АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 1 1988

В. П. БАКАЛОВ, Ю. Ю. МАРТЮШЕВ, Н. П. РУССКИХ
(Москва)

ЦИФРОВОЙ АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОГРАНИЧЕННОГО СИГНАЛА ПО СВЕРТКЕ С НЕИЗВЕСТНОЙ ИСКАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

Введение. В процессе регистрации сигналов часто возникают искажения, вызванные сверткой с неизвестной искажающей функцией. Восстановление неискаженного сигнала в таких случаях связано с решением уравнения свертки с неизвестным ядром. В [1] показано, что для двумерных пространственно-ограниченных функций, описывающих сигнал и искажения, в общем случае комплексных, при определенных, несущественных в реальных ситуациях ограничениях возможно, по крайней мере теоретически, решение уравнения свертки.

Достаточное условие возможности решения — неразложимость многочленов, являющихся z-преобразованием функций, описывающих сигнал и искажения, или жесткая функциональная связь нулей многочленов двух переменных, представляющих каждое из этих z-преобразований [2].

Для развития полученных в [1] теоретических результатов рассмотрим цифровой алгоритм восстановления пространственно-ограниченных сигнала и искажающей функции по свертке.

Алгоритм. Алгоритм основан на анализе нулей многочленов, представляющих z-преобразование свертки функций, описывающих сигнал и искажения. Пусть сигнал и искажающая функция записываются как

$$f(m,\ n) = f_{mn};\quad 0 \leqslant m \leqslant M_f - 1;\quad 0 \leqslant n \leqslant N_f - 1;$$
$$h(m,\ n) = h_{mn};\quad 0 \leqslant m \leqslant M_h - 1;\quad 0 \leqslant n \leqslant N_h - 1,$$

где M_f, N_f, M_h, N_h определяют размеры областей, в которых f_{mn} и h_{mn} могут быть отличны от нуля.

Свертку сигнала и искажающей функции запишем в виде

$$S(m,\ n) = S_{mn} = f_{mn} \otimes h_{mn};\quad \begin{array}{l} 0 \leqslant m \leqslant M_f + M_h = M; \\ 0 \leqslant n \leqslant N_f + N_h = N. \end{array} \tag{1}$$

Соответствующие z-преобразования обозначим таким образом:

$$Z_s(x,\ y);\quad Z_f(x,\ y);\quad Z_h(x,\ y).$$

Очевидно, что

$$Z_s(x,\ y) = Z_f(x,\ y) Z_h(x,\ y).$$

Зная дискретный набор $(x_i,\ y_i)$, представляющих нули Z_f (или Z_h), можно определить оценки $\widehat{f}_{mn}$ отсчетов f_{mn} с точностью до постоянного множителя из системы однородных линейных уравнений [3]:

$$\sum_{m=0}^{M_f-1} \sum_{n=0}^{N_f-1} f_{mn} x_i^m y_i^n = 0;\quad 0 \leqslant i \leqslant M_f N_f. \tag{2}$$

Значения x_i, y_i могут быть легко определены [3]. Для нахождения значений M_f и N_f, задающих «габаритные размеры» функций f_{mn} (или h_{mn}), можно воспользоваться свойствами матрицы, обозначаемой как H, системы (2) аналогично тому, как это сделано в работе [3], а именно: ранг матрицы должен определяться соотношением

$$r(H) = M_f N_f - 1. \tag{3}$$

Отсюда для нахождения M_f и N_f (или M_h, N_h) можно поступить следующим образом. Задав в необходимом количестве дискретный набор точек $(x_i,\ y_i)$, составить матрицы H для всех возможных размеров $M_{\widehat{f}}$ и $N_{\widehat{f}}$. Те значения M_f и N_f, для кото-

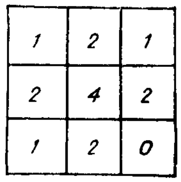

Рис. 1

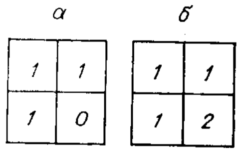

Рис. 3

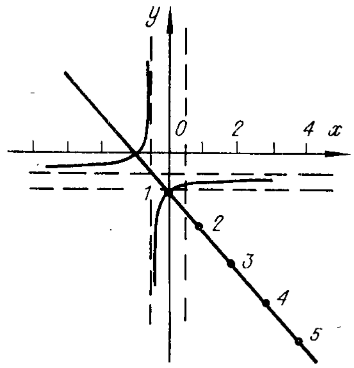

Рис. 2

рых выполняется условие (3), являются действительными размерами M_f и N_f (или M_h и N_h). Практически целесообразно определять ранги матриц H, начиная с меньших значений M_f, N_f и увеличивая их, пока условие (3) не будет выполнено.

После нахождения оценки $\widehat{f}_{mn}$ (или $\widehat{h}_{mn}$) вторая функция, входящая в свертку, может быть определена различными способами, например, с помощью инверсной фильтрации или аналогично вышеприведенному алгоритму по нулям и системе однородных уравнений. Окончательная идентификация $\widehat{f}_{mn}$ и $\widehat{h}_{mn}$ с f_{mn} и h_{mn} может быть произведена на основании любой дополнительной информации о свойствах f_{mn} и h_{mn}. Таким образом, последовательность действий для решения уравнения дискретной свертки (1) может состоять в следующем:

1) определение габаритных размеров M_f, N_f (или M_h, N_h) с использованием условия (3);

2) составление и решение системы (2) для определения $\widehat{f}_{mn}$ $(\widehat{h}_{mn})$;

3) нахождение $\widehat{h}_{mn}$ $(\widehat{f}_{mn})$ аналогично пп. 1 и 2 или решение уравнения свертки (1) относительно $\widehat{h}_{mn}$ $(\widehat{f}_{mn})$ при известном $\widehat{f}_{mn}$ $(\widehat{h}_{mn})$.

Пример. Пусть задана дискретная свертка (рис. 1):

$$S_{00}=1,\quad S_{10}=2,\quad S_{20}=1,\quad S_{01}=2,\quad S_{11}=4,$$
$$S_{21}=2,\quad S_{02}=1,\quad S_{12}=2,\quad S_{22}=0,\quad M=N=3.$$

Тогда

$$Z_s(x,\ y)=y^2(2x+1)+y(2x^2+4x+2)+x^2+2x+1.$$

Нули Z_s могут быть определены в виде

$$y_{1,2}(x)=\frac{-2x^2-4x-2\pm\sqrt{(2x^2+4x+2)^2-4(2x+1)(x^2+2x+1)}}{2(2x+1)}.$$

В данном случае для действительных значений x значения $y_{1,2}(x)$ также действительны и функция $y_{1,2}(x)$ может быть представлена графически (рис. 2). По графику легко определяются критические точки аналитической функции $y_{1,2}(x)$ и ветви этой функции, каждая из которых принадлежит только Z_f (или Z_h). Набор дискретных точек $(x_i,\ y_i)$, $i=1$—5, принадлежащих одной из этих ветвей (см. рис. 2), может быть таким:

$$(x_1=0,\ y_1=-1);\quad (x_2=1,\ y_2=-2);\quad (x_3=2,\ y_3=-3);$$
$$(x_4=3,\ y_4=-4);\quad (x_5=4,\ y_5=-5).$$

Для определения M_f, N_f проверим случай $M_{\widehat{f}}=2$, $N_{\widehat{f}}=1$, т. е. будем искать сигнал в виде $f_{00}=a$; $f_{01}=b$.

Матрица H в данном случае записывается в виде

$$H_1=\begin{bmatrix} x_1^0y_1^0 & x_1^1y_1^0 \\ x_2^0y_2^0 & x_2^1y_2^0 \end{bmatrix}.$$

Так как $|H_1|\neq 0$, то условие (3) не выполняется. Пусть теперь $M_{\widehat{f}}=1$, $N_{\widehat{f}}=2$; как и в предыдущем случае, $|H|\neq 0$ и условие (3) опять не выполняется. Если задать $M_{\widehat{f}}=2$, $N_{\widehat{f}}=2$, матрица примет вид

$$H_2=\begin{bmatrix} x_1^0y_1^0 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ x_2^0y_2^0 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ x_3^0y_3^0 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ x_4^0y_4^0 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Для нее $|H_2|=0$; $r(H_2)=3$, т. е. условие (3) выполняется. Поэтому принимаем $M_{\widehat{f}}=2$, $N_{\widehat{f}}=2$ и составляем систему (2) относительно $\widehat{f}_{mn}$ с матрицей H_2: $f_{mn}H_2=0$.

Общее решение этой системы дает

$$\hat{f}_{00} = -2k, \quad \hat{f}_{01} = -2k, \quad \hat{f}_{10} = -2k, \quad \hat{f}_{11} = 0,$$

где k — постоянный произвольный множитель. Приняв для определенности $k = -1/2$, получим (рис. 3, *а*)

$$\hat{f}_{00} = 1, \qquad \hat{f}_{01} = 1, \qquad \hat{f}_{10} = 1, \qquad \hat{f}_{11} = 0.$$

После этого легко определяются (рис. 3, *б*)

$$\hat{h}_{00} = 1, \quad \hat{h}_{01} = 1, \quad \hat{h}_{10} = 1, \quad \hat{h}_{11} = 2.$$

Заключение. Приведенный алгоритм рассмотрен в продолжение работы [1]. Он представляет основанную на свойствах нулей двумерных целых функций последовательность действий, которые в отсутствие ошибок регистрации и вычислений при восстановлении пространственно-ограниченных сигналов приводят к решению уравнения свертки с неизвестным ядром. Алгоритм имеет самостоятельную ценность, так как при его построении определен не известный ранее подход к использованию свойств многомерных целых функций и их нулей.

Непосредственно в указанном виде алгоритм, очевидно, реализован быть не может, так как задача решения уравнения свертки с неизвестным ядром является некорректной .Это проявляется в том, что из-за чувствительности к ошибкам регистрации отсчетов и вычислений набор нулей (x_i, y_i) вычисляется приближенно, поэтому ранг матрицы H определяется неточно, и система (2) обычно оказывается несовместной. При практической реализации чувствительность алгоритма к ошибкам вычислений может быть уменьшена за счет: а) использования метода регуляризации для решения систем уравнений с неточно определенными коэффициентами, что позволит синтезировать рекурсивный алгоритм; б) дополнения системы линейных однородных уравнений хотя бы одним неоднородным; в) высокой избыточности, связанной с тем, что число линейных однородных уравнений, которое может быть сформировано с помощью алгоритма, теоретически не ограничено.

В этом случае достоинством алгоритма при его реализации на ЭВМ является возможность использования численных методов решения задач линейной алгебры и нахождения нулей многочлена одной переменной.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бакалов В. П., Русских Н. П.** О возможности решения уравнения свертки при неизвестном ядре в случае многомерных пространственно-ограниченных сигналов // Автометрия.— 1985.— № 5.
2. **Бакалов В. П.** О возможности восстановления многомерных дискретных сигналов по амплитудному спектру // Радиотехника.— 1982.— № 11.
3. **Бакалов В. П.** Цифровой алгоритм восстановления дискретных двумерных пространственно-ограниченных сигналов по автокорреляционной функции // Радиотехника и электроника.— 1985.— № 6.

Поступило в редакцию 21 апреля 1986 г.

УДК 535.41

А. С. МАЗМАНИШВИЛИ

(Харьков)

СТАТИСТИКА ОТСЧЕТОВ ПРИ ФОТОДЕТЕКТИРОВАНИИ НЕПОЛЯРИЗОВАННОГО ГАУССОВА ИЗЛУЧЕНИЯ

Известно [1] решение задачи о статистике фотоотсчетов одномодового линейно поляризованного излучения в приближении гауссовой модели лазера в области ниже порога. Вероятность $P(m)$ зарегистрировать m фотоотсчетов за временной интервал $(0, t)$

$$P(m) = \oint \frac{d\lambda}{2\pi i} (\lambda - 1)^{-m-1} Q(\lambda, \sigma, t) \tag{1}$$

может быть найдена с помощью производящей функции

$$Q(\lambda, \sigma, t) = \frac{4rve^{vt}}{(r+v)^2 e^{rt} - (r-v)^2 e^{-rt}}, \tag{2}$$