

3. Хокни Р., Джессхоуп К. Параллельные ЭВМ.— М.: Радио и связь, 1986.
4. Бродский И. И. и др. Высокопроизводительный периферийный векторный процессор А-12 // Вопросы кибернетики.— М., 1985.— № 104.
5. Марков С., Лазаров С. Специализированная высокопроизводительная вычислительная система // Вычислительная техника социалистических стран.— М., 1986.— № 19.
6. Дыбой В. А., Косицын В. Г., Лазарев В. О. Быстродействующий периферийный процессор «Электроника-МТ70М» // Автометрия.— 1985.— № 3.
7. Lamport L. The parallel execution of DO loops // Communication of ACM.— 1974.— V. 27, N 2.
8. Березовский М. А., Минкин А. Л. Развитие координатного метода распараллеливания DO-циклов // Автометрия.— 1988.— № 1.
9. Ахо А., Ульман Д. Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции.— М.: Мир, 1978.— Т. 2.
10. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ.— М.: Мир, 1976.— Т. 1.
11. Мучник В., Шафаренко А. EVAL — язык для программирования параллельных компьютеров.— Новосибирск, 1985.— (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ИАиЭ, 281).

Поступила в редакцию 22 января 1987 г.

УДК 519.524

Ю. Е. ВОСКОВОЙНИКОВ
(Новосибирск)

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ЗАДАНЫМИ ТОЧНОСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Для многих линейных измерительных преобразователей математической моделью, связывающей входное воздействие $\varphi(y)$ и выходной сигнал $f(x)$, является интегральное соотношение вида

$$\int_{a_{\varphi}}^{b_{\varphi}} K(x-y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (1)$$

где $K(x, y)$ — аппаратная функция, искажающая входное воздействие. Задача восстановления $\varphi(y)$ по зарегистрированным значениям $f(x)$ (т. е. устранение аппаратной функции) называется обратной измерительной задачей и относится к классу некорректно поставленных [1]. Из-за неустойчивости задачи малые погрешности измерения $f(x)$ вызывают большие ошибки восстановления. Для построения устойчивого решения уравнения (1) разработаны эффективные регуляризующие методы и алгоритмы [2, 3], использующие дискретное преобразование Фурье. Однако ряд вопросов, возникающих при практическом использовании этих методов, в настоящее время остается без ответа. Это, прежде всего, относится к характеристикам разрешающей способности регуляризующего алгоритма (РА) и к построению РА с заданными точностными характеристиками. Действительно, экспериментатор может рассматривать процесс измерения и последующую обработку данных как работу комплекса «прибор + алгоритм + ЭВМ», и в этом случае важно знать динамические характеристики всего этого комплекса. Тогда, задаваясь требуемыми характеристиками комплекса «прибор + алгоритм + ЭВМ», экспериментатор выбирает «управляющие» параметры как прибора, так и алгоритма обработки. В общей постановке такой подход рассматривался в работах [4, 5], а также в докладе автора [6]. В данной работе для уравнения (1) вводятся точностные характеристики его решения, позволяющие провести содержательный анализ комплекса «прибор + алгоритм + ЭВМ» и выбрать параметр регуляризации, исходя из требуемых точностных характеристик.

Точностные характеристики регуляризующего алгоритма. Предположим, что регистрируемый сигнал $\tilde{f}(x)$ есть сумма $\tilde{f}(x) = f(x) + \eta(x)$, где $\eta(x)$ — стационарный случайный процесс (шум измерения) с нулевым средним и не коррелированный с $f(x)$. Тогда приближенное решение $\varphi_\alpha(y)$, построенное методом регуляризации, имеет вид [4]

$$\varphi_\alpha(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(\omega) \frac{\tilde{F}(\omega)}{K(\omega)} \exp(i\omega y) d\omega, \quad (2)$$

где $\tilde{F}(\omega)$, $K(\omega)$ — фурье-образы функций $\tilde{f}(x)$, $K(y)$; $W_\alpha(\omega)$ — симметричная убывающая функция ω , выполняющая роль частотного фильтра-стабилизатора и зависящая от параметра регуляризации α . Для метода регуляризации А. Н. Тихонова [4] $W_\alpha(\omega) = |K(\omega)|^2 / [|K(\omega)|^2 + \alpha Q(\omega)]$. При построении решения, оптимального по Винеру [3], $Q(\omega) = S_\eta(\omega) / S_\varphi(\omega)$, $\alpha = 1$, где $S_\eta(\omega)$, $S_\varphi(\omega)$ — спектральная плотность шума измерения и спектр сигнала $\varphi(y)$ соответственно. Возможны и другие формы определения $W_\alpha(\omega)$:

$$W_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 1/\alpha; \\ 0, & |\omega| > 1/\alpha, \end{cases} \quad W_\alpha(\omega) = \frac{1}{1 + (\alpha\omega)^m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

От величины параметра регуляризации α зависит ошибка решения $\varepsilon_\alpha(y) = \varphi_\alpha(y) - \varphi(y)$, поэтому выбор этого параметра должен быть согласован как с восстанавливаемой функцией $\varphi(y)$, так и со статистическими характеристиками шума измерения. Выбор α при неполной априорной информации связан с определенными трудностями [3].

Представим ошибку $\varepsilon_\alpha(y)$ в виде $\varepsilon_\alpha(y) = \xi_\alpha(y) + b_\alpha(y)$, где $\xi_\alpha(y) = \varphi_\alpha(y) - \bar{\varphi}_\alpha(y)$ — случайная ошибка, вызванная «проникновением» шума $\eta(x)$ в решение $\varphi_\alpha(y)$; $b_\alpha(y) = \bar{\varphi}_\alpha(y) - \varphi(y)$ — систематическая ошибка, вносимая введением фильтра-стабилизатора $W_\alpha(\omega)$. Функция $\bar{\varphi}_\alpha(y)$ — регуляризованное решение (2), построенное при точной правой части $f(x)$ и допускающее представление

$$\bar{\varphi}_\alpha(y) = \int_{-\infty}^{\infty} A_\alpha(y - y') \varphi(y') dy', \quad (3)$$

где
$$A_\alpha(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(\omega) \exp(i\omega y) d\omega.$$

Функцию $A_\alpha(y)$ назовем функцией рассеяния РА. Очевидно, что чем меньше $A_\alpha(y)$ отличается от δ -функции, тем меньше систематическая ошибка $b_\alpha(y)$ и выше разрешающая способность комплекса «прибор + алгоритм + ЭВМ». Поэтому $A_\alpha(y)$ можно трактовать как результирующую аппаратную функцию этого комплекса.

К сожалению, соотношение (3) нельзя использовать для вычисления $b_\alpha(y)$, так как функция $\varphi(y)$ неизвестна. Поэтому имеет смысл характеризовать разрешающую способность РА параметрами функции рассеяния $A_\alpha(y)$, в качестве которых примем:

$\Delta(\alpha)$ — ширину функции рассеяния на уровне 0,4, т. е.

$$\Delta(\alpha) = 2 \min_y \{y: A_\alpha(y)/A_\alpha(0) = 0,4\};$$

$\Delta_E(\alpha)$ — эквивалентную ширину:

$$\Delta_E(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} |A_\alpha(y)| dy / A_\alpha(0);$$

$O(\alpha)$ — отношение сигнал/фон:

$$O(\alpha) = A_\alpha(0) \left[\int_{-\infty}^{-\delta} A_\alpha^2(y) dy + \int_{\delta}^{\infty} A_\alpha^2(y) dy \right]^{1/2}.$$

В качестве числовой характеристики случайной ошибки $\xi_\alpha(y)$ прием дисперсию $\sigma_\xi^2(\alpha)$, определяемую выражением

$$\sigma_\xi^2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha^2(\omega) S_\eta(\omega) / |K(\omega)|^2 d\omega.$$

Для анализа и синтеза РА более информативным представляется коэффициент передачи дисперсии $K_\xi(\alpha)$, равный дисперсии случайной ошибки решения при единичной дисперсии шума измерения, т. е. $K_\xi(\alpha) = \sigma_\xi^2(\alpha) / \sigma_\eta^2$.

Введенные величины $\Delta(\alpha)$, $\Delta_E(\alpha)$, $O(\alpha)$, $K_\xi(\alpha)$ представляют достаточно полный набор точностных характеристик РА, имеющих простую физическую интерпретацию. Так, $\Delta(\alpha)$, $\Delta_E(\alpha)$ определяют наименьшие размеры «тонких» структур сигнала $\varphi(y)$, которые сохраняются в выходном сигнале $\overline{\varphi_\alpha}(y)$ комплекса «прибор + алгоритм + ЭВМ». При этом эквивалентная ширина $\Delta_E(\alpha)$ учитывает «боковые лепестки» функции рассеяния $A_\alpha(y)$. Для интерпретации $O(\alpha)$ рассмотрим формирование решения $\overline{\varphi_\alpha}(y)$ в точке y . Величина $\overline{\varphi_\alpha}(y)$ состоит из «полезной» составляющей $A_\alpha(0)\varphi(y)$ и «фона» $\int_{-\infty}^{-\delta} A_\alpha(y-y')\varphi(y')dy' + \int_{\delta}^{\infty} A_\alpha(y-y')\varphi(y')dy'$, который определяется значениями $\varphi(y')$ при $y' \neq y$. Поэтому $O(\alpha)$ можно назвать отношением сигнал/фон. Введение величины $\delta > 0$ в пределах интегрирования исключает вклад составляющей $A_\alpha(0)\varphi(y)$ в фон и при численной реализации δ задается равной шагу дискретизации.

Вычисление точностных характеристик. При построении регуляризованного решения численными методами осуществляется конечномерная аппроксимация интегральных соотношений (1), (2) и в качестве регуляризованного решения выступает вектор φ_α размерностью N_φ , проекции которого отождествляются со значениями $\varphi_\alpha(y)$ в узлах $j\Delta_\pi$, где Δ_π — шаг дискретизации функций $\varphi(y)$, $f(x)$ (подробнее см. [3]). Поэтому значения функции $A_\alpha(y)$ также вычислим в узлах $j\Delta_\pi$ на основе обратного дискретного преобразования Фурье (ДПФ):

$$A_\alpha(j\Delta_\pi) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} W_\alpha(l) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} lj\right), \quad j = 0, 1, \dots, N_\varphi - 1,$$

с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье. Значения $A_\alpha(j\Delta_\pi)$ используются в квадратурных формулах вычисления $O(\alpha)$, $\Delta_E(\alpha)$ и при определении $\Delta(\alpha)$. Последовательность $W_\alpha(l)$ имеет длину N (период последовательностей, используемых при построении решения φ_α на основе ДПФ), и ее элементы принимают только вещественные значения. Поэтому функция $A_\alpha(y)$ симметрична относительно точки $y = 0$. Это важное свойство означает отсутствие фазовых искажений в выходном сигнале $\overline{\varphi_\alpha}(y)$ (т. е. в отсутствие шума измерения) комплекса «прибор + алгоритм + ЭВМ». При статистической регуляризации последовательность $W_\alpha(l)$ задается как [3]

$$W_\alpha(l) = |\lambda_K(l)|^2 / [|\lambda_K(l)|^2 + \alpha\lambda_V(l)/\lambda_G(l)]; \quad (4)$$

для регуляризации по А. Н. Тихонову

$$W_\alpha(l) = |\lambda_K(l)|^2 / [|\lambda_K(l)|^2 + \alpha\lambda_Q(l)]. \quad (5)$$

Последовательности $\{\lambda_V(l)\}$, $\{\lambda_G(l)\}$, $\{\lambda_Q(l)\}$ длиной N определены в [3] и служат для ввода в РА априорной информации о гладкости функции

$\varphi(y)$ и статистических характеристиках шума измерения. Последовательность $\{\lambda_K(l)\}$ определяется ДПФ от значения аппаратной функции [3].

Коэффициент $K_{\xi}(\alpha)$ передачи дисперсии шума находится из соотношения

$$K_{\xi}(\alpha) = \frac{1}{\sigma_{\eta}^2} \sum_{l=0}^{N-1} W_{\alpha}^2(l) S_{\eta}(l) / |\lambda_K(l)|^2,$$

где
$$S_{\eta}(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} r_{\eta}(j) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} lj\right);$$

$r_{\eta}(j) = M[\eta(m+j)\eta(m)]$ — дискретная корреляционная функция шума измерения; $M[\cdot]$ — оператор математического ожидания. Если интервал корреляции шума меньше интервала дискретизации Δ_d , то

$$K_{\xi}(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} W_{\alpha}^2(l) / |\lambda_K(l)|^2.$$

Приведенные соотношения позволяют вычислить точностные характеристики построенного регуляризующего алгоритма и по их значениям судить о разрешающей способности комплекса «прибор + алгоритм + ЭВМ». Однако больший практический интерес представляет выбор параметра регуляризации α исходя из заданных точностных характеристик.

Вариационные задачи выбора параметра регуляризующего алгоритма. Выбор параметра РА имеет противоречивый характер: при уменьшении α улучшается разрешающая способность РА, однако возрастает коэффициент передачи дисперсии $K_{\xi}(\alpha)$; увеличение α приводит к обратному эффекту. Поэтому выбор α целесообразно осуществлять, исходя из решения следующих задач:

$$\inf_{\alpha > 0} \Delta(\alpha) \quad \text{при ограничении} \quad K_{\xi}(\alpha) \leq K_{\text{пр}}; \quad (6)$$

$$\inf_{\alpha > 0} K_{\xi}(\alpha) \quad \text{при ограничении} \quad \Delta_d < \Delta(\alpha) \leq \Delta_{\text{пр}}. \quad (7)$$

Решение α_{Δ} задачи (6) доставляет минимум ширины функции рассеяния $A_{\alpha}(y)$ при ограниченном уровне случайной ошибки. Величина α_K , являющаяся решением задачи (7), минимизирует дисперсию случайной ошибки при гарантированной разрешающей способности комплекса «прибор + алгоритм + ЭВМ».

Если $\Delta(\alpha)$ монотонно убывает при уменьшении параметра α , а коэффициент $K_{\xi}(\alpha)$ монотонно возрастает (в частности, это справедливо для фильтров-стабилизаторов (4), (5)), то решения α_{Δ} , α_K находятся известными численными методами как корни нелинейных уравнений $K_{\xi}(\alpha) = K_{\text{пр}}$; $\Delta(\alpha) = \Delta_{\text{пр}}$.

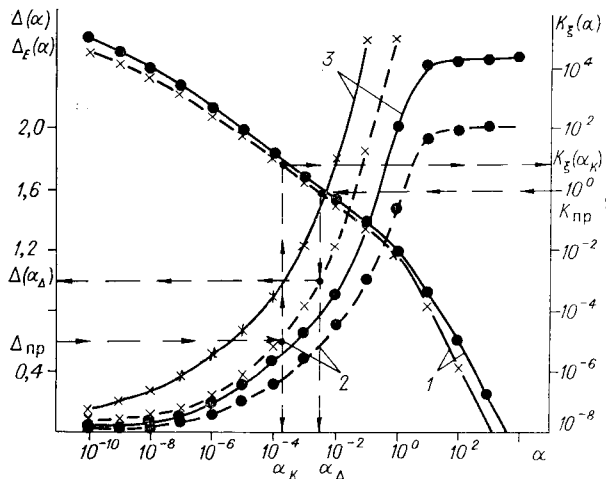
Заметим, что как показатель «качества» регуляризующего алгоритма могут быть взяты и обобщенные характеристики, например отношение $O(\alpha)/K_{\xi}^{1/2}(\alpha)$, большим значениям которого соответствуют лучшие динамические показатели комплекса «прибор + алгоритм + ЭВМ». В этом случае выбор параметра можно осуществить из условия максимума величины $O(\alpha)/K_{\xi}^{1/2}(\alpha)$.

Результаты вычислительного эксперимента. В качестве иллюстрации применения описанного подхода к выбору параметра регуляризации рассмотрим следующий вычислительный эксперимент.

Математическая модель (1) измерительного преобразователя задавалась интегральным уравнением Вольтерра I рода. Аппаратная функция $K(y)$ имела форму равнобедренной трапеции, ширина которой (на уровне 0,4 максимума) была равна: 2,7 для «широкой» и 0,7 для «узкой» аппаратной функции. Остальные величины задавались как $\Delta_d = 0,1$; $N = 256$. На рисунке представлены точностные характеристики $\Delta(\alpha)$, $\Delta_{\xi}(\alpha)$, $K_{\xi}(\alpha)$, соответствующие данным аппаратным функциям.

Точностные характеристики, соответствующие «широкой» (× ×) и «узкой» (● ●) аппаратным функциям:
 1 — $K_{\xi}(\alpha)$; 2 — $\Delta(\alpha)$; 3 — $\Delta_E(\alpha)$

Используем эти характеристики для выбора параметра регуляризации в случае «широкой» аппаратной функции. Первоначально определим параметр α из решения вариационной задачи (6) при ограничении $K_{пр} = 1$. Откладывая по оси $K_{\xi}(\alpha)$



значение $K_{пр}$ и выполнив приведенные на рисунке графические построения, находим $\alpha_{\Delta} = 3 \cdot 10^{-3}$ и $\Delta(\alpha_{\Delta}) = 1,0$. Величина $\Delta(\alpha_{\Delta}) = 1,0$ указывает, что в регуляризованном решении φ_{α} , построенном при $\alpha = \alpha_{\Delta}$, могут проявиться только структуры, ширина которых больше 1,0. Предположим, что в φ_{α} нужно сохранить структуры шириной больше 0,6. Тогда параметр регуляризации найдем из решения задачи (7) при ограничении $\Delta_{пр} = 0,6$. Графическое решение (см. рисунок) дает $\alpha_{\kappa} = 2 \cdot 10^{-4}$ и $K_{\xi}(\alpha_{\kappa}) = 10$. Видно, что увеличение разрешающей способности РА (уменьшение систематической ошибки) сопровождается увеличением уровня случайной ошибки решения. Такое поведение характерно для всех линейных регуляризирующих алгоритмов.

В заключение заметим, что предложенный в работе подход к выбору параметра регуляризации представляет своеобразную «инженерную» методику построения регуляризирующего алгоритма по заданным точностным характеристикам комплекса «прибор + алгоритм + ЭВМ». Введенные точностные характеристики имеют простой физический смысл, что позволяет экспериментатору трактовать построенный РА в терминах цифрового низкочастотного фильтра. Разработанная программная реализация описанного построения регуляризирующего алгоритма может быть использована для решения обратных измерительных задач на мини-ЭВМ и персональных компьютерах, входящих в автоматизированные системы научных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1986.
2. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация.— М.: Наука, 1983.
3. Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике.— Новосибирск: Наука, 1984.
4. Пытьев Ю. П. Задачи редукции в экспериментальных исследованиях // Мат. сб.— 1983.— Т. 120, № 2.
5. Волков Б. И., Пытьев Ю. П., Чуличков А. И. Математическое обеспечение эксперимента и численные методы обработки экспериментальной информации // Автоматизация научных исследований.— М.: МГУ, 1984.
6. Воскобойников Ю. Е. Содержательный анализ и синтез регуляризирующих алгоритмов решения интегральных уравнений I рода // Тез. докл. 2-й Респ. науч.-техн. конф. «Интегральные уравнения в прикладном моделировании».— Киев: ИИМЭ АН УССР, 1986.— Ч. II.

Поступила в редакцию 10 июня 1987 г.