ЛИТЕРАТУРА

1. **Алферов Ш. И., Горячев Д. Н., Гуревич С. А. и др.** Дифракционные решетки на поверхности GaAs, полученные методом интерференционного фототравления // ЖТФ.— 1976.— Т. 46, № 47.
2. **Егоров Б. В., Карпов С. Ю., Мизеров М. Н. и др.** Концентрирующие голографические дифракционные решетки // ЖТФ.— 1984.— Т. 54, № 10.
3. **Веревкин В. А., Донцова В. В., Ленкова Г. А.** Оптический способ изготовления киноформов // Автометрия.— 1978.— № 3.
4. **Корнейчук В. А., Пархоменко Ю. Н., Скрынский А. В., Тронько В. Д.** Оптический метод синтеза одномерных киноформов // Тез. докл. V Всесоюз. конф. по голографии.— Рига: ИФ АН ЛатвССР, 1985.
5. **Корнейчук В. А., Пархоменко Ю. Н., Тронько В. Д.** Оптический метод синтеза киноформных элементов // Квантовая электроника.— Киев: Наук. думка, 1986.— Вып. 30.

Поступило в редакцию 17 июня 1986 г.

УДК 621.317.08

К. И. КАЧИАШВИЛИ, В. А. СТЕПАНОВ

(Тбилиси)

ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕКОТОРЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Работа посвящена проблеме определения оптимальных оценок параметров некоторых нерегулярных плотностей распределения вероятностей. В [1] в качестве стандартных аппроксимаций плотностей распределения вероятностей погрешностей измерения предложены следующие: нормальная, равномерная, треугольная, трапециевидная, антимодальные I и II, усеченная Рэлея, как наиболее характерные для погрешностей измерения. Из перечисленных плотностей распределения вероятностей нормальная и равномерная плотности наиболее изучены и широко представлены в специальной литературе [2—5], поэтому их исключим из дальнейшего рассмотрения. Остальные плотности распределения вероятностей являются нерегулярными [5].

Задача оценивания неизвестных параметров плотностей распределения вероятностей заключается в выделении в общем случае из бесконечного числа возможных значений этих параметров наилучших, обладающих свойствами несмещенности, эффективности и состоятельности [2, 5]. Ниже приводятся оценки неизвестных параметров рассматриваемых нерегулярных распределений вероятностей, полученные методом максимального правдоподобия и обладающие этими свойствами.

Для треугольного закона распределения вероятностей несмещенные, эффективные и состоятельные оценки неизвестных параметров имеют вид

$$\widehat{a}_{\text{н}} = x_{\min} - (x_{\max} - x_{\min}) \frac{A(n)}{1 - 2A(n)}; \qquad (1)$$

$$\widehat{b}_{\text{н}} = x_{\max} + (x_{\max} - x_{\min}) \frac{A(n)}{1 - 2A(n)}, \qquad (2)$$

где
$$A(n) = \frac{n+1}{2^n(2n+1)} + n \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{(-1)^k}{2^{k+1}(2k+3)};$$

$x_{\min}$ и $x_{\max}$ являются крайними членами вариационного ряда $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$, полученного упорядочением результатов наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с объемом выборки n.

Для трапециевидного, антимодальных I и II распределений вероятностей несмещенные, эффективные и состоятельные оценки неизвестных параметров вычисляются по соотношениям (1) и (2), только в этих случаях коэффициенты $A(n)$ имеют соответственно вид:

n	$K(n)$ Треугольная	Трапециевидная	Антимодальная I	Антимодальная II	n	$K(n)$ Треугольная	Трапециевидная	Антимодальная I	Антимодальная II
5	0,547815	0,496581	0,142858	0,086957	70	0,087551	0,081722	0,007248	0,004809
10	0,309340	0,282275	0,056741	0,036449	80	0,081043	0,075704	0,006330	0,004202
15	0,230767	0,212034	0,035949	0,023405	90	0,075745	0,070804	0,005619	0,003732
20	0,189778	0,175133	0,026401	0,017296	100	0,071343	0,066717	0,005051	0,003356
25	0,163996	0,151770	0,020875	0,013726	150	0,056847	0,053248	0,003356	0,002232
30	0,146007	0,135395	0,017264	0,011379	200	0,048529	0,045296	0,002513	0,001672
35	0,132603	0,123150	0,014720	0,009718	250	0,042985	0,040325	0,002008	0,001337
40	0,122151	0,113565	0,012830	0,008481	300	0,038961	0,036566	0,001672	0,001114
45	0,113721	0,105836	0,011370	0,007523	350	0,035875	0,033679	0,001433	0,000982
50	0,106747	0,099427	0,010209	0,006760	400	0,033411	0,031374	0,001253	0,000935
60	0,095809	0,089348	0,008477	0,005620					

для трапециевидного распределения

$$A(n)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{2}{3(n+1)}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{2n+3}{4}\right)\right]+$$

$$+\frac{n}{3}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}(2k+3)}-\frac{2n}{3(2n+1)};$$

для антимодального I —

$$A(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k2^{n-k}\sum_{m=0}^{k}C_k^m2^m\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+2m+1}}{n-k+2m+1};$$

для антимодального II —

$$A(n)=A_1(n)+A_2(n),$$

где

$$A_1(n)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^{n-k}\sum_{m=0}^{k}(-1)^mC_k^m9^{k-m}\cdot6^m\,\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-m+1}}{2k-m+1}+\frac{1}{3\cdot2^n};$$

$$A_2(n)=\left(\frac{3}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k2^{2(n-k)}\sum_{m=0}^{k}C_k^m3^m\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k+2m+1}}{n-k+2m+1}+\frac{1}{3\cdot2^n}.$$

При вычислении несмещенных оценок неизвестных параметров рассмотренных законов распределения вероятностей на ЭВМ можно пользоваться непосредственно полученными формулами, а при вычислении на калькуляторе реализация этих формул затруднена. Поэтому в таблице затабулированы коэффициенты, на которые умножаются величины размаха при вычислении смещения. Из таблицы видно, что при объеме выборки больше 400 с практически приемлемой точностью поправку на смещение можно не вводить.

В случае усеченного закона Рэлея найти оценку неизвестного параметра усечения с нулевым смещением затруднительно, так как в выражении для смещения участвуют сами оцениваемые параметры. Поэтому вместо несмещенной оценки будем пользоваться «квазинесмещенной» оценкой

$$\widehat{a}=x_{\max}+\left(1-e^{-\frac{x_{\max}^2}{2\widehat{\sigma}^2}}\right)^{-n}\left[x_{\max}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^k\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\,\Phi\left(\frac{x_{\max}}{\widehat{\sigma}}\sqrt{\frac{k}{2}}\right)\right],$$

где $\widehat{\sigma}^2$ — оценка максимального правдоподобия дисперсии неусеченного закона Рэлея:

$$\widehat{\sigma}^2_{\text{МП}}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

Сравнение среднеквадратических отклонений смещенных и «квазинесмещенных» оценок параметра усечения показывает, что «квазинесмещенные» оценки являются более эффективными оценками.

Аналогично путем моделирования проводилось сравнение среднеквадратических отклонений смещенных и несмещенных оценок вышерассмотренных законов распределения вероятностей, которое показало эффективность несмещенных оценок по отношению к смещенным. Состоятельность несмещенных оценок вытекает из условия $A(n)/(1-2A(n)) \to 0$ при $n \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **ГОСТ 8.011—72.** Государственная система обеспечения единства измерений. Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений.— Введ. 01.01.73.
2. **Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.** Основы моделирования и первичная обработка данных.— М.: Финансы и статистика, 1983.
3. **Ефимов А. Н.** Порядковые статистики — их свойства и приложения.— М.: Знание, 1980.
4. **Дэйвид Г.** Порядковые статистики.— М.: Наука, 1979.
5. **Боровков А. А.** Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез.— М.: Наука, 1984.

Поступило в редакцию 14 апреля 1986 г.