7. **Крейн М. Г.** Об интегральных уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения 2-го порядка // ДАН СССР.— 1954.— Т. 97.— С. 21—24.
8. **Kailath T.** Some new algorithm for reqursive estimation in constant linear system // IEEE Trans. Inform. Theory.— 1973.— V. IT-19, N 6.— P. 750—760.
9. **Lindquist A.** A new algorithm for optimal filtering of stationary processes // SIAM J. Control.— 1974.— V. 12(4).— P. 736—747.
10. **Fridlander B., Kailath T., Morf M., Ljung L.** Extended Levinson and Chandrasekhar equations for general discrete — time linear estimation problem // IEEE Trans. Automat. Control.— 1978.— V. AC-23, N 4.— P. 653—659.
11. **Будянов В. П., Егоршин А. О., Филиппова Н. П.** О прямом подходе к задаче идентификации // Автометрия.— 1976.— № 2.
12. **Егоршин А. О.** Новый метод цифровой идентификации и динамической фильтрации в линейных системах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М., 1979.
13. **Egorshin A.** Identification, modelling and adaptation (On optimal identification and

УДК 519.26

Я. А. БЕДРОВ
(Ленинград)

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

В практике экспериментальных физиологических исследований сложных систем с конечным числом состояний нередко возникает задача изучения причинно-следственных связей между реакцией системы и ее предысторией. Обычное интуитивное представление о механизме изучаемой связи сводится к следующему.

Предполагается, что состояния, предшествующие реакции, оказывают на систему некоторое возбуждающее или тормозящее воздействие, а воздействие самой реакции всегда тормозящее. Величина воздействия определяется как характером состояния, так и временем нахождения системы в этом состоянии. Считается, что система способна накапливать результаты воздействий отдельных состояний. Реакция системы происходит в тот момент, когда величина возбуждения достигает некоторого порогового значения.

Примером реализации подобного механизма служит система, управляющая агрессивным поведением животных. По существующим представлениям* агрессивная реакция животного возникает только при условии, что уровень агрессивной мотивации достаточно высок. В свою очередь, этот уровень может или повышаться в результате воздействия поведенческих актов, связанных с агрессивной мотивацией (обнюхивание партнера, поза угрозы), или уменьшаться из-за действия поведенческих актов, связанных с другой (например, ориентировочной) мотивацией, а также как следствие наступившей реакции.

Очевидно, что при таком представлении о механизме управления реакцией задача исследования сводится к определению значений относительных весов, с которыми различные состояния и сама реакция воздействуют на уровень возбуждения системы.

Характерной особенностью рассматриваемой задачи является то, что обычно ни текущее значение $u(t)$ величины возбуждения, ни ее пороговое значение не могут быть измерены, и единственная доступная ин-

* **Меннинг О.** Поведение животных.— М.: Мир, 1982.

формация сводится к знанию того, что в моменты возникновения реакции она достигает неизвестного порогового значения. В связи с этим представляет интерес рассмотреть принципиальную возможность идентификации подобных систем по наблюдениям последовательности их состояний и реакций.

При решении этой задачи исходим из следующих предположений. Скорость изменения величины возбуждения в момент времени t определяется тем, в каком состоянии (включая реакцию) находится система. Началу реакции соответствует моменту, когда уровень возбуждения ста-щение уровня возбуждения за время между началами двух последовательных реакций равно 0.

Особенности структуры получаемой при этом системы линейных уравнений приводят к тому, что дефект ранга ее матрицы равен 1. В связи с этим задача идентификации системы рассматривалась в двух постановках.

1. Задана одна последовательность состояний такой длины, что она может быть разбита на $l (l \geqslant 2)$ интервалов, каждый из которых содержит не менее k реакций. Предполагается, что значения $u(0)$ уровней возбуждения, соответствующие началам этих интервалов, различны и неизвестны.

2. Заданы $l (l \geqslant 2)$ последовательностей состояний, каждая из которых содержит не менее k реакций. Предполагается, что соответствующие им значения $u(0)$ равны 0.

В первом случае задача решается только с точностью до множителя. Метод решения сводится к следующему. Каждому интервалу ставится в соответствие однородная система линейных уравнений и находится ее общее решение, содержащее два свободных параметра. Далее строится система линейных уравнений, которой должны удовлетворять эти параметры. Определение с точностью до множителя вектора свободных параметров сводится к нахождению собственного вектора симметрической матрицы, соответствующего ее минимальному собственному числу.

Во втором случае каждой последовательности ставится в соответствие неоднородная система линейных уравнений и находится ее общее решение, содержащее один свободный параметр. Затем строится система линейных уравнений, которой должны удовлетворять эти параметры. Находится ее единственное решение, что позволяет однозначно решить задачу идентификации.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим систему, которая в каждый момент времени может находиться в одном из k различных внешних состояний $\{p_i\}_1^k$. Пусть внутреннее состояние системы характеризуется величиной $u(t)$, связь которой с внешними состояниями может быть записана в форме

$$u(t) = u(0) + \sum_{i=1}^{k} a_i \int_0^t f_i(t)\, dt;$$
$$f_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x(t) = p_i; \\ 0, & \text{если} \quad x(t) \neq p_i; \end{cases} \quad i = 1, \ldots, k, \tag{1}$$

где $x(t) \in \{p_i\}_1^k$ — внешнее состояние системы в момент времени t; $\{a_i\}_1^k$ — весовые коэффициенты.

Будем предполагать, что моменты перехода системы в состояния $\{p_i\}_1^{k-1}$ не зависят от величины $u(t)$, а моменты ее перехода в состояние

p_k определяются условием

$$u(t)=1. \tag{2}$$

Введем следующие ограничения:

$$\begin{aligned} &0 \leqslant u(0) < 1; \\ &a_k < 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Будем считать, что наблюдаемыми являются только внешние состояния системы. Обозначим последовательные моменты перехода системы в состояние p_k через

$$\begin{aligned} &t_i,\ i=1, \ldots, n;\ n \geqslant k; \\ &t_{i+1} > t_i \end{aligned} \tag{4}$$

и введем в рассмотрение величины

$$\tau_{ij} = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f_j(t)\,dt, \quad \begin{aligned} &i=1, \ldots, n; \\ &j=1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{5}$$

В силу (1) — (3) имеет место следующая система уравнений:

$$u(t_m) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{m} \tau_{ij} \right) a_j, \qquad m=1, \ldots, n. \tag{6}$$

Поскольку в силу (4) и (5)

$$\tau_{1k}=0, \tag{7}$$

то из (6) следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k-1} \tau_{1j} a_j = 1 - u(0); \\ &\sum_{j=1}^{k} \tau_{ij} a_j = 0, \qquad i=2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{8}$$

Введем обозначения:

$$\alpha = |a_1, \ldots, a_k|^T; \quad \underset{n\times 1}{d} = |1-u(0), 0, \ldots, 0|^T;$$

$$T = \left\| \begin{array}{c:c:c} \begin{matrix}\tau_{11}\\ \vdots \\ \tau_{n1}\end{matrix} & \ldots & \begin{matrix}\tau_{1k}\\ \vdots \\ \tau_{nk}\end{matrix} \end{array} \right\|$$

и запишем систему (8) в форме

$$d = T_\alpha. \tag{9}$$

Будем предполагать, что

$$\operatorname{rank} T_{k-1} = k-1, \quad \text{где} \quad T_{k-1} = \left\| \begin{array}{c:c:c} \begin{matrix}\tau_{11}\\ \vdots \\ \tau_{n1}\end{matrix} & \ldots & \begin{matrix}\tau_{1,k-1}\\ \vdots \\ \tau_{n,k-1}\end{matrix} \end{array} \right\|. \tag{10}$$

Очевидно, что в силу (7) и структуры вектора d он ортогонален последнему столбцу матрицы T. Поэтому из совместности системы (9) следует, что существует ее решение вида

$$\alpha^* = |a_1^*, \ldots, a_{k-1}^*, 0|^T, \tag{11}$$

а из (10) — его единственность.

Поскольку в силу (3) и (10) $\alpha^* \neq \alpha$, то очевидно, что система

$$T\alpha = 0 \tag{12}$$

должна иметь нетривиальные решения, а значит, $\operatorname{rank} T < k$, откуда в силу (10) получим $\operatorname{rank} T = k-1$.

Введем обозначение:

$$T^* = \left\| \begin{array}{c|c|c} \tau_{21} & & \tau_{2k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \tau_{n1} & & \tau_{nk} \end{array} \right\|.$$

В силу (9) из структуры вектора d следует, что первая строка матрицы T не принадлежит пространству, натянутому на строки матрицы T^*, откуда $\operatorname{rank} T^* = \operatorname{rank} T - 1 = k - 2$.

Пусть заданы $l (l \geqslant 2)$ последовательностей состояний системы, каждая из которых содержит не менее k реакций. Поставим им в соответствие матрицы $\{T_i\}_1^l$, по смыслу аналогичные матрице T. Будем предполагать, что $\operatorname{rank} T_i = k - 1$, $i = 1, \ldots, l$.

Рассмотрим задачу определения вектора α в следующих двух постановках.

1. Заданы матрицы $\{T_i\}_1^l$. Предполагается, что соответствующие им значения $u_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, l$, и, следовательно, общие решения систем $d = T_i\alpha$, $i = 1, \ldots, l$, могут быть записаны в форме

$$\alpha_i = \alpha_i^* + V_i\gamma_i, \qquad i = 1, \ldots, l, \tag{13}$$

где α_i^* — некоторое частное решение системы с соответствующим значением индекса i; V_i — решение системы

$$T_i\alpha = 0; \tag{14}$$

γ_i — свободный параметр. Предполагается, что

$$\operatorname{rank} \| V_1 \vdots \cdots \vdots V_l \| = l. \tag{15}$$

Требуется найти значение вектора α.

2. Заданы матрицы $\{T_i\}_1^l$. Предполагается, что значения $\{u_i(0)\}_1^l$ различны и неизвестны и что общие решения систем $T_i^*\alpha = 0$, $i = 1, \ldots, l$, могут быть записаны в форме

$$\alpha_i = P_i\eta_i, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{16}$$

где $\{T_i^*\}_1^l$ — матрицы, по смыслу аналогичные матрице T^*; $\{P_i\}_1^l$ — $k * 2$ — матрицы полного ранга, удовлетворяющие условиям

$$T_i^* P_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, l;$$

η_i — двумерный вектор свободных параметров.

Обозначим пространства столбцов матриц $\{P_i\}_1^l$ через $\{L_i\}_1^l$ соответственно. Очевидно, что

$$\alpha \in L_i, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{17}$$

откуда следует

$$\operatorname{rank} \| P_1 \vdots \cdots \vdots P_l \| \leqslant l + 1.$$

Будем считать, что

$$\operatorname{rank} \| P_1 \vdots \cdots \vdots P_l \| = l + 1. \tag{18}$$

Требуется найти значение вектора α с точностью до множителя.

В силу (13) и (16) значения свободных параметров $\{\gamma_i\}_1^l$ и векторов $\{\eta_i\}_1^l$ должны удовлетворять следующим системам:

$$\frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i^* + V_i\gamma_i) - \alpha_j^* - V_j\gamma_j; \tag{19}$$

$$\frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} P_i\eta_i - P_j\eta_j, \qquad j = 1, \ldots, l. \tag{20}$$

Введем следующие обозначения:

$$\underset{l\times l}{M}=\left\|\begin{array}{c:c:c:c}(1-l)/l & 1/l & & 1/l\\ 1/l & (1-l)/l & \dots & 1/l\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1/l & 1/l & & (1-l)/l\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{c:c:c}M(1) & \dots & M(l)\end{array}\right\|;$$

$$Y(i)=\|\alpha_1^*\vdots\cdots\vdots\alpha_l^*\|M(i);$$

$$Z(i)=\|V_1\vdots\cdots\vdots V_l\|\operatorname{diag}\{(M(i))^T\};$$

$$W(i)=\|P_1\vdots\cdots\vdots P_l\|\operatorname{diag}\{(M(i))^T\},\quad i=1,\dots,l;$$

$$Y=\left\|\begin{matrix}Y(1)\\ \vdots\\ Y(l)\end{matrix}\right\|;\quad Z=\left\|\begin{matrix}Z(1)\\ \vdots\\ Z(l)\end{matrix}\right\|;\quad W=\left\|\begin{matrix}W(1)\\ \vdots\\ W(l)\end{matrix}\right\|;$$

$$\gamma=|\gamma_1,\dots,\gamma_l|^T;\ \eta=|\eta_{11},\eta_{12},\dots,\eta_{l1},\eta_{l2}|^T.$$

В этих обозначениях системы (19) и (20) запишутся соответственно в виде

$$\begin{gathered}Y+Z\gamma=0;\\ W\eta=0.\end{gathered}\tag{21}$$

Рассмотрим вопрос о ранге матриц Z и W. Введем обозначение:

$$R(F_1,\dots,F_l)=\left\|\begin{array}{c:c:c:c}(1-l)/l\ F_1 & 1/l\ F_2 & & 1/l\ F_l\\ 1/l\ F_1 & (1-l)/l\ F_2 & \dots & 1/l\ F_l\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1/l\ F_1 & 1/l\ F_2 & & (1-l)/l\ F_l\end{array}\right\|.$$

В силу определения матриц Z и W

$$Z=R(V_1,\dots,V_l);\ W=R(P_1,\dots,P_l).$$

Выполним над строками матрицы $R(F_1,\dots,F_l)$ следующие невырожденные линейные преобразования. Вычтем из строк $(l-1)$ первых k-строчных блоков соответствующие строки последнего k-строчного блока, а затем сложим строки последнего блока с соответствующими строками первых $(l-1)$ блоков, умноженными на $1/l$. В результате получим матрицу

$$R^*(F_1,\dots,F_l)=\left\|\begin{array}{c:c:c:c:c}-F_1 & 0 & & 0 & F_l\\ 0 & -F_2 & & 0 & F_l\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & & -F_{l-1} & F_l\\ 0 & 0 & & 0 & F_l\end{array}\right\|.$$

Из структуры первых $l-1$ столбцов матрицы $Z^*=R^*(V_1,\dots,V_l)$ и условия (15) следует, что

$$\operatorname{rank}Z=\operatorname{rank}Z^*=l.$$

Из структуры первых $2(l-1)$ столбцов матрицы $W^*=R^*(P_1,\dots,P_l)$ и полноты ранга матриц $\{P_i\}_1^l$ следует, что ранг этих столбцов полный, откуда в силу (17) и (18) получим

$$\operatorname{rank}W=\operatorname{rank}W^*=2(l-1)+1.$$

Следовательно, если $u_i(0)=0$, $i=1,\dots,l$, то значения $\{\gamma_i\}_1^l$ могут быть найдены как единственное решение линейной системы (21), а значение вектора α вычислено по формуле

$$\alpha=\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i^*+V_i\gamma_i).$$

Если значения $\{u_i(0)\}_1^l$ различны и неизвестны, то вектор η определяется только с точностью до множителя. Для этого достаточно вычислить значение собственного вектора матрицы W^TW, соответствующего ее единственному нулевому собственному числу. Значение (с точ-

УДК 681.513.6

А. Н. БЕНДИЧ, Н. Н. БЕНДИЧ

(Иркутск)

АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

В настоящей работе рассматриваются алгоритмы, позволяющие в режиме нормального функционирования по наблюдаемым входу и выходу подбирать такие параметры управляющего воздействия, которые обеспечивают экстремум заданного функционала. Предлагаемые алгоритмы применимы в задачах управления [1], сочетающих в себе методы идентификации и подстройки входных воздействий одновременно, в задачах слежения за объектом и сопротивления его, в задачах, связанных с изучением и регулированием биологических систем и т. п. Остановимся на задаче управления, все остальные сведутся к ней переосмысливанием пространств состояния, наблюдения и управления объектом.

Недоступность измерения некоторых параметров, их постоянные изменения, наличие некоторого дрейфа относительно оптимального режима работы создают предпосылки для создания системы управления, обеспечивающей постоянный поиск оптимального режима.

Пусть предполагаемый объект управления — сложный технологический объект, т. е. находится под воздействием различного рода стохастических возмущений, является многомерным, а его параметры связаны нелинейными соотношениями, которые, как правило, не могут быть выявлены. Предположим также, что качество работы на определенном этапе характеризуется стабильностью некоторых наблюдаемых параметров. Критерием управления предлагается рассматривать максимум вероятности того, что текущие значения на выходе не превысят нормативные показатели.

Считаем, что имеем дело с дискретным (или рассматриваемым в дискретные моменты времени) объектом, который можно определить совокупностью замкнутых множеств в евклидовых пространствах $\{X, Y, U\}$. Элементы этих множеств — соответственно значения векторов состояния $\mathbf{x}$, допустимых векторов управления $\mathbf{u}$ и выходных векторов $\mathbf{y}$.

Все множество Y разобьем на два (Y_1 и $Y_2 = Y \setminus Y_1$) таким образом, чтобы $\mathbf{y} \in Y_1$ являлся желаемым в каком-либо смысле. Тогда существует ненулевая условная вероятность

$$P(\mathbf{y}_{t+1} \in Y_1/\mathbf{y}_t,\ \mathbf{u}_t).$$

Таким образом, каждой паре $\mathbf{u}_t$, $\mathbf{y}_t$ ставим в соответствие функцию вероятности $P(\mathbf{y}_t,\ \mathbf{u}_t)$: $Y \cup U \to R^1$. Тогда оптимальное с точки зрения выбранного критерия управление на каждом шаге является функцией от наблюдаемого вектора $\mathbf{y}_t$, т. е. $\mathbf{u}^*(\mathbf{y}_t)$. Значит, без ограничения общности можно считать, что определяется управляющее воздействие, доставляющее безусловный максимум функции $P(\mathbf{u}(\mathbf{y}_t))$: $U \to R^1$. Следовательно,