динамических объектов, в которых возникающие при вычислении оценок матрицы $P_t = (\widetilde{F}_t^* F_t)^{-1}$ плохо обусловлены и, возможно, значительна размерность вектора оцениваемых параметров θ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления: Пер. под ред. Н. С. Райбмана.— М.: Мир, 1975.
2. **Мелешко В. И.** Применение рекуррентных оптимальных оценок с псевдообраще-

U*DU-факторизации симметричных матриц и их применение.— Киев, 1986.— (Препринт/АН УССР, Ин-т кибернетики; № 86—6).

7. **Campbell Y. K., Synnot S. P., Bierman G. J.** Voyager orbit determination at Jupiter // IEEE Trans. on Autom. Contr.— 1983.— V. AC-28, N 3.— P. 256—268.
8. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание: Пер. под ред. Я. З. Цыпкина с доб. Р. Ш. Липцера.— М.: Наука, 1977.
9. **Agee W. S., Turner P. H.** Triangular decomposition of a positive definite matrix plus a symmetric dyad with application to Kalman filtering // White Sands Missile Range Tech. Rep.— 1972.— N 38.

Поступила в редакцию 30 июня 1986 г.

УДК 621.391.172

В. П. СИЗОВ

(Москва)

ВЛИЯНИЕ КОРРЕЛИРОВАННОСТИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ НА ТОЧНОСТЬ РАБОТЫ ДИСКРЕТНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Классические рекуррентные алгоритмы дискретной оптимальной линейной фильтрации [1] построены в предположении о некоррелированности ошибок измерений. Однако любой реальный измерительный канал имеет ограниченную полосу пропускания, вследствие чего указанная гипотеза, строго говоря, физически нереализуема. Выходом из ситуации является преобразование уравнений динамики объекта и измерений к требуемой канонической форме либо путем включения в состав оцениваемых параметров неизвестных характеристик случайного процесса ошибок измерений (так называемый «метод расширения вектора состояния» [2]), либо «декорреляцией» случайного процесса за счет формирования «разностных измерений» [3]. Однако в обоих случаях значительно возрастает объем необходимых вычислений, что побуждает на практике часто отказываться от подобных модификаций и ограничиваться более простым в реализации алгоритмом фильтра Калмана [1]. Получаемая при этом погрешность оценок устанавливается обычно экспериментально или моделированием устройства на ЭВМ.

В настоящей работе алгоритм фильтра Калмана дополнен рекуррентными соотношениями для аналитического определения корреляционной матрицы ошибки формируемых им квазиоптимальных оценок вектора состояния дискретной линейной динамической системы при коррелированных ошибках измерений.

Исходные соотношения. Линейная дискретная система с вектором состояния $x(n)$, вектором возмущения $\xi(n-1)$ и вектором измерения

$z(n)$, динамика которой задается переходной матрицей состояния $\Phi(n, n-1)$ и матрицей возмущения $\Gamma(n, n-1)$, описывается уравнениями

$$x(n)=\Phi(n, n-1)x(n-1)+\Gamma(n, n-1)\xi(n-1); \tag{1}$$

$$z(n)=H(n)x(n)+v(n) \tag{2}$$

для $n=1, 2, \ldots$ с начальным условием $x(0)$ и матрицей измерения $H(n)$.

Ошибка измерения $v(n)$ отождествляется с вектором состояния некоторой дополнительной линейной динамической системы (формирующего фильтра) с переходной матрицей $\Phi_1(n, n-1)$, матрицей возмущения $\Gamma_1(n, n-1)$ и вектором возмущения $\eta(n-1)$:

$$v(n)=\Phi_1(n, n-1)v(n-1)+\Gamma_1(n, n-1)\eta(n-1) \tag{3}$$

для $n=1, 2, \ldots$ с начальным условием $v(0)$.

Предполагается, что возмущения $\{\xi(n-1), n=1, 2, \ldots\}$ и $\{\eta(n-1), n=1, 2, \ldots\}$ — последовательности случайных векторов с известными корреляционными матрицами

$$E[\xi(n)\xi^{\text{т}}(n)]=Q(n); \quad E[\eta(n)\eta^{\text{т}}(n)]=R(n), \tag{4}$$

где E — оператор усреднения и «т» — операция транспонирования. Обе последовательности не зависят друг от друга и от начальных условий $x(0)$, $v(0)$.

При взаимно некоррелированных ошибках $\{v(n), n=1, 2, \ldots\}$

$$E[v(n)v^{\text{т}}(n)]=V(n)\delta_{kn},$$

где δ_{kn} — символ Кронекера, оптимальная в смысле минимума дисперсии оценка $\hat{x}(n\mid n)$ вектора состояния $x(n)$ системы (1), основанная на измерениях $\{z(k), k=1, 2, \ldots, n\}$ вида (2), формируется по рекуррентному алгоритму Калмана [1]:

$$\hat{x}(n\mid n)=\hat{x}(n\mid n-1)+K(n)[z(n)-H(n)\hat{x}(n\mid n-1)]; \tag{5}$$

$$\hat{x}(n\mid n-1)=\Phi(n, n-1)\hat{x}(n-1\mid n-1); \tag{6}$$

$$K(n)=P(n\mid n-1)H^{\text{т}}(n)[H(n)P(n\mid n-1)H^{\text{т}}(n)+V(n)]^{-1}; \tag{7}$$

$$P(n\mid n-1)=\Phi(n, n-1)P(n-1\mid n-1)\Phi^{\text{т}}(n, n-1)+$$
$$+\Gamma(n, n-1)Q(n-1)\Gamma^{\text{т}}(n, n-1); \tag{8}$$

$$P(n\mid n)=[I-K(n)H(n)]P(n\mid n-1) \tag{9}$$

для $n=1, 2, \ldots$, где I — единичная матрица, а начальные условия для уравнений (6) и (8) задаются соответственно априорной оценкой $\hat{x}(0\mid 0)$ вектора начального состояния $x(0)$ и корреляционной матрицей $P(0\mid 0)$ ее ошибки $\tilde{x}(0\mid 0)=\hat{x}(0\mid 0)-x(0)$, не коррелированной с $\{\xi(n-1), \eta(n-1), n=1, 2, \ldots\}$. При этом $P(n\mid n)$ представляет собой корреляционную матрицу ошибки оптимальной оценки $\hat{x}(n\mid n)$ текущего состояния $x(n)$, вычисляемую по формулам (7)—(9) без использования измерений $z(n)$.

Коррелированность ошибок измерений $\{v(n), n=1, 2, \ldots\}$ приводит к уменьшению количества новой информации в каждом последующем измерении, что ухудшает качество оценок $\hat{x}(n\mid n)$, определяемых алгоритмом (5)—(9). Матрица $P(n\mid n)$ уже не отражает истинной погрешности оценок, а сам алгоритм теряет свою оптимальность. В этих условиях оптимальность оценки обеспечивается более сложным алгоритмом разностных измерений [3]:

$$\hat{x}(n\mid n)=\hat{x}(n\mid n-1)+K(n)[z_{\text{э}}(n)-H_{\text{э}}(n)\hat{x}(n\mid n-1)]; \tag{10}$$

$$\hat{x}(n\mid n-1)=\Phi(n, n-1)\hat{x}(n-1\mid n-1); \tag{11}$$

$$z_э(n) = z(n) - \Phi_1(n, n-1)z(n-1); \quad (12)$$

$$H_э(n) = H(n) - \Phi_1(n, n-1)H(n-1)\Phi^{-1}(n, n-1); \quad (13)$$

$$K(n) = [H_э(n)\Phi(n, n-1)P(n-1|n-1)\Phi^т(n, n-1) + H(n)\Gamma(n, n-1)Q(n-1)\Gamma^т(n, n-1)]^т [H_э(n)\Phi(n, n-1)P(n-1|n-1) \times \Phi^т(n, n-1)H_э^т(n) + H(n)\Gamma(n, n-1)Q(n-1)\Gamma^т(n, n-1)H^т(n) + \Gamma_1(n, n-1)R(n-1)\Gamma_1^т(n, n-1)]^{-1}; \quad (14)$$

$$P(n|n-1) = \Phi(n, n-1)P(n-1|n-1)\Phi^т(n, n-1) + \Gamma(n, n-1)Q(n-1)\Gamma^т(n, n-1); \quad (15)$$

$$P(n|n) = P(n|n-1) - K(n)[H_э(n)\Phi(n, n-1)P(n-1|n-1)\Phi^т(n, n-1) + H(n)\Gamma(n, n-1)Q(n-1)\Gamma^т(n, n-1)] \quad (16)$$

для $n = 2, 3, \ldots$ с начальными условиями

$$\hat{x}(1|1) = \hat{x}(1|0) + P(1|0)H^т(1)[H(1)P(1|0)H^т(1) + V(1)]^{-1}[z(1) - H(1)\hat{x}(1|0)]; \quad (17)$$

$$P(1|1) = P(1|0) - P(1|0)H^т(1)[H(1)P(1|0)H^т(1) + V(1)]^{-1}H(1)P(1|0), \quad (18)$$

где
$$\hat{x}(1|0) = \Phi(1, 0)\hat{x}(0|0); \quad (19)$$

$$P(1|0) = \Phi(1, 0)P(0|0)\Phi^т(1, 0) + \Gamma(1, 0)Q(0)\Gamma^т(1, 0); \quad (20)$$

$$V(1) = \Phi_1(1, 0)V(0)\Phi_1^т(1, 0) + \Gamma_1(1, 0)R(0)\Gamma_1^т(1, 0); \quad (21)$$

$$V(0) = E[v(0)v^т(0)]. \quad (22)$$

Как и в алгоритме Калмана (5)—(9), корреляционная матрица $P(n|n)$ ошибки получаемой здесь оценки определяется рекуррентными соотношениями (14)—(16), не зависящими от измерений $z(n)$.

Корреляционная матрица ошибки квазиоптимальной оценки. Для нахождения корреляционной матрицы $P^*(n|n)$ ошибки квазиоптимальной оценки $\hat{x}^*(n|n)$, получаемой при использовании алгоритма (5)—(9) вместо (10)—(22) в условиях коррелированности ошибок измерений, представим совокупность $\{z(k), k = 1, 2, \ldots, n\}$ этих измерений в следующей векторно-матричной форме [3]:

$$\bar{z}(n) = \bar{H}(n)x(n) + \bar{v}(n), \quad (23)$$

где

$$\bar{z}(n) = \begin{bmatrix} \bar{z}(n-1) \\ z(n) \end{bmatrix}; \quad \bar{H}(n) = \begin{bmatrix} \bar{H}(n-1)\Phi^{-1}(n, n-1) \\ H(n) \end{bmatrix}; \quad \bar{v}(n) = \begin{bmatrix} \bar{v}_1(n-1) \\ v(n) \end{bmatrix}; \quad (24)$$

$$\bar{v}_1(n-1) = \bar{v}(n-1) - \bar{H}(n-1)\Phi^{-1}(n, n-1)\Gamma(n, n-1)\xi(n-1) \quad (25)$$

для $n = 2, 3, \ldots$ с начальными условиями $\bar{z}(1) = z(1)$, $\bar{H}(1) = H(1)$, $\bar{v}(1) = v(1)$.

Согласно методу наименьших квадратов [4], оптимальная оценка $\hat{x}(n|n)$ вектора состояния $x(n)$ полностью наблюдаемой линейной динамической системы (1), основанная на измерениях (23) и минимизирующая критерий качества

$$J_G = [\bar{H}(n)\hat{x}(n|n) - \bar{z}(n)]^т\bar{G}(n)[\bar{H}(n)\hat{x}(n|n) - \bar{z}(n)]$$

с симметрической весовой матрицей $\bar{G}(n)$, имеет вид

$$\hat{x}(n|n) = [\bar{H}^т(n)\bar{G}(n)\bar{H}(n)]^{-1}\bar{H}^т(n)\bar{G}(n)\bar{z}(n). \quad (26)$$

Погрешность $\tilde{x}(n|n)$ этой оценки выражается формулой

$$\tilde{x}(n|n) = \hat{x}(n|n) - x(n) = [\bar{H}^т(n)\bar{G}(n)\bar{H}(n)]^{-1}\bar{H}^т(n)\bar{G}(n)\bar{v}(n),$$

а ее корреляционная матрица есть

$$P(n \mid n) = E[\tilde{x}(n \mid n)\tilde{x}^{\text{т}}(n \mid n)] =$$
$$= [\overline{H}^{\text{т}}(n)\overline{G}(n)\overline{H}(n)]^{-1}\overline{H}^{\text{т}}(n)\overline{G}(n)\overline{V}(n)\overline{G}(n)\overline{H}(n)[\overline{H}^{\text{т}}(n)\overline{G}(n)\overline{H}(n)]^{-1}, \tag{27}$$

где

$$\overline{V}(n) = E[\overline{v}(n)\overline{v}^{\text{т}}(n)]. \tag{28}$$

Подставляя сюда последнее соотношение из (24) и учитывая независимость $v(n)$ и $v(n-1)$ от $\xi(n-1)$, получаем

$$\overline{V}(n) = \begin{bmatrix} \overline{V}_1(n-1) & \overline{L}^{\text{т}}(n, n-1) \\ \overline{L}(n, n-1) & V(n) \end{bmatrix}; \tag{29}$$

$$\overline{V}_1(n-1) = E\left[\overline{v}_1(n-1)\,\overline{v}_1^{\text{т}}(n-1)\right] = \overline{V}(n-1) + \overline{H}(n-1)\,\Phi^{-1}(n, n-1)\times$$
$$\times\Gamma(n, n-1)\,Q(n-1)\,\Gamma^{\text{т}}(n, n-1)\,\Phi^{-\text{т}}(n, n-1)\,\overline{H}^{\text{т}}(n-1); \tag{30}$$

$$\overline{L}(n, n-1) = E\left[v(n)\,\overline{v}_1^{\text{т}}(n-1)\right] = E\left[v(n)\,\overline{v}^{\text{т}}(n-1)\right]; \tag{31}$$

$$V(n) = E\left[v(n)\,v^{\text{т}}(n)\right], \tag{32}$$

где «—т» — совокупность коммутативных матричных операций обращения и транспонирования.

Среднеквадратическая погрешность оценки (26) минимальна [4], когда $\overline{G}(n) = \overline{V}^{-1}(n)$. При этом из (26) с учетом (24) и (29) вытекает рекуррентный алгоритм (10)—(22) оптимальной линейной фильтрации по методу разностных измерений [3].

Если ошибки измерений (2) не коррелированы, то вместо (29) имеем

$$\overline{W}(n) = \begin{bmatrix} \overline{W}_1(n-1) & 0 \\ 0 & V(n) \end{bmatrix}; \tag{33}$$

$$\overline{W}_1(n-1) = \overline{W}(n-1) + \overline{H}(n-1)\,\Phi^{-1}(n,\ n-1)\,\Gamma(n,\ n-1)\times$$
$$\times Q(n-1)\,\Gamma^{\text{т}}(n,\ n-1)\,\Phi^{-\text{т}}(n,\ n-1)\,\overline{H}^{\text{т}}(n-1) \tag{34}$$

и, полагая в (27) $\overline{G}(n) = \overline{W}^{-1}(n)$, $\overline{V}(n) = \overline{W}(n)$, получаем

$$P(n \mid n) = [\overline{H}^{\text{т}}(n)\overline{W}^{-1}(n)\overline{H}(n)]^{-1}. \tag{35}$$

При этом алгоритм (10)—(22) переходит в алгоритм (5)—(9) фильтра Калмана [3].

Наконец, в случае, когда оценки вычисляются по алгоритму (5)—(9) при коррелированных ошибках измерений, весовая матрица $\overline{G}(n)$ в (27) совпадает с $\overline{W}^{-1}(n)$, а матрица $\overline{V}(n)$ определяется формулой (29). В результате корреляционная матрица ошибки квазиоптимальной оценки $\hat{x}^*(n \mid n)$ принимает вид

$$P^*(n \mid n) = [\overline{H}^{\text{т}}(n)\times$$
$$\times\overline{W}^{-1}(n)\overline{H}(n)]^{-1}\overline{H}^{\text{т}}(n)\times$$
$$\times\overline{W}^{-1}(n)\overline{V}(n)\overline{W}^{-1}(n)\overline{H}(n)\times$$
$$\times[\overline{H}^{\text{т}}(n)\overline{W}^{-1}(n)\overline{H}(n)]^{-1}. \tag{36}$$

Эквивалентной формой представления данного соотношения является следующая система рекуррентных уравнений (см. приложение):

$$P^*(n \mid n) = [I -$$
$$- K(n)H(n)][P^*(n \mid n-1) +$$

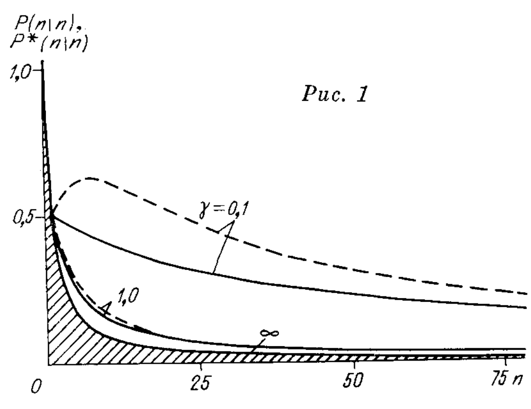

Рис. 1

$$+P(n \mid n-1)H^{\mathrm{T}}(n)V^{-1}(n)S(n,\ n-1)P(n-1 \mid n-1)\Phi^{\mathrm{T}}(n,\ n-1)+$$
$$+\Phi(n,\ n-1)P(n-1 \mid n-1)S^{\mathrm{T}}(n,\ n-1)V^{-1}(n)H(n)P(n \mid n-1)+$$
$$+P(n \mid n-1)H^{\mathrm{T}}(n)V^{-1}(n)H(n)P(n \mid n-1)]\,[I-K(n)H(n)]; \qquad (37)$$

$$V(n)=\Phi_1(n, n-1)\,V(n-1)\,\Phi_1^{\mathrm{T}}(n, n-1)+\Gamma_1(n, n-1)\times$$
$$\times R(n-1)\,\Gamma_1^{\mathrm{T}}(n, n-1); \qquad (38)$$

$$P^*(n \mid n-1)=\Phi(n,\ n-1)P^*(n-1 \mid n-1)\Phi^{\mathrm{T}}(n,\ n-1)+$$
$$+\Gamma(n,\ n-1)Q(n-1)\Gamma^{\mathrm{T}}(n,\ n-1); \qquad (39)$$

$$S(n+1,\ n)=\Phi_1(n+1,\ n)[S(n,\ n-1)P(n-1 \mid n-1)\times$$
$$\times\Phi^{\mathrm{T}}(n,\ n-1)P^{-1}(n \mid n-1)+H(n)] \qquad (40)$$

для $n=2,\ 3,\ \ldots$ с начальными условиями $V(0)$, $P^*(1 \mid 1)=P(1 \mid 1)$ и $S(2,\ 1)=\Phi_1(2,\ 1)H(1)$, где матрицы $K(n)$, $P(n-1 \mid n-1)$ и $P(n \mid n-1)$ вычисляются по формулам (7)—(9) фильтра Калмана.

Пример. Качество оценок, формируемых по алгоритму Калмана (5)—(9) в условиях коррелированности ошибок измерений, удобно продемонстрировать на простом примере оценивания постоянного скалярного параметра x, положив $\Phi(n,\ n-1)\equiv 1$, $\Gamma(n,\ n-1)\equiv 0$, $H(n)\equiv 1$ и используя в качестве формирующего фильтра измерительного канала

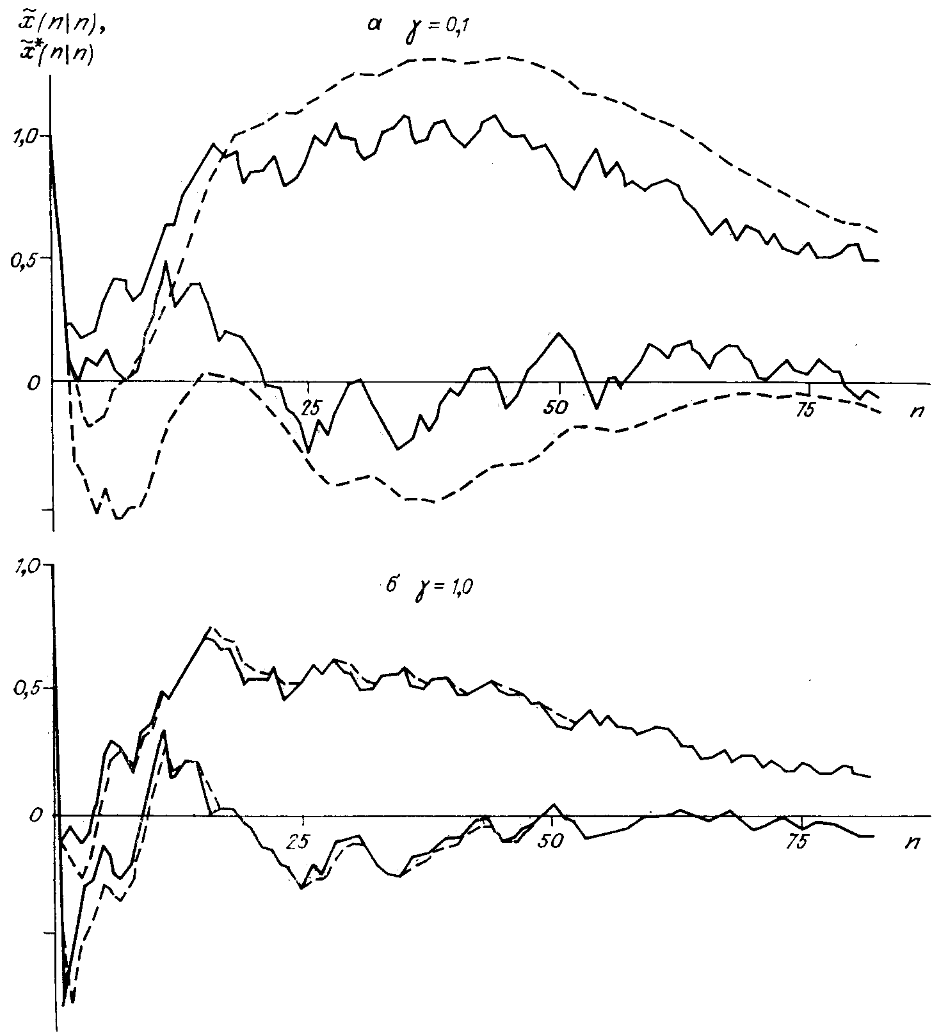

Рис. 2

интегрирующую RC-цепочку с постоянной времени $T_\phi = RC$, так что $\Phi_1(n,\ n-1) = \exp(-\gamma)$ и $\Gamma_1(n,\ n-1) = 1 - \exp(-\gamma)$, где $\gamma = T/T_\phi$; T — фиксированный временной интервал между измерениями.

Для определенности можно положить, что переходный процесс в формирующем фильтре закончился до начала измерений и выходной шум $v(n)$ имеет постоянную дисперсию $V(n) = V = \mathrm{const}$, связанную с дисперсией $R(n) = R = \mathrm{const}$ входного шума $\eta(n)$ соотношением $V = R\,\mathrm{th}(\gamma/2)$, вытекающим из (38) при $V(n) = V(n-1) = V$.

На рис. 1 приведены результаты численных расчетов дисперсий $P(n\mid n)$ и $P^*(n\mid n)$ оценок $\hat{x}(n\mid n)$ и $\hat{x}^*(n\mid n)$ по формулам (13)—(16) (сплошные кривые) и (37)—(40) (штриховые кривые), полученные для данного случая при $P(0\mid 0) = 1$; $V = 1$ и $\gamma = 0{,}1$; $1{,}0$; ∞. Их сравнение показывает, что существенные различия в качестве оценок, формируемых по алгоритму Калмана (5)—(9) и по оптимальному в общем случае алгоритму (10)—(22) разностных измерений, имеют место только при $\gamma < 1$, когда полоса пропускания формирующего RC-фильтра по уровню $1/\sqrt{2}$ не превосходит частоты измерений. Наилучшие оценки, как и следовало ожидать, получаются при некоррелированных ошибках измерений (при $\gamma = \infty$), когда оба алгоритма дают одинаковые результаты (сплошная кривая со штриховкой).

Эти выводы хорошо подтверждаются численным моделированием рассматриваемой системы, результаты которого представлены на рис. 2, *а*, *б* в виде временных диаграмм ошибок $\tilde{x}(n\mid n) = \hat{x}(n\mid n) - x(n)$ (сплошные кривые) и $\tilde{x}^*(n\mid n) = \hat{x}^*(n\mid n) - x(n)$ (штриховые кривые), полученных при $x(0) = 0$, $\hat{x}(0\mid 0) = 1$, $v(0) = 0$ и $\gamma = 0{,}1$; $1{,}0$ для двух различных реализаций псевдослучайной последовательности $\{\eta(n-1),\ n = 1, 2, \ldots\}$ с равномерным законом распределения.

Таким образом, рекуррентные соотношения (37)—(40) являются полезным дополнением к фильтру Калмана при его использовании в реальных условиях коррелированности ошибок измерений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рекуррентная форма корреляционной матрицы ошибки квазиоптимальной оценки. Используя (24), (29) и (33), найдем

$$\overline{H}^{\mathrm{T}}(n)\,\overline{W}^{-1}(n)\,\overline{V}(n)\,\overline{W}^{-1}(n)\overline{H}(n) = \Phi^{-\mathrm{T}}\overline{H}^{\mathrm{T}}\overline{W}_1^{-1}\overline{V}_1\overline{W}_1^{-1}\overline{H}\Phi^{-1} + \\ + \Phi^{-\mathrm{T}}\overline{H}^{\mathrm{T}}\overline{W}_1^{-1}\overline{L}^{\mathrm{T}}V^{-1}H + H^{\mathrm{T}}V^{-1}\overline{L}\overline{W}_1^{-1}\overline{H}\Phi^{-1} + H^{\mathrm{T}}V^{-1}H, \qquad (\Pi 1)$$

где

$$\Phi = \Phi(n,\ n-1);\ \overline{H} = \overline{H}(n-1);\ \overline{W}_1 = \overline{W}_1(n-1);\\ \overline{V}_1 = \overline{V}_1(n-1);\ \overline{L} = \overline{L}(n,\ n-1).$$

Отдельные слагаемые в правой части этого выражения при помощи (30)—(32), (34), (7)—(9) и матричного тождества [1]

$$AB^{\mathrm{T}}(BAB^{\mathrm{T}} + C)^{-1} = (A^{-1} + B^{\mathrm{T}}C^{-1}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}C^{-1} \qquad (\Pi 2)$$

преобразуются следующим образом.

1. $$\Phi^{-\mathrm{T}}\overline{H}^{\mathrm{T}}\overline{W}_1^{-1} = (\Gamma Q\Gamma^{\mathrm{T}})^{-1}(\Gamma Q\Gamma^{\mathrm{T}})\,\Phi^{-\mathrm{T}}\overline{H}^{\mathrm{T}}\,[\overline{W} + \overline{H}\Phi^{-1}(\Gamma Q\Gamma^{\mathrm{T}})\times \\ \times \Phi^{-\mathrm{T}}\overline{H}^{\mathrm{T}}]^{-1} = (\Gamma Q\Gamma^{\mathrm{T}})^{-1}\,[(\Gamma Q\Gamma^{\mathrm{T}})^{-1} + \Phi^{-\mathrm{T}}\overline{H}^{\mathrm{T}}\overline{W}^{-1}\overline{H}\Phi^{-1}]^{-1}\,\Phi^{-\mathrm{T}}\overline{H}^{\mathrm{T}}\overline{W}^{-1}, \qquad (\Pi 3)$$

где

$$\Gamma = \Gamma(n,\ n-1);\ Q = Q(n-1);\ \overline{W} = \overline{W}(n-1).$$

Введя дополнительные обозначения $P = P(n-1\mid n-1)$, $P_1 = \Phi P\Phi^{\mathrm{T}}$, $P_2 = P_1 + \Gamma Q\Gamma^{\mathrm{T}}$ и учитывая, что согласно (35)

$$\overline{H}^{\mathrm{T}}(n-1)\overline{W}^{-1}(n-1)\overline{H}(n-1) = P^{-1}(n-1\mid n-1) = P^{-1},$$

получим

$$\Phi^{-\text{т}}\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}_1^{-1} = (\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})^{-1}\left[(\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})^{-1} + P_1^{-1}\right]^{-1}\Phi^{-\text{т}}\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}^{-1} =$$

$$= \left[I + P_1^{-1}(\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})\right]^{-1}\Phi^{-\text{т}}\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}^{-1} = \left[I + P_1^{-1}(P_2 - P_1)\right]^{-1}\Phi^{-\text{т}}\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}^{-1} =$$

$$= P_2^{-1}P_1\Phi^{-\text{т}}\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}^{-1}. \qquad (\text{П4})$$

2. $$\Phi^{-\text{т}}\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}_1^{-1}\overline{V}_1\overline{W}_1^{-1}\overline{H}\Phi^{-1} = P_2^{-1}\Phi\left(P\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}^{-1}\overline{V}\overline{W}^{-1}\overline{H}P\right)\Phi^{\text{т}}P_2^{-1} +$$

$$+ P_2^{-1}\Phi P\left(\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}^{-1}\overline{H}\right)\Phi^{-1}(\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})\Phi^{-\text{т}}\left(\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}^{-1}\overline{H}\right)P\Phi^{\text{т}}P_2^{-1} = \qquad (\text{П5})$$

$$= P_2^{-1}\Phi P^*\Phi^{\text{т}}P_2^{-1} + P_2^{-1}(\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})P_2^{-1} = P_2^{-1}(P_1^* + \Gamma Q\Gamma^{\text{т}})P_2^{-1} = P_2^{-1}P_2^*P_2^{-1},$$

где
$$P^* = P\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}^{-1}\overline{V}\overline{W}^{-1}\overline{H}P = P^*(n-1\,|\,n-1);$$

$$P_1^* = \Phi P^*\Phi^{\text{т}}; \quad P_2^* = P_1^* + \Gamma Q\Gamma^{\text{т}} = P^*(n\,|\,n-1).$$

3. $$\Phi^{-\text{т}}\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}_1^{-1}\overline{L}^{\text{т}}V^{-1}H = P_2^{-1}\Phi P\left(\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}^{-1}\overline{L}^{\text{т}}\right)V^{-1}H = P_2^{-1}\Phi PS^{\text{т}}V^{-1}H, \qquad (\text{П6})$$

где
$$S = \overline{L}\overline{W}^{-1}\overline{H} = S(n,\ n-1). \qquad (\text{П7})$$

Подстановка найденных соотношений (П5) и (П6) в (П1) дает

$$\overline{H}^{\text{т}}(n)\,\overline{W}^{-1}(n)\,\overline{V}(n)\,\overline{W}^{-1}(n)\,\overline{H}(n) = P_2^{-1}P_2^*P_2^{-1} +$$

$$+ P_2^{-1}\Phi PS^{\text{т}}V^{-1}H + H^{\text{т}}V^{-1}SP\Phi^{\text{т}}P_2^{-1} + H^{\text{т}}V^{-1}H. \qquad (\text{П8})$$

С другой стороны, из (35) и (9) с учетом симметричности корреляционной матрицы $P(n\,|\,n)$ имеем

$$[\overline{H}^{\text{т}}(n)\overline{W}^{-1}(n)\overline{H}(n)]^{-1} = (I - KH)P_2 = P_2(I - KH), \qquad (\text{П9})$$

здесь $K = K(n)$.

Подставляя теперь (П8) и (П9) в (36), приходим к искомому уравнению (37). При этом (38) следует из (32) с учетом (3) и (4), а (39) — из обозначений к (П5).

Для получения рекуррентного соотношения (40) заметим, что согласно определению (П7)

$$S(n+1,\ n) = \overline{L}(n+1,\ n)\overline{W}^{-1}(n)\overline{H}(n), \qquad (\text{П10})$$

где матрица $\overline{L}(n+1,\ n)$ при помощи (31), (3) и (28) может быть представлена в виде

$$\overline{L}(n+1, n) = E\left[v(n+1)\,\overline{v}^{\text{т}}(n)\right] = E\left\{[\Phi_1(n+1, n)\,v(n) +\right.$$

$$\left.+ \Gamma_1(n+1, n)\,\eta(n)]\,\overline{v}^{\text{т}}(n)\right\} = \Phi_1(n+1, n)\,E\left[v(n)\,\overline{v}^{\text{т}}(n)\right] =$$

$$= \Phi_1(n+1, n)\,E\left\{v(n)\left[v^{\text{т}}(1) \,\vdots\, v^{\text{т}}(2) \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, v^{\text{т}}(n-1) \,\vdots\, v^{\text{т}}(n)\right]\right\} =$$

$$= \Phi_1(n+1, n)\left[\overline{L}(n, n-1) \,\vdots\, V(n)\right].$$

Подставляя это выражение в (П10) и учитывая (24), (33) и (34), получаем

$$S(n+1, n) = \Phi_1\left(\overline{L}\overline{W}_1^{-1}\overline{H}\Phi^{-1} + H\right) = \Phi_1\left[\overline{L}\left(\overline{W} + \overline{H}\Phi^{-1}\Gamma Q\Gamma^{\text{т}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\Phi^{-\text{т}}\overline{H}^{\text{т}}\right)^{-1}\overline{H}\Phi^{-1}(\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})(\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})^{-1} + H\right],$$

где $\Phi_1 = \Phi_1(n+1,\ n)$. Отсюда после несложных преобразований с использованием матричного тождества (П2) приходим к уравнению (40):

$$S(n+1, n) = \Phi_1\left\{\overline{L}\overline{W}^{-1}\overline{H}\Phi^{-1}\left[\Phi^{-\text{т}}\overline{H}^{\text{т}}\overline{W}^{-1}\overline{H}\Phi^{-1} + (\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})^{-1}\right]^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times(\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})^{-1} + H\right\} = \Phi_1\left\{S(n, n-1)\,\Phi^{-1}\left[P_1^{-1} + (\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})^{-1}\right]^{-1}(\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})^{-1} +\right.$$

$$\left.+ H\right\} = \Phi_1\left\{S(n, n-1)\,\Phi^{-1}\left[(\Gamma Q\Gamma^{\text{т}})P_1^{-1} + I\right]^{-1} + H\right\} = \Phi_1\left\{S(n, n-1)\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\Phi^{-1}\left[(P_2 - P_1)P_1^{-1} + I\right]^{-1} + H\right\} = \Phi_1\left[S(n, n-1)\,\Phi^{-1}P_1P_2^{-1} + H\right] =$$

$$= \Phi_1\left[S(n, n-1)\,P\Phi^{\text{т}}P_2^{-1} + H\right].$$

$$= E\{[\Phi_1(2, 1)v(1) + \Gamma_1(2, 1)\eta(1)]v^{\tau}(1)\}V^{-1}(1)H(1) =$$
$$= \Phi_1(2, 1)V(1)V^{-1}(1)H(1) = \Phi_1(2, 1)H(1).$$

В заключение отметим, что использованная в промежуточных выкладках данного приложения матрица $(\Gamma Q\Gamma^{\tau})^{-1}$ может рассматриваться как условная запись обращения матрицы $(\Gamma Q\Gamma^{\tau} + \delta^2 I)$, положительно определенной при любом $\delta \neq 0$, а полученные в итоге рекуррентные соотношения (37) — (40) — как результат предельного перехода при $\delta \to 0$, вследствие чего они остаются справедливыми и при вырожденной матрице $(\Gamma Q\Gamma^{\tau})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Медич Дж.** Статистически оптимальные линейные оценки и управление.— М.: Энергия, 1973.
2. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и ее приложение в связи и управлении.— М.: Связь, 1976.
3. **Сизов В. П.** Оптимальная оценка состояния линейных динамических систем при коррелированных ошибках измерений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1984.— № 3.
4. **Эльясберг П. Е.** Определение движения по результатам измерений.— М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 16 февраля 1987 г.

УДК 681.5.015 : 519.6

А. О. ЕГОРШИН

(Новосибирск)

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ФИЛЬТРАЦИИ (МЕТОД ВИ)

Введение. Хорошо известны калмановский и винеровский методы фильтрации и восстановления случайных процессов на основе динамической модели сигналов: предполагается, что полезный восстанавливаемый сигнал есть выход динамической системы (линейной). Такая модель сигнала часто более адекватна реальности, чем описание сигналов с помощью заданной системы функций. В методе фильтрации Винера динамическая система описывается интегральным уравнением свертки. В методе Калмана модель восстанавливаемого сигнала задана дифференциальными или разностными уравнениями для ее вектора состояния. Способы описания модели сигнала обусловливают и вид получаемых решений задач восстановления. После довольно сложной процедуры решения уравнения Винера — Хопфа можно получить импульсную функцию физически реализуемого оптимального фильтра. В методе Калмана уравнения динамической модели сигнала определяют и соответствующие уравнения для фильтра. Его оптимальный коэффициент усиления вычисляется с помощью матричного уравнения Риккати. Входной сигнал фильтра — обновляющий процесс (измерение минус прогноз). В фильтре Калмана используется приближенная информация о начальном состоянии системы. По окончании переходного процесса стационарный