,\ \ldots,\ J_3\}$ и $\varphi=\{\varphi_{i,j}\colon i=I_1,\ \ldots,\ I_2,\ j=0,\ \ldots,\ J_5\}$. Здесь $X_1=hI_1$, $X_1+X_2=hI_2$, $Y_s=lJ_s$, $s=1,\ldots,5$.

Применим для решения системы (21)—(29) итерационный метод переменных направлений (см. [10]), в котором итерации осуществляются в два этапа: на первом — определяются вспомогательные сеточные функции $\bar{\Phi}$ и $\bar{\varphi}$ из уравнений

$$\frac{\bar{\Phi}_{i,j}-\Phi_{i,j}}{\sigma_1}=\frac{\bar{\Phi}_{i,j+1}-2\bar{\Phi}_{i,j}+\bar{\Phi}_{i,j-1}}{l^2}+\frac{\Phi_{i+1,j}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i-1,j}}{h^2}-\rho_{i,j},$$

$$i=1,\ \ldots,\ I_1-1,\quad j=J_2+1,\ \ldots,\ J_3-1; \quad (30)$$

$$\frac{\bar{\varphi}_{i,j}-\varphi_{i,j}}{\sigma_1}=\frac{\bar{\varphi}_{i,j+1}-2\bar{\varphi}_{i,j}+\bar{\varphi}_{i,j-1}}{l^2}+\frac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{h^2}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}(n_{i,j}-p_{i,j}-N_{i,j}),$$

$$i=I_1+1,\ \ldots,\ I_2-1,\ j=1,\ \ldots,\ J_5-1,$$

и краевых условий, аналогичных (23), (28), на втором — решаются уравнения

$$\frac{\Phi_{i,j}-\bar{\Phi}_{i,j}}{\sigma_2}=\frac{\Phi_{i+1,j}-2\Phi_{i,j}+\Phi_{i-1,j}}{h^2}+\frac{\bar{\Phi}_{i,j+1}-2\bar{\Phi}_{i,j}+\bar{\Phi}_{i,j-1}}{l^2}-\rho_{i,j},$$

$$i=1,\ \ldots,\ I_1-1,\quad j=J_2+1,\ \ldots,\ J_3-1;$$

$$\frac{\varphi_{i,j}-\bar{\varphi}_{i,j}}{\sigma_2}=\frac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{h^2}+\frac{\bar{\varphi}_{i,j+1}-2\bar{\varphi}_{i,j}+\bar{\varphi}_{i,j-1}}{l^2}-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}(n_{i,j}-p_{i,j}-N_{i,j}), \quad (31)$$

$$i=I_1+1,\ \ldots,\ I_2-1,\quad j=1,\ \ldots,\ J_5-1,$$

при краевых условиях (22), (24), (26), (27), (29). Здесь σ_1 и σ_2 — положительные параметры, которые могут меняться от одной итерации к другой и выбираются из соображений оптимальности итерационного процесса.

Для обоснования применимости этого метода исключим из системы (21)—(29) граничные компоненты неизвестных функций (включая компоненты, соответствующие линии склейки двух областей) и запишем преобразованную систему в виде операторного уравнения

$$Au+Bu=F$$

в гильбертовом пространстве H сеточных функций $u=\{u_{i,j}\}$, определенных во внутренних точках сетки. Линейные операторы A и B задаются следующими формулами:

$$h^2Au_{i,j}=u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j},\quad \begin{array}{ll} i=2,\ldots,I_1-2, & j=J_2+1,\ldots,J_3-1; \\ i=I_1+2,\ldots,I_2-2, & j=1,\ldots,J_5-1; \end{array}$$

$$h^2Au_{1,j} = u_{2,j} - 2u_{1,j}, \qquad j = J_2+1, \ldots, J_3-1;$$

$$h^2Au_{I_1-1,j} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} u_{I_1+1,j} - \left(2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right) u_{I_1-1,j} + u_{I_1-2,j},$$
$$j = J_2+1, \ldots, J_3-1;$$

$$h^2Au_{I_1+1,j} = u_{I_1+2,j} - 2u_{I_1+1,j}, \quad j = 1, \ldots, J_1, \quad j = J_4, \ldots, J_5-1;$$

$$h^2Au_{I_1+1,j} = u_{I_1+2,j} - u_{I_1+1,j}, \quad j = J_1+1, \ldots, J_2, \quad j = J_3, \ldots, J_4-1;$$

$$h^2Au_{I_1+1,j} = u_{I_1+2,j} - \left(2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right) u_{I_1+1,j} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} u_{I_1-1,j},$$
$$j = J_2+1, \ldots, J_3-1;$$

$$h^2Au_{I_2-1,j} = -2u_{I_2-1,j} + u_{I_2-2,j}, \quad j = 1, \ldots, J_5-1;$$

$$h^2Bu_{i,j} = u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, I_1-1, \quad j = J_2+2, \ldots, J_3-2; \\ i = I_1+1, \ldots, I_2-1, \ j = 2, \ldots, J_5-2; \end{array}$$

$$h^2Bu_{i,J_2+1} = u_{i,J_2+2} - u_{i,J_2+1}, \quad i = 1, \ldots, I_1-1;$$

$$h^2Bu_{i,J_3-1} = -u_{i,J_3-1} + u_{i,J_3-2}, \quad i = 1, \ldots, I_1-1;$$

$$h^2Bu_{i,1} = u_{i,2} - u_{i,1}, \quad i = I_1+1, \ldots, I_2-1;$$

$$h^2Bu_{i,J_5-1} = -u_{i,J_5-1} + u_{i,J_5-2}, \quad i = I_1+1, \ldots, I_2-1.$$

Операторы A и B самосопряженные и неотрицательно определены в пространстве H со скалярным произведением

$$(u, v)_H = \varepsilon_1 hl \sum_{i=1}^{I_1-1} \sum_{j=J_2+1}^{J_3-1} u_{i,j} v_{i,j} + \varepsilon_2 hl \sum_{i=I_1+1}^{I_2-1} \sum_{j=1}^{J_5-1} u_{i,j} v_{i,j}. \tag{32}$$

Сумма их положительно определена (с нижней границей, не зависящей от шагов h, l), что дает достаточное условие (см. [10]) сходимости итерационного метода переменных направлений, а также устойчивости разностной схемы (21)—(29) в норме (32).

Отметим, что уравнения (30), (31) вместе с соответствующими краевыми условиями легко расщепляются на одномерные трехдиагональные системы, которые могут быть решены обычным методом прогонки.

3. **Асимптотический анализ ФСУ.** При численном решении ФСУ возникают серьезные трудности, связанные с наличием в уравнении для потенциала параметра ε^2. В случае малого ε уравнение становится сингулярно возмущенным и у решения ФСУ появляются узкие зоны больших градиентов (погранслои). При этом традиционные численные методы становятся малоэффективными.

Для преодоления возникающих трудностей возможны несколько подходов. Первый предполагает введение очень густой равномерной сетки в зонах погранслоев и сквозную аппроксимацию. Этот подход требует больших затрат машинного времени и памяти. Второй подход [4, 5] опирается на асимптотический анализ ФСУ. Решение ищется в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра ε, причем асимптотика строится отдельно в зонах погранслоев и вне их, а затем производится сращивание полученных разложений. При этом возможен переход от исходной задачи к задаче отыскания главного члена асимптотики. Эта последняя задача не содержит малый параметр, однако здесь возникают линии внутренних разрывов решения, на которых задаются нелинейные краевые условия. Кроме того, расположение погранслоев не всегда известно.

Перспективным представляется сочетание асимптотического анализа и сквозной аппроксимации. Вначале с помощью асимптотического анализа определяется местонахождение погранслоев и выводятся априорные оценки производных. Затем с использованием этих оценок по методу Бахвалова [11] строится сгущающаяся в области погранслоев сетка. Схема на такой сетке обладает свойством равномерной по малому параметру ε аппроксимации, а число узлов сетки от ε не зависит.

В [4] методом сращивания построено асимптотическое разложение для диода. Построим асимптотическое разложение решения задачи (1)—(11). Дополнительно предположим, что толщина затвора есть величина порядка ε; ввиду малости ε произведем тогда линейный «снос» краевых условий с DE на CF и будем рассматривать лишь уравнения для p, n, φ в прямоугольнике $ALMN$ с краевыми условиями третьего рода для φ на отрезке CF. Предположим еще, что на границе $ALMN$ выполнено условие $\partial N_{np}/\partial\xi = 0$, где ξ — внешняя нормаль к границе. Преобразованную таким образом систему (1)—(11) будем снова называть ФСУ.

Разобьем прямоугольник $ALMN$ на две области: внешнюю и внутреннюю. Внутренней областью назовем окрестность линии Γ шириной порядка ε, а внешней — дополнение к ней. Во внешней области решение будем искать в виде

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots,\ n = n_0 + \varepsilon n_1 + \ldots,\ \psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \ldots.$$

Во внутренней области введем новые независимые переменные $z = \eta/\varepsilon$, $s = \zeta$, где η и ζ — соответственно нормальная и касательная к Γ координаты, и будем искать решение в виде

$$P(t, z, s) = P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots,\ N(t, z, s) = N_0 + \varepsilon N_1 + \ldots,$$
$$\Psi(t, z, s) = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1 + \ldots.$$

Для согласования внешних и внутренних разложений потребуем выполнения условий сращивания

$$p_{\pm}^{j} = \lim_{z\to\pm\infty} P_j(t, z, s) = \lim_{\eta\to\pm 0} p_j(t, \eta, \zeta), \quad j = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$n_{\pm}^{j} = \lim_{z\to\pm\infty} N_j(t, z, s) = \lim_{\eta\to\pm 0} n_j(t, \eta, \zeta), \quad j = 0, 1, 2, \ldots; \qquad (33)$$
$$\psi_{\pm}^{j} = \lim_{z\to\pm\infty} \Psi_j(t, z, s) = \lim_{\eta\to\pm 0} \psi_j(t, \eta, \zeta), \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Отметим, что на участке границы GH z стремится только к $+\infty$ (соответственно η — только к $+0$) и для этого участка остается по одному условию сращивания для p, n, ψ.

Для определения членов разложения во внешней области подставим внешние разложения в ФСУ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε слева и справа. Для p_0, n_0, ψ_0 получим систему уравнений, которая совпадает с ФСУ (если в ней положить $\varepsilon = 0$). Порядок системы при этом понижается на два, а число краевых условий остается прежним. Однако на любом из участков границы, кроме отрезка GH, можно отбросить по одному условию. Действительно, уравнение $n_0 - p_0 - N_{np} = 0$ совпадает с одним из краевых условий на «контактах» AB, KL, MN, а на границе, свободной от контактов, выполнение одного из условий $\partial p_0/\partial\xi = 0$ или $\partial n_0/\partial\xi = 0$ автоматически влечет за собой выполнение другого, так как $\partial N_{np}/\partial\xi = 0$.

Имеющихся условий, однако, недостаточно для выделения единственного решения во внешних подобластях. Их нужно еще дополнить граничными условиями на Γ, поэтому обратимся к разложению во внутренней области. Перейдем в ФСУ к переменным t, z, s и подставим внутренние разложения для P, N, Ψ. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем уравнения для отыскания нулевых членов внутреннего разложения. Эти уравнения интегрируются в квадратурах. Используя явный вид решений и условия сращивания (33),

$$\frac{\partial}{\partial\eta} p_0(t,\eta,\zeta) + p_0(t,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(t,\eta,\zeta)\,|_{\eta=0} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta} n_0(t,\eta,\zeta) - n_0(t,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(t,\eta,\zeta)\,|_{\eta=0} = 0$$

на GH и условия

$$\mu_p\left\{\frac{\partial}{\partial\eta} p_0(t,\eta,\zeta) + p_0(t,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(t,\eta,\zeta)\right\}\Big|_{\eta=+0} =$$
$$= \mu_p\left\{\frac{\partial}{\partial\eta} p_0(t,\eta,\zeta) + p_0(t,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(t,\eta,\zeta)\right\}\Big|_{\eta=-0};$$
$$\mu_n\left\{\frac{\partial}{\partial\eta} n_0(t,\eta,\zeta) - n_0(t,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(t,\eta,\zeta)\right\}\Big|_{\eta=+0} =$$
$$= \mu_n\left\{\frac{\partial}{\partial\eta} n_0(t,\eta,\zeta) - n_0(t,\eta,\zeta)\frac{\partial}{\partial\eta}\psi_0(t,\eta,\zeta)\right\}\Big|_{\eta=-0}$$

на остальных участках границы Г. Добавление равенства $n_0 - p_0 - N_{np} = 0$ дает полный набор краевых условий, необходимых для отыскания n_0, p_0, ψ_0. Если эта задача разрешима, то главный член асимптотики можно считать построенным. Отметим, что задача для p_0, n_0, ψ_0 не содержит малый параметр и ее можно решать обычными численными методами.

Из вида асимптотики, описывающей решение в зонах погранслоев, вытекает, что i-е производные оцениваются функциями вида $\varepsilon^{-i}\exp(-\lambda_0|\eta|/\varepsilon)$. Поэтому для численного решения исходной задачи (1)—(11) в случае сквозной аппроксимации возможно применение разбиений типа Бахвалова [11].

Из вида асимптотики также вытекает, что если перейти к новым неизвестным функциям $p^* = \varphi + \ln p$, $n^* = \varphi - \ln n$ (квазипотенциалам Ферми), то главный член асимптотики для p^* и n^* в зонах погранслоев исчезает. Поэтому нормы $\operatorname{grad} p^*$ и $\operatorname{grad} n^*$ будут на один порядок по ε^{-1} меньше, чем нормы $\operatorname{grad} p$ и $\operatorname{grad} n$. Тем самым переход к p^* и n^* ослабляет эффект погранслоя и облегчает численное решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зи С.** Физика полупроводниковых приборов.— М.: Мир, 1984.
2. **Mock M. S.** Analysis of mathematical models of semiconductor devices.— Dublin: Boole Press, 1983.
3. **Gajewski H.** On existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions of the basic equations for carrier transport in semiconductors // ZAMM.— 1985.— V. 65, N 2.— P. 101.
4. **Миргородский Ю. Н., Руденко А. А., Шипилин А. В.** Метод численного расчета нестационарных характеристик двумерных биполярных полупроводниковых структур // Электрон. техника. Сер. 3. Микроэлектроника.— 1977.— Вып. 3 (69).
5. **Markowich P. A.** A singular perturbation analysis of the fundamental semiconductor device equations // SIAM J. Appl. Math.— 1984.— V. 44, N 5.— P. 896.
6. **Васильева А. Б., Стельмах В. Г.** Сингулярно возмущенные системы теории полупроводниковых приборов // ЖВМ и МФ.— 1977.— Т. 17, № 2.
7. **Польский Б. С.** Численное моделирование полупроводниковых приборов.— Рига: Зинатне, 1986.
8. **Ильин В. П.** Численные методы решения задач электрофизики.— М.: Наука, 1985.
9. **Энгль В. Л., Диркс Х. К., Майнерцхаген Б.** Моделирование полупроводниковых приборов // ТИИЭР.— 1983.— Т. 71, № 1.
10. **Самарский А. А.** Теория разностных схем.— М.: Наука, 1978.
11. **Бахвалов Н. С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии погранслоя // ЖВМ и МФ.— 1969.— Т. 9, № 4.
12. **Скубачевский А. Л.** Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Мат. сб.— 1986.— Т. 129 (171), вып. 2.

Поступила в редакцию 1 октября 1987 г.