список преобразуется в линейный массив с паспортами. Алгоритм преобразования построен по принципу «разделяй и властвуй» и имеет вычислительную сложность, близкую к $O(n \log n)$.

Рассмотрим некоторые возможности решения задач обработки графической информации на основе ЛКМ. Как вытекает из структуры ЛКМ, задачи выделения, распознавания и измерения графических объектов сводятся к задачам вычисления на множестве ломаных, многоугольников и точек, т. е. к задачам быстро развивающейся в настоящее время области вычислительной геометрии [4]. Отметим здесь, что предложенное в [5, 6] иерархическое многоуровневое представление информации позволяет уменьшить вычислительную сложность многих задач вычислитель-

Алгоритмы построения ЛКМ прошли длительную экспериментальную проверку. Эксперименты проводились с растровым сканирующим устройством ввода барабанного типа, имеющим рабочее поле 500×700 мм, дискретность 0,04 мм и скорость 300 строк/мин.

ЛКМ рассматривается как базовая математическая модель изображения, предназначенная для решения широкого класса задач автоматической обработки графической информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Башкиров О. А., Салмин С. П., Чудинович Б. М.** О приложениях последовательной обработки данных к анализу изображений // АиТ.— 1977.— № 12.
2. **Васин Ю. Г., Башкиров О. А., Рудометова С. Б.** Математические модели структурированного описания графических изображений // Автоматизация обработки сложной графической информации.— Горький: ГГУ, 1984.
3. **Васин Ю. Г., Башкиров О. А., Чудинович Б. М.** Математическая модель и алгоритмическое обеспечение обработки растрового графического изображения // Труды Международн. симп. по искусственному интеллекту (ISAI) (Ленинград 4—6 октября 1983).— Л.: IFAC, IFIP, 1983.
4. **Preparata F. P., Shamos M. I.** Computational Geometry.— N. Y.: Springer-Verlag, 1985.
5. **Васин Ю. Г.** Оптимизация описания исходных данных в диалоговых системах решения задач классификации // Современное состояние теории исследования операций.— М.: Наука, 1979.
6. **Васин Ю. Г.** Хорошо приспособленные базисы и задачи обработки экспериментальной информации: Учебное пособие.— Горький: ГГУ, 1979.

Поступила в редакцию 3 февраля 1987 г.

УДК 621.391 : 681.84

В. В. ПОСПЕЛОВ

(Москва)

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ КОРРЕКЦИИ КОНТРАСТА ИЗОБРАЖЕНИЙ

В области цифровой обработки изображений имеется ряд эвристических методов, не имеющих пока достаточного теоретического обоснования. Целенаправленные исследования этих методов важны сами по себе. Но не менее важно то, что эти исследования помогают глубже понять задачи обработки изображений и установить полезные связи с другими областями науки. Так, благодаря исследованию задачи коррекции контраста обнаружилась ее связь с моделированием случайных процессов.

Оказалось, что изображение $u(x)$ и вообще любую функцию, определен-

$u=u(x)$ — исходное изображение, $v=v(x)$ — изображение после обработки, G — передаточная функция яркостного преобразования, x — точка поля зрения $X \subseteq R^2$ (в дискретном случае x — элемент растра). Вычисление значений функции G обычно не вызывает затруднений. Проблема заключается в том, как определить функцию G, обеспечивающую улучшение контраста изображения. Одним из наиболее распространенных способов определения этой функции является приведение распределения яркостей изображения $u(x)$: $F_u(t)=\operatorname{mes}(x:u(x)<t)$ к заданному распределению $H(t)$. Это значит, что для изображения v должно выполняться тождество

$$F_v(t)=\operatorname{mes}(x:v(x)<t)\equiv H(t), \tag{1}$$

где $v(x)=G(u(x))$. Через $(x:A)$ обозначается множество точек x, удовлетворяющих условию A. Функция $F_u(t)$ называется распределением яркостей или интегральной гистограммой изображения u. (О других подходах к определению преобразования $G(t)$ и по поводу выбора функции $H(t)$ см. [1—3].) Заметим, что если $H(t)\equiv t$, то соответствующее преобразование $G(t)$ называется эквализацией изображения [2].

В данной работе выявляются необходимые и достаточные условия существования монотонного преобразования G, удовлетворяющего (1).

При решении задач обработки изображений иногда рассматривают ансамбль изображений с некоторым априорно заданным распределением вероятности. Конкретное изображение при этом трактуется как реализация случайного поля [4, 5]. Одна из целей этой работы состоит в том, чтобы дать обоснование использования вероятностного и статистического аппарата при рассмотрении изображений как детерминированных объектов. Суть дела заключается в том, что многие задачи обработки изображений так же, как и теории вероятностей, можно рассматривать как часть теории функций действительного переменного и теории меры.

Условия существования яркостного преобразования, переводящего произвольное изображение в изображение с заданным распределением. Будем называть распределением функцию $F(t)$, удовлетворяющую условиям: а) $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$; б) $F(t)$ монотонно не убывает и непрерывна слева.

Пусть $H(t)$ — заданное распределение. Определим функцию $H^*(v)$ по формуле

$$H^*(v)=\max(t:H(t)\leqslant v),\ 0\leqslant v\leqslant 1. \tag{2}$$

В силу монотонности функции H множество $(t:H(t)=v)$ есть интервал $\{\alpha_v, \beta_v]$. Фигурная скобка означает, что левый конец α_v может принадлежать или не принадлежать интервалу. Если функция $H(t)$ непрерывна в точке α_v, то получается замкнутый интервал $[\alpha_v, \beta_v]$, в противном случае — полуоткрытый интервал $(\alpha_v, \beta_v]$. Так как этот интервал всегда замкнут справа, то определение функции $H^*(t)$ корректно. Это определение обобщает понятие обратной функции для случая нестрого монотонных и разрывных функций. Легко видеть, что функция $H^*(t)$ непрерывна справа (рис. 1).

Лемма 1. Для того чтобы $H^*(v)<t$, необходимо и достаточно выполнения условия $v<H(t)$.

Доказательство. Согласно определению (2) число $H^*(v)$ является наибольшим из чисел a, удовлетворяющих неравенству $H(a)\leqslant v$. Поэтому, если $t>H^*(v)$, то $H(t)>v$. С другой стороны, если $t\leqslant H^*(v)$,

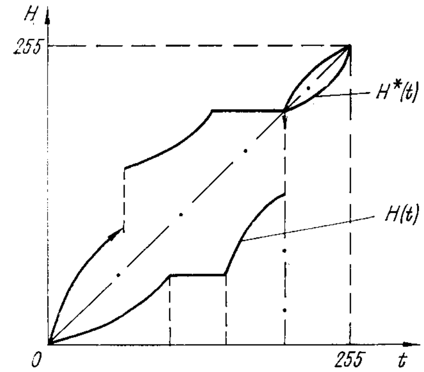

Рис. 1.

то в силу монотонности функции $H(t)$ справедливо неравенство $H(t) \leqslant \leqslant H(H^*(v)) \leqslant v$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если функция G монотонно неубывающая, то справедливы соотношения

$$(x : G(u(x)) < G(t)) \subseteq (x : u(x) < t) \subseteq (x : G(u(x)) \leqslant G(t));$$

$$\operatorname{mes}(x : G(u(x)) < G(t)) \leqslant F_u(t) \leqslant \operatorname{mes}(x : G(u(x)) < G(t)) + \operatorname{mes}(x : G(u(x)) = G(t)).$$

Лемма 3. Распределение $F_u(t)$ изображения $u(x)$ претерпевает скачок в точке t_0 величины δ в том и только в том случае, если существует множество ω меры δ, на котором изображение $u(x)$ сохраняет постоянную яркость t, т. е. $\operatorname{mes}(x : u(x) = t_0) = \delta$.

Лемма 4. Для выполнения условия $F(t) = \text{const}$ при $t \in (t_1, t_2)$ необходимо и достаточно, чтобы изображение $u(x)$ принимало значения из интервала (t_1, t_2) на множестве нулевой меры.

Утверждения лемм 2—4 непосредственно следуют из определения распределения яркостей изображения (интегральной гистограммы).

Лемма 5. Если G — монотонно неубывающая функция и $v = G(u)$, то при всех t_0 $F_v(t_1 + 0) \geqslant F_u(t_0 + 0)$, где $t_1 = G(t_0)$; F_v — распределение яркостей изображения $v = G(u)$.

Доказательство. Заметим, что $F_u(t_0 + 0) = \operatorname{mes}(x : u(x) \leqslant t_0)$. Если $u \leqslant t_0$, то в силу монотонности функции G $G(u) \leqslant G(t_0)$. Поэтому имеет место включение $(x : G(u(x)) \leqslant G(t_0)) \supseteq (x : u(x) \leqslant t_0)$. Отсюда следует, что $\operatorname{mes}(x : G(u(x)) \leqslant G(t_0)) \geqslant \operatorname{mes}(x : u(x) \leqslant t_0)$, т. е. $F_v(t_1 + 0) \geqslant F_u(t_0 + 0)$, что и требовалось доказать.

Из леммы 2 следует

Лемма 6. Если $G(t)$ — монотонно неубывающая функция и $v = G(u)$, то при всех t_0 $F_v(t_1) \leqslant F_u(t_0) \leqslant F_v(t_1 + 0)$, где $t_1 = G(t_0)$.

Обозначим через Δ_{F_u} область значений функции $F_u(t)$.

Теорема 1. Для того чтобы существовала неубывающая функция G такая, что $\operatorname{mes}(x : G(u(x)) < t) \equiv H(t)$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\Delta_H \subseteq \Delta_{F_u}. \tag{3}$$

Доказательство. Если функция F_u разрывна в точке t_0, то в силу леммы 3 функция H разрывна в точке $t_1 = G(t_0)$. Из лемм 5 и 6 следует, что $H(t_1 + 0) \geqslant F_u(t_0 + 0)$; $H(t_1) \leqslant F_u(t_0)$, а это означает, что $\Delta_H \subseteq \Delta_{F_u}$. Таким образом, необходимость условий теоремы доказана. Рассмотрим теперь их достаточность. Положим $G(t) = H^*(F_u(t))$. В силу леммы 1 справедливо равенство

$$\operatorname{mes}(x : G(u(x)) < t) = \operatorname{mes}(x : F_u(u(x)) < H(t)).$$

Для доказательства теоремы надо показать, что его правая часть тождественно равна $H(t)$. Так как $\Delta_H \subseteq \Delta_{F_u}$, то уравнение

$$F_u(v) = H(t) \tag{4}$$

всегда имеет решение относительно v. Множество этих решений в силу монотонности функции F_u связно и, следовательно, представляет собой интервал. Правый конец этого интервала всегда принадлежит множеству решений, так как функция $F_u(t)$ непрерывна слева. Таким образом, возможны два случая:

1) решения уравнения (4) образуют замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$, т. е. для всякого $a \in [\alpha, \beta]$ $F_u(a) = H(t)$;

2) решения уравнения (4) образуют полуоткрытый интервал $(\alpha, \beta]$.

Лемма 7. Для выполнения условия $F_u(v) < H(t)$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого числа $a \in (\alpha, \beta]$ имело место неравенство $v < a$.

Доказательство. Если $F_u(v) < H(t) = F_u(a)$, то в силу монотонности функции F_u $v < a$. Пусть теперь $v < a$ для каждого числа a, являющегося решением уравнения (4). Из монотонности функции F_u получаем, что

$$F_u(v) \leqslant F_u(a) = H(t). \tag{5}$$

Из условия $v < a$ для каждого числа a, являющегося решением (4), следует, что число v не может быть решением этого уравнения, т. е. $F_u(v) \neq H(t)$. Сопоставляя это неравенство с (5), приходим к

$$F_u(v) < F_u(a) = H(t).$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим случай, когда решения уравнения (4) образуют замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$. В этом случае в силу леммы 7 условие $F_u(v) < H(t)$ равносильно условию $v < \alpha$. Поэтому $\operatorname{mes}(x : F_u(u(x)) < H(t)) = \operatorname{mes}(x : u(x) < \alpha) = F_u(\alpha)$. По определению множества $[\alpha, \beta]$ $F_u(a) = H(t)$ при всех $a \in [\alpha, \beta]$. Таким образом, $\operatorname{mes}(x : F_u(u(x)) < H(t)) = H(t)$. Рассмотрим теперь второй случай, когда решения уравнения (4) образуют незамкнутый слева интервал $(\alpha, \beta]$. В силу леммы 7 условие $F_u(v) < H(t)$ равносильно условию $v < a$ для каждого $a \in (\alpha, \beta]$. Поэтому

$$(x : F_u(u(x)) < H(t)) = \bigcap_{a > \alpha} (x : u(x) < a).$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{mes}(x : F_u(u(x)) < H(t)) = \lim_{\substack{a \to \alpha \\ a > \alpha}} \operatorname{mes}(x : u(x) < a) =$$

$$= \lim_{\substack{a \to \alpha \\ a > \alpha}} F_u(a) = \lim_{\substack{\alpha \to \alpha \\ \alpha > \alpha}} H(t) = H(t).$$

Теорема доказана.

Полученный критерий удобен при практической проверке.

Если множество X трактовать как пространство элементарных случайных событий с мерой Лебега в качестве вероятности, то формально можно считать, что функция $u(x)$ представляет собой случайную величину, а интегральная гистограмма $F_u(t)$ — ее функцию распределения. Таким образом, полученный выше результат имеет вероятностную формулировку.

Теорема 1а. Для того чтобы для заданной случайной величины ξ с распределением $F_\xi(t)$ и для заданного распределения $H(t)$ существовала неубывающая функция f такая, что $\eta = f(\xi)$ и $F_\xi(t) \equiv H(t)$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\Delta_H \subseteq \Delta_{F_\xi}.$$

Следующая теорема является простым следствием известной теоремы теории вероятностей [4, с. 76].

Теорема 2. Для того чтобы два изображения u и v были связаны некоторым преобразованием $G : v = G(u)$, необходимо и достаточно соблюдения условия: для всякого a существует значение b такое, что $(x : u(x) = a) \subseteq (x : v(x) = b)$.

Несмотря на ясность и простоту указанных условий, практическое использование этой теоремы затруднительно. В заключение этого раздела приведем еще одну теорему, которая очевидна, если изображение трактовать как случайную величину.

Теорема 3. Если $u(x)$ — изображение с распределением $F_u(t)$, то

$$\int_X u(x)\,dx = \int_0^1 t\,dF_u(t).$$

Поступила в редакцию 3 июня 1985 г.

Рис. 2

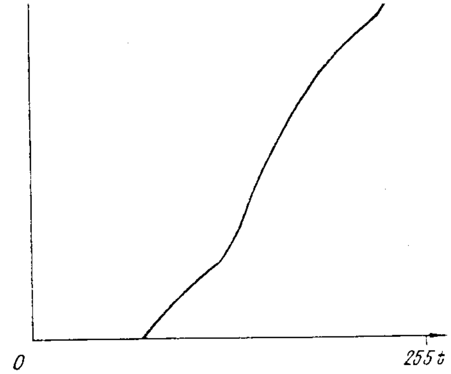

Рис. 3

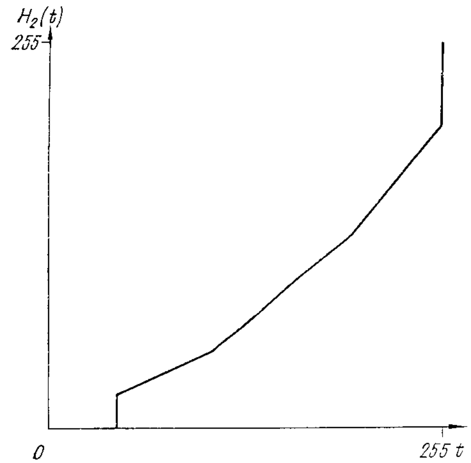

Рис. 4

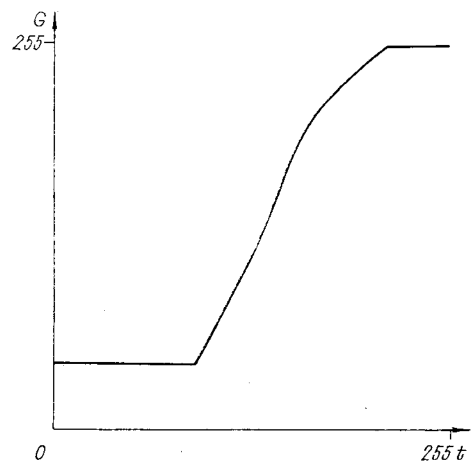

Рис. 5

Эта теорема связывает математическое ожидание, выраженное через функцию распределения, со средним значением случайной величины по пространству элементарных событий.

Числовые расчеты. Рассматриваемый численный метод коррекции контраста реализован с помощью программы вычисления передаточной функции $G(t) = H^*(F_u(t))$. Исходное изображение (рис. 2, *а*) имеет распределение H_1 (рис. 3). Как видно из графика, область значений функции H_1 составляет весь интервал [0, 1]. Поэтому согласно теоре-

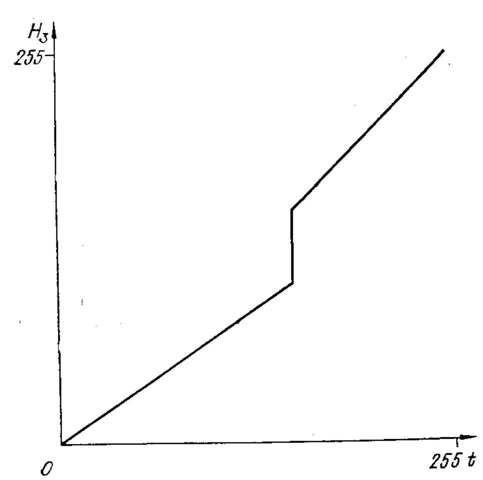

Рис. 6

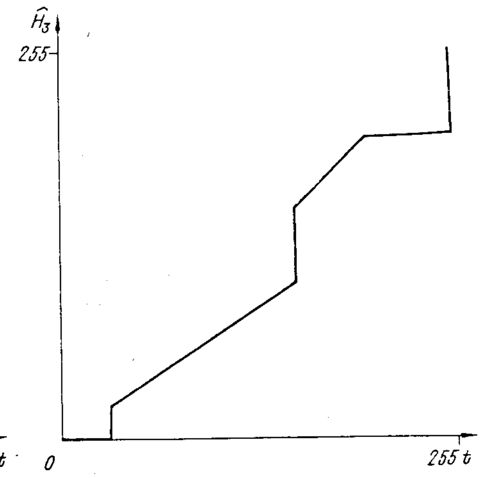

Рис. 7

ме 1 распределение H_1 можно преобразовать в любое заданное распределение, например в H_2 (рис. 4). Преобразование $G(t)$, переводящее распределение H_1 в H_2, показано на рис. 5: $G(t)=H_2^*(H_1(t))$. Изображение, полученное в результате этого преобразования, приведено на рис. 2, *б*. Его распределение имеет в точности заданный вид (см. рис. 3). В качестве примера, когда условия теоремы 1 не выполнены, можно привести изображение $u(x)$ на рис. 2, *б*, распределение которого никаким преобразованием G не может быть переведено в распределение H_3, показанное на рис. 6. Попытка в этом случае применить преобразование $G(t)=H_3^*(H_2(t))$ приводит к распределению (см. рис. 2, *в* и рис. 7), отличающемуся от заданного (см. рис. 6). Таким образом, при коррекции контраста рассмотренным методом необходимо проверять условие (4). Его проверка состоит в простом сопоставлении областей значений функций F_u и H. Если условие (4) нарушается «слабо», т. е. $\operatorname{mes}(\Delta_H \setminus \Delta_{F_u}) \ll 1$, то практическое использование преобразования $G(t)= H^*(F_u(t))$ также дает положительные результаты.

Расчеты проводились на изображениях размером 660×840 элементов с 256 градациями яркости. Задача улучшения качества изображения здесь не ставилась. Фотографии показывают лишь действие различных яркостных преобразований, построенных согласно развитой здесь теории. Вопросы, связанные с выбором априорно задаваемого распределения $H(t)$, обсуждаются в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ярославский Л. П.** Введение в цифровую обработку изображений.— М.: Сов. радио, 1979.
2. **Кронрод М. А.** Несколько задач обработки изображений // Вопр. кибернетики.— Вып. 38. Иконика, цифровая обработка изображений.— М.: Наука, 1978.
3. **Прэтт У.** Цифровая обработка изображений.— М.: Мир, 1982.— Т. 1, 2.
4. **Климов Г. П.** Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: МГУ, 1983.
5. **Миркин Л. И.** Измерение статистических характеристик изображений // Вопр. кибернетики.— Вып. 38. Иконика, цифровая обработка изображений.— М.: Наука, 1978.
6. **Морозов В. А., Поспелов В. В.** Цифровая обработка сигналов.— М.: МГУ, 1986.

Поступила в редакцию 3 июня 1985 г.