В результате время выполнения операции СВГ на матричном процессоре по приведенному параллельному алгоритму равно $T_м = [q + (2M + 1)(2N + 1)(9L + 3q + 2)]t$, где $q = \ulcorner \log_2(2M+1)(2N+1) \urcorner$; t — время вычисления одной арифметико-логической операции. Операция (6) выполняется одновременно для всех $P \times R$ точек изображения, где $P \times R$ — число процессорных элементов матричного процессора. Если $P < I$, $R < J$, то обработка изображения ведется по блокам размерностью $P \times R$, имеющим области перекрытия из $2M$ строк при сдвиге по координате i и из $2N$ столбцов при сдвиге по координате j. Следовательно, время преобразования изображения размерностью $I \times J$ на матричном процессоре из $P \times R$ процессорных элементов равно $T_{СВГ} = prT_м$, где $p = \left\lceil \frac{I - 2M}{p - 2M} \right\rceil$, $r = \left\lceil \frac{J - 2N}{R - 2N} \right\rceil$. Так, при $I = J = 1024$, $M = N = 15$, $L = 8$ и $P = R = 128$, $t = 10^{-7}$ с время $T_{СВГ} \approx 1{,}2$ с. Для сравнения время преобразования изображения с теми же характеристиками по рекуррентному алгоритму СВГ [3] на однопроцессорной ЭВМ с быстродействием 1 млн опер./с равно $T_{СВГ} \approx 318$ с, т. е. в 265 раз больше.

Таким образом, выполнение операции скользящего выравнивания гистограммы на матричном процессоре позволяет значительно уменьшить время обработки при решении задач улучшения качества изображений, характеризующихся наличием нелинейных искажений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Денисов В. М., Матвеев Ю. Н., Очин Е. Ф.** Принципы организации систем обработки изображений на базе клеточной логики // Зарубеж. радиоэлектрон.— 1984.— № 1.
2. **Головкин Б. А.** Параллельные вычислительные системы.— М.: Наука, 1980.
3. **Кронрод М. А.** Несколько задач обработки изображений // Вопр. кибернетики: Иконика, цифровая обработка и фильтрация изображений.— 1978.— Вып. 38.
4. **Матвеев Ю. Н., Очин Е. Ф.** Нелинейное преобразование видеосигнала на основе алгоритма скользящей эквализации гистограмм // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1985.— № 1.
5. **Вудс Р. Э., Гонсалес Р. С.** Цифровые методы улучшения изображений в реальном времени // ТИИЭР.— 1981.— Т. 69, № 5.

Поступила в редакцию 3 февраля 1986 г.

УДК 681.513

В. И. МЕЛЕШКО, Т. В. ТКАЧЕНКО

(Харьков)

ФАКТОРИЗОВАННЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Введение. При решении задач идентификации динамических объектов с коррелированными шумами традиционный метод наименьших квадратов [1, 2] дает смещенные, неустойчивые оценки. Смещенность возникает из-за того, что шумы и выходные переменные, рассматриваемые в разные отсчеты дискретного времени, являются коррелированными. Численная неустойчивость объясняется наличием как в методе наименьших квадратов, так и в его рекуррентной модификации, известной как фильтр Калмана, трансформации Гаусса, заключающейся в использовании дисперсионной матрицы при вычислениях.

Один из эффективных методов получения несмещенных оценок в задачах динамической идентификации — метод инструментальных переменных, интенсивно развиваемый в последнее время [3, 4]. Этот метод не требует знания структуры и параметров коррелированного шума, достаточно прост, дает состоятельные оценки и в то же время допускает рекуррентное представление, подобное фильтру Калмана. Но при этом в известных рекуррентных алгоритмах инструментальных переменных [3, 4] имеется присущий фильтрам Калмана недостаток — наличие невысокой численной устойчивости. Для устранения этого недостатка в данной работе развиваются новые факторизованные рекуррентные модификации метода инструментальных переменных, обладающие значительно более высокой численной устойчивостью. Основаны эти модификации на использовании доказываемых новых соотношений для рекуррентного пересчета неортогональных факторизаций несимметричной квадратной матрицы, используемой в вычислениях в обычном методе инструментальных переменных. Определение оценок в предлагаемых алгоритмах рекуррентно осуществляется не с этой матрицей, а с ее факторизованными представлениями. В обычной фильтрации подобные факторизованные

$$A(q^{-1})y_t = B(q^{-1})u_t + \xi_t, \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где y_t — выход; u_t — вход; $\xi_t = H(q^{-1})\varepsilon_t$ — коррелированная помеха; ε_t — белый шум; q^{-1} — оператор сдвига: $q^{-1}u_t = u_{t-1}$; A, B, H — полиномиальные операторы следующего вида:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n}; \tag{2}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \ldots + b_m q^{-m}; \tag{3}$$

$$H(q^{-1}) = 1 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \ldots + h_s q^{-s}. \tag{4}$$

Задача идентификации системы состоит в определении в каждый момент t по реализациям $y_{-n+1}, y_{-n+2}, \ldots, y_t$; $u_{-m+1}, u_{-m+2}, \ldots, u_{t-1}$ следующего вектора неизвестных параметров:

$$\theta^* = [-a_1, -a_2, \ldots, -a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m],$$

где θ^* — транспонированный вектор.

Если ввести обозначения:

$$F_t = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_t \end{pmatrix}; \quad y^t = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix}; \quad \xi^t = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_t \end{pmatrix},$$

где $f_t = [y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-n}, u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots, u_{t-m}]$, то (1) можно переписать в виде $y^t = F_t\theta + \xi^t$.

При $H(q^{-1}) = I$ (I — единичный оператор) считают, что помеха ξ_t является некоррелированной, поскольку не коррелированы между собой значения $\xi_t = \varepsilon_t$ в разные моменты времени t. Ясно, что при $H(q^{-1}) \neq I$ помеха ξ_t коррелирована.

В общем случае коррелированной помехи ξ_t оценка наименьших квадратов

$$\theta_t = (F_t^* F_t)^{-1} F_t^* y^t = F_t^+ y^t \tag{5}$$

смещенная [1, 2]. Величина смещения пропорциональна дисперсии воздействующего белого шума ε_t и может достигать значительных уровней. В (5) и в дальнейшем псевдообратная матрица понимается в смысле Мура — Пенроуза [8], т. е. как матрица, порождающая псевдорешение, которое является среднеквадратичным решением системы $F_t\theta \cong y^t$ и имеет минимальную евклидову норму.

Метод инструментальных переменных состоит в том, что вычисление оценки в нем осуществляется следующим образом:

$$\widehat{\theta}_t = (\widetilde{F}_t^* F_t)^{-1} \widetilde{F}_t^* y^t, \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где $\widetilde{F}_t$ — инструментальная матрица, t-я строка которой определяется, например, как

$$\widetilde{f}_t(\widehat{\theta}_{t-1}) = \left[\frac{\widehat{B}_t(q^{-1})}{\widehat{A}_t(q^{-1})} u_{t-1}, \ldots, \frac{\widehat{B}_t(q^{-1})}{\widehat{A}_t(q^{-1})} u_{t-n}, u_{t-1}, \ldots, u_{t-m}\right]. \tag{7}$$

Здесь $\widehat{A}_t$ и $\widehat{B}_t$ — полиномиальные операторы, получаемые при подстановке в (2), (3) параметров $\{\widehat{a}\}$, $\{\widehat{b}\}$, найденных на предыдущем шаге и составляющих оценку

$$z_{t-s}(t) = \sum_{j=1}^{m} \widehat{b}_{j,t-1} u_{t-s-j} - \sum_{i=1}^{n} \widehat{a}_{i,t-1} z_{t-s-i}(t-1), \; s = 1, 2, \ldots, n;$$

$$z_{t-s-1}(t) = z_{t-s}(t-1), \quad s = n+1, \ldots, 2n-1.$$

Следует отметить, что в частных случаях входных сигналов u_t t-ю строку $\widetilde{f}_t$ инструментальной матрицы $\widetilde{F}_t$ можно задавать более простым способом. Так, если u_t — белый шум, то состоятельность оценки (6) достигается не только когда $\widetilde{f}_t$ берется в виде (7), но и когда

$$\widetilde{f}_t = [u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots, u_{t-n-m}]. \tag{8}$$

Асимптотически оптимальные способы формирования строки $\widetilde{f}_t$ матрицы инструментальных переменных рассмотрены в [3].

Для состоятельности оценки (6) обычно [3] полагают, что все корни полинома $A(p)$ находятся снаружи единичного круга, полиномы $A(p)$ и $B(p)$ не имеют общих корней, а помеха $\xi(t)$ такая, что определяющий ее полином $H(p)$ является асимптотически устойчивым. Из выражений (6)—(8) следует важное преимущество метода инструментальных переменных, состоящее в том, что в нем при вычислении искомой оценки неизвестных параметров объекта не используются структура и параметры модели помехи, т. е. нет необходимости знать структуру оператора $H(q^{-1})$ (4) и проводить оценку определяющих его параметров $\{h\}$, которые, как правило, априори не заданы.

В [4] предложен и исследован рекуррентный метод инструментальных переменных, в котором вычисление оценки (6) производится следующим образом:

$$\widehat{\theta}_{t+1} = \widehat{\theta}_t + k_{t+1}(y_{t+1} - f_{t+1}\widehat{\theta}_t); \tag{9}$$

$$k_{t+1} = P_t \widetilde{f}_{t+1}^* (1 + f_{t+1} P_t \widetilde{f}_{t+1}^*)^{-1}; \tag{10}$$

$$P_{t+1} = P_t - k_{t+1} f_{t+1} P_t, \tag{11}$$

где $t = t_0, t_0+1, \ldots$; $t_0 = n+m$; $\widehat{\theta}_{t_0} = \left(\widetilde{F}_{t_0}^* F_{t_0}\right)^{-1} \widetilde{F}_{t_0}^* y^{t_0}$; $\quad P_{t_0} = \left(\widetilde{F}_{t_0}^* F_{t_0}\right)^{-1}$; $\widetilde{f}_{t+1}$ — $t+1$-я строка матрицы $\widetilde{F}_{t+1}$.

В этом методе вспомогательная матрица $P_t = (\widetilde{F}_t^* F_t)^{-1}$, участвующая в вычислениях, является, вообще говоря, несимметричной и поэтому не может трактоваться как дисперсионная. Ее обусловленность может быть довольно высокой, точнее, как угодно близкой к $\mathrm{Cnd}\widetilde{F}_t \mathrm{Cnd} F_t$, где $\mathrm{Cnd}\, F_t = \|F_t\| \|F_t^+\|$. Поэтому численная устойчивость метода (9)—(11) на плохо обусловленных задачах большой размерности невысокая. В связи с этим рассмотрим факторизованный рекуррентный метод определения оценки (6), в котором обусловленность матриц, участвующих в вычислениях, является порядка $\operatorname{Cnd} F_t$. Именно организацией такого способа проведения вычислений обеспечивается увеличение численной устойчивости развиваемого класса алгоритмов.

Факторизованный рекуррентный метод инструментальных переменных. Построение алгоритмов рекуррентного факторизованного вычисления оценки $\widehat{\theta}_t$ (6) для идентификации динамических объектов основывается на формулах пересчета несимметричной факторизации невырожденной матрицы P в представлении

$$P = \tilde{U} D U^* \tag{12}$$

при одноранговом возмущении, где $\tilde{U}$, U — две верхнетреугольные матрицы с единичными диагональными элементами; D — диагональная матрица.

Пересчет матриц $\tilde{U}$, D, U для факторизации (12) ведется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть для невырожденной матрицы P размерности $m \times m$ имеется факторизация (12) и указана невырожденная матрица $\bar{P} = P + \alpha\tilde{a}^* a$, где $\tilde{a}$, a — вектор-строки; α — число. Тогда несимметричная факторизация $\bar{P} = \tilde{\tilde{U}}\bar{D}\bar{U}^*$ вычисляется для $j = m, m-1, \ldots, 2$ по следующим формулам:

$$\bar{d}_j = d_j + \alpha_j \tilde{a}_j a_j; \tag{13}$$

$$\tilde{a}_k := \tilde{a}_k - \tilde{a}_j \tilde{u}_{kj}, \quad a_k := a_k - a_j u_{kj}, \quad k = 1, \ldots, j-1; \tag{14}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_{kj} = \tilde{u}_{kj} + \alpha_j a_j \tilde{a}_k \bar{d}_j^{-1}, \; \bar{u}_{kj} = u_{kj} + \alpha_j \tilde{a}_j a_k \bar{d}_j^{-1}, \quad k = 1, \ldots, j-1; \tag{15}$$

$$\alpha_{j-1} = \alpha_j d_j \bar{d}_j^{-1}, \tag{16}$$

где $\alpha_m = \alpha$; $\tilde{u}_{kj}, u_{kj}$ — kj-е элементы матриц $\tilde{U}, U$ соответственно; $:=$ — спецзнак присвоения в вычислениях, например, переменной a_k значения $a_k - a_j u_{kj}$, с которым производятся дальнейшие вычисления.

Доказательство. Возьмем вектор-строки $\tilde{x}$, x и рассмотрим билинейную форму

$$\begin{gathered}\tilde{x}\bar{P}x^* = \sum_{i=1}^{m-1} d_i \tilde{v}_i v_i + d_m \tilde{v}_m v_m + \alpha(\tilde{x}, \tilde{a})(x, a) = \sum_{i=1}^{m-1} d_i \tilde{v}_i v_i + \\ + \left(d_m + \alpha\tilde{a}_m a_m\right)\tilde{x}_m x_m + \left(d_m\left(\tilde{\bar{x}}, \tilde{\omega}\right) + \alpha a_m\left(\tilde{\bar{x}}, \tilde{\bar{a}}\right)\right)x_m + \\ + \tilde{x}_m\left(d_m(\bar{x}, \omega) + \alpha\tilde{a}_m(\bar{x}, \bar{a})\right) + d_m\left(\tilde{\bar{x}}, \tilde{\omega}\right)(\bar{x}, \omega) + \alpha\left(\tilde{\bar{x}}, \tilde{\bar{a}}\right)(\bar{x}, \bar{a}),\end{gathered} \tag{17}$$

где $\tilde{v} = \tilde{x}\tilde{U}$; $v = xU$; $\tilde{\omega} = [\tilde{u}_{1m}, \tilde{u}_{2m}, \ldots, \tilde{u}_{m-1,m}]$; $\omega = [u_{1m}, u_{2m}, \ldots, u_{m-1,m}]$; $\tilde{x} = \left[\tilde{\bar{x}}, \tilde{x}_m\right]$, $x = \left[\bar{x}, x_m\right]$; $\tilde{x}_m$, x_m — m-е координаты векторов $\tilde{x}$ и x соответственно.

Если ввести

$$\bar{d}_m = d_m + \alpha\tilde{a}_m a_m, \tag{18}$$

то (17) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\tilde{x}\bar{P}x^* = \sum_{i=1}^{m-1} d_i \tilde{v}_i v_i + \bar{d}_m\left(\tilde{x}_m + \frac{\left(d_m\tilde{\omega} + \alpha a_m \tilde{\bar{a}}\right)\tilde{\bar{x}}^*}{\bar{d}_m}\right)\left(x_m + \frac{\left(d_m\omega + \alpha\tilde{a}_m\bar{a}\right)\bar{x}^*}{\bar{d}_m}\right) + \\ + d_m\left(\tilde{\bar{x}}, \tilde{\omega}\right)(\bar{x}, \omega) + \alpha\left(\tilde{\bar{x}}, \tilde{\bar{a}}\right)(\bar{x}, \bar{a}) - \bar{d}_m^{-1}\left(d_m\tilde{\omega} + \alpha a_m\tilde{\bar{a}}\right)\tilde{\bar{x}}^*\left(d_m\omega + \right. \\ \left. + \alpha\tilde{a}_m\bar{a}\right)\bar{x}^* = \sum_{i=1}^{m-1} d_i \tilde{v}_i v_i + \bar{d}_m \tilde{y}_m y_m + \tilde{\bar{x}}\left(d_m\tilde{\omega}^*\omega + \alpha\tilde{\bar{a}}^*\bar{a} - \right. \\ \left. - \frac{d_m^2}{\bar{d}_m}\tilde{\omega}^*\omega - \frac{\alpha d_m}{\bar{d}_m}\tilde{a}_m\tilde{\omega}^*\bar{a} - \frac{\alpha d_m}{\bar{d}_m}a_m\tilde{\bar{a}}^*\omega - \alpha^2\frac{\tilde{a}_m a_m}{\bar{d}_m}\tilde{\bar{a}}^*\bar{a}\right)\bar{x}^* =\end{gathered} \tag{19}$$

$$
= \bar{d}_m \tilde{y}_m y_m + \sum_{i=1}^{m-1} d_i \tilde{v}_i v_i + \frac{\alpha d_m}{\bar{\bar{d}}_m} \tilde{\tilde{x}} \left(\tilde{\tilde{a}}^* - \tilde{a}_m \tilde{\omega}^*\right) \left(\bar{a} - a_m \omega\right) \bar{x}^*,
$$

где

$$
\begin{gathered}
\tilde{y}_m = \tilde{x}_m + \bar{d}_m^{-1} \left(d_m \tilde{\omega} + \alpha a_m \tilde{\tilde{a}}\right) \tilde{\tilde{x}}^*; \\
y_m = x_m + \bar{d}_m^{-1} \left(d_m \omega + \alpha \tilde{a}_m \bar{a}\right) \bar{x}^*.
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Введем $\tilde{y} = \tilde{x}\tilde{\bar{U}}$, $y = x\bar{U}$ и положим $\tilde{y}_1 = \tilde{x}_1$, $y_1 = x_1$. Тогда

$$
\tilde{x}\bar{P}x^* = \sum_{j=2}^{m} \bar{d}_j \tilde{y}_j y_j + \bar{d}_1 \tilde{x}_1 x_1 = \sum_{j=1}^{m} \bar{d}_j \tilde{y}_j y_j. \tag{21}
$$

Сравнивая (19), (21) и учитывая соотношения (18), (20), по индукции получаем формулы (13)—(16) для вычисления несимметричной факторизации $\tilde{\bar{U}}\bar{D}\bar{U}^*$.

На примере вычисления u_{kj} покажем вывод формул (15). Если записать $\hat{a} = \bar{a} - a_m \omega$, то в (20) второе соотношение можно преобразовать к виду

$$
\begin{gathered}
y_m = x_m + \left(\omega + \left(d_m \bar{d}_m^{-1} - 1\right) \omega + \alpha \bar{d}_m^{-1} \tilde{a}_m \bar{a}\right) \bar{x}^* = \\
= x_m + \left(\omega - \alpha \bar{d}_m^{-1} \tilde{a}_m \left(a_m \omega - \bar{a}\right)\right) \bar{x}^* = x_m + \left(\omega + \alpha \bar{d}_m^{-1} \tilde{a}_m \hat{a}\right) \bar{x}^*.
\end{gathered}
$$

Это представление y_m доказывает выражение u_{kj}, приведенное в (15), в котором используется пересчитанное в соответствии с (14) значение a_k.

Доказанная теорема 1 обобщает теорему [9], ранее установленную для циклического пересчета в частном случае симметричной факторизации вида $P = UDU^*$ при одноранговом возмущении, где U — верхнетреугольная, D — диагональная матрица.

Теорема 2. Предположим на каждом шаге t ($t = 1, 2, \ldots$) матрица $\tilde{F}_t^* F_t$ обратима. Тогда рекуррентное вычисление в факторизованном методе инструментальных переменных оценки (6) ведется по формуле (9), в которой вектор k_{t+1} определяется как

$$
k_{t+1} = k_{m+n+1,t} \beta_{n+m,t}^{-1}. \tag{22}
$$

При этом верхнетреугольные матрицы $\tilde{U}_t$, U_t и вектор $k_{n+m+1,\,t}$ находятся путем проведения циклических вычислений для $j = 2, 3, \ldots, n+m$ следующим образом:

$$
\beta_{jt} = \beta_{j-1,\,t} + \tilde{v}_{jt} q_{jt}; \tag{23}
$$

$$
d_{j,t+1} = d_{jt} \beta_{j-1,t} \beta_{jt}^{-1}; \tag{24}
$$

$$
\tilde{u}_{j,t+1} = \tilde{u}_{jt} + \tilde{\lambda}_{jt} \tilde{k}_{jt};\ \tilde{\lambda}_{jt} = -\tilde{q}_{jt} \beta_{j-1,t}^{-1}; \tag{25}
$$

$$
u_{j,t+1} = u_{jt} + \lambda_{jt} k_{jt};\ \lambda_{jt} = -q_{jt} \beta_{j-1,t}^{-1}; \tag{26}
$$

$$
\tilde{k}_{j+1,\,t} = \tilde{k}_{jt} + v_{jt} \tilde{u}_{jt};\ k_{j+1,\,t} = k_{jt} + \tilde{v}_{jt} u_{jt}, \tag{27}
$$

где $d_{1,t+1} = d_{1t} \beta_{1t}^{-1}$; $\beta_{1t} = 1 + \tilde{v}_{1t} q_{1t}$; $k_{2t}^* = \left[\tilde{v}_1 \overbrace{0 \ldots 0}^{n+m-1}\right]$; $\tilde{k}_{2t}^* = \left[v_1 \overbrace{0 \ldots 0}^{n+m-1}\right]$; $q_t = \tilde{f}_{t+1} U_t = [q_{1t}, \ldots, q_{n+m,\,t}]$; $v_t = q_t D_t = [v_{1t}, \ldots, v_{n+m,\,t}]$; $\tilde{q}_t = f_{t+1} \tilde{U}_t$; $\tilde{v}_t = \tilde{q}_t D_t$; $D_t = \operatorname{diag}(d_{1t}, \ldots, d_{n+m,\,t})$; $\tilde{u}_{jt}$, u_{jt} — j-е столбцы верхнетреугольных матриц $\tilde{U}_t$, U_t соответственно.

Доказательство. Для матрицы P_t, имеющей размерность $(n+m)\times(n+m)$, обозначим неортогональную факторизацию (12) через $P_t = \tilde{U}_t D_t U_t^*$. Тогда

$$
\begin{gathered}
P_{t+1} = \tilde{U}_{t+1} D_{t+1} U_{t+1}^* = \tilde{U}_t \left(D_t - \alpha_t^{-1} D_t U_t^* \tilde{f}_{t+1}^* \left(D_t \tilde{U}_t^* f_{t+1}^*\right)^*\right) U_t^* = \\
= \tilde{U}_t \left(D_t - \alpha_t^{-1} v_t^* \tilde{v}_t\right) U_t^*,
\end{gathered}
$$

ния для $j = m+n,\ m+n-1,\ \ldots,\ 2$ циклических вычислений:

$$d_{j,\,t+1} = d_{jt} + \alpha_{jt} v_{jt} \tilde{v}_{jt};$$

$$\tilde{\bar{u}}_{kjt} = \alpha_{jt} \tilde{v}_{jt} v_{kt} d_{j,t+1}^{-1};\ \bar{u}_{kjt} = \alpha_{jt} v_{jt} \tilde{v}_{kt} d_{j,t+1}^{-1}, \qquad k = 1, \ldots, j-1;$$

$$\alpha_{j-1,t} = \alpha_{jt} d_{jt} d_{j,t+1}^{-1},$$

где $\alpha_{m+n,t} = -\alpha_t^{-1}$.

Заметим, что

$$d_{j,\,t+1} = d_{jt} + \alpha_{jt} v_{jt} \tilde{v}_{jt} = d_{jt} (1 + \alpha_{jt} d_{jt} q_{jt} \tilde{q}_{jt}). \tag{28}$$

Поэтому

$$\alpha_{j-1,t}^{-1} = \alpha_{jt}^{-1} d_{j,t+1} d_{jt}^{-1} = \alpha_{jt}^{-1} + d_{jt} q_{jt} \tilde{q}_{jt}. \tag{29}$$

С другой стороны, $\alpha_{n+m,t}^{-1} = -\alpha_t = -1 - \sum_{i=1}^{m+n} d_i q_{it} \tilde{q}_{it}$. Тем самым, если обозначить $-\alpha_{jt}^{-1} = \beta_{jt}$, то $\beta_{1t} = 1 + \tilde{v}_{1t} q_{1t}$ и из (28), (29) видно, что имеют место соотношения (23), (24).

Теперь рассмотрим вычисление $U_{t+1} = U_t \bar{U}_t$. Можно представить

$$\bar{U}_t = I + \left(0 \vdots \lambda_{2t} \tilde{v}_t^{(1)} \vdots \lambda_{3t} \tilde{v}_t^{(2)} \vdots \ldots \vdots \lambda_{n+m,t} \tilde{v}_t^{(n+m-1)}\right), \tag{30}$$

где $\qquad \lambda_{jt} = -v_{jt} \beta_{jt}^{-1} d_{j,t+1}^{-1};\ \tilde{v}_t^{(j)*} = (\tilde{v}_{1t} \tilde{v}_{2t} \ldots \tilde{v}_{jt}\, 0 \ldots 0)$.

Умножая (30) на U_t, получаем (26). Аналогично устанавливается (25). Соотношение

$$k_{j+1,t} = U_t \tilde{v}_t^{(j)} = k_{jt} + \tilde{v}_{jt} u_{jt}$$

дает второе равенство в (27). Так как

$$k_{t+1} = P_t \tilde{f}_{t+1}^* \alpha_t^{-1} = \tilde{U}_t D_t U_t^* \tilde{f}_{t+1}^* \alpha_t^{-1} = \tilde{U}_t v_t^* \beta_{n+m}^{-1},$$

то имеет место равенство (22).

Отметим, что соотношения (9), (22)—(27) задают общий факторизованный метод инструментальных переменных идентификации динамических объектов. Так, для получения алгоритма идентификации динамического объекта, описываемого моделью (1)—(4), необходимо на каждом шаге в (22)—(27) использовать вектор $\tilde{f}_{t+1}$, определяемый выражением (7). В частном случае белого шума на входе в качестве вектора инструментальных переменных $\tilde{f}_{t+1}$ можно использовать более простое выражение (8).

Из соотношений (22)—(27) видно, что в развитом факторизованном методе инструментальных переменных вычисления ведутся не с матрицей P_t, а с двумя верхнетреугольными матрицами $\tilde{U}_t$, U_t и диагональной матрицей D_t. Тем самым аналог трансформации Гаусса в этом методе при проведении вычислений не используется, что обеспечивает более высокую численную устойчивость.

Предложенный факторизованный рекуррентный метод является обобщением дисперсионного метода последовательного квадратного корня [5]. Он сохраняет преимущества последнего [7], связанные с возможностью получать точные оценки в плохо обусловленных задачах идентификации. Тем самым данный метод эффективен при идентификации динамических объектов, в которых возникающие при вычислении оценок матрицы $P_t = \left(\widetilde{F}_t^* F_t\right)^{-1}$ плохо обусловлены и, возможно, значительна размерность вектора оцениваемых параметров θ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Эйкхофф П.** Основы идентификации систем управления: Пер. под ред. Н. С. Райбмана.— М.: Мир, 1975.
2. **Мелешко В. И.** Применение рекуррентных оптимальных оценок с псевдообраще-
U*DU-факторизации симметричных матриц и их применение.— Киев, 1986.— (Препринт/АН УССР, Ин-т кибернетики; № 86—6).
7. **Campbell Y. K., Synnot S. P., Bierman G. J.** Voyager orbit determination at Jupiter // IEEE Trans. on Autom. Contr.— 1983.— V. AC-28, N 3.— P. 256—268.
8. **Алберт А.** Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание: Пер. под ред. Я. З. Цыпкина с доб. Р. Ш. Липцера.— М.: Наука, 1977.
9. **Agee W. S., Turner P. H.** Triangular decomposition of a positive definite matrix plus a symmetric dyad with application to Kalman filtering // White Sands Missile Range Tech. Rep.— 1972.— N 38.

Поступила в редакцию 30 июня 1986 г.

УДК 621.391.172

В. П. СИЗОВ

(Москва)

ВЛИЯНИЕ КОРРЕЛИРОВАННОСТИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ НА ТОЧНОСТЬ РАБОТЫ ДИСКРЕТНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Классические рекуррентные алгоритмы дискретной оптимальной линейной фильтрации [1] построены в предположении о некоррелированности ошибок измерений. Однако любой реальный измерительный канал имеет ограниченную полосу пропускания, вследствие чего указанная гипотеза, строго говоря, физически нереализуема. Выходом из ситуации является преобразование уравнений динамики объекта и измерений к требуемой канонической форме либо путем включения в состав оцениваемых параметров неизвестных характеристик случайного процесса ошибок измерений (так называемый «метод расширения вектора состояния» [2]), либо «декорреляцией» случайного процесса за счет формирования «разностных измерений» [3]. Однако в обоих случаях значительно возрастает объем необходимых вычислений, что побуждает на практике часто отказываться от подобных модификаций и ограничиваться более простым в реализации алгоритмом фильтра Калмана [1]. Получаемая при этом погрешность оценок устанавливается обычно экспериментально или моделированием устройства на ЭВМ.

В настоящей работе алгоритм фильтра Калмана дополнен рекуррентными соотношениями для аналитического определения корреляционной матрицы ошибки формируемых им квазиоптимальных оценок вектора состояния дискретной линейной динамической системы при коррелированных ошибках измерений.

Исходные соотношения. Линейная дискретная система с вектором состояния $x(n)$, вектором возмущения $\xi(n-1)$ и вектором измерения