5. **Астафуров В. Г., Глазов Г. Н.** Сравнение точности измерения интенсивности света методами счета одноэлектронных импульсов и накопления заряда // Радиотехника и электроника.— 1985.— Т. 30, № 1.
6. **Астафуров В. Г., Куранов Ю. М.** Оценки эффективности оптического измерителя скорости ветра на основе замкнутого численного эксперимента // Тез. докл. VIII Всесоюз. симп. по лазерному и акустическому зондированию атмосферы.— Томск: Ин-т оптики атмосферы СО АН СССР, 1984.— Ч. 2.

Поступила в редакцию 6 января 1986 г.

УДК 519.642.3

П. М. АРОНОВ, В. В. ЛЕОНОВ

(Свердловск)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ПОРЯДКУ СОСТОЯТЕЛЬНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

К уравнению типа свертки приводят многие задачи обработки экспериментальных данных. Если входящие в уравнение функции финитны (отличны от нуля на конечных интервалах), то уравнение может быть представлено в виде [1]

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = y(t), \quad |t| < T, \tag{1}$$

где периодические (с периодом 2 T) вещественные функции $x(t)$, $g(t)$, $y(t)$ принадлежат пространству $L_2(-T, T)$ функций, интегрируемых с квадратом на интервале $(-T, T)$. При этом интегральный оператор в уравнении (1) является оператором Гильберта-Шмидта [2], следовательно, он вполне непрерывен (компактен) и не имеет ограниченного обратного. Даже если решение существует и единственно, оно не устойчиво к малым возмущениям правой части уравнения и задача является некорректной по Адамару.

Известны методы получения устойчивых приближенных решений уравнения (1), использующие некоторую априорную информацию. Она позволяет выделить компактное множество функций S, включающее решение, или задать шар известного радиуса δ, содержащий возмущения правой части уравнения [1, 3].

Во многих практических задачах возмущения правой части уравнения случайны и адекватным является статистическое описание как исходных данных, так и приближенных решений. Разработаны статистические методы оценивания решения уравнения (1), опирающиеся на априорное знание компактного множества S, содержащего решение, а также ковариационного оператора случайных возмущений правой части (1), описываемых в виде случайного процесса в оснащенном гильбертовом пространстве [4].

При использовании указанных методов решения уравнения (1) на практике возникают известные трудности. Во-первых, априорная информация о решении и возмущениях правой части уравнения (1) часто носит качественный характер. Например, это могут быть сведения о гладкости решения и негладкости исходных данных, не содержащие соответствующих количественных характеристик. Такая информация не позволяет выделить нужный компакт S и задать с необходимой точностью характеристики интенсивности возмущений, такие как δ или дисперсия при статистическом описании. Во-вторых, исходные данные, полученные на опыте, как правило, конечномерны и приходится строить конечномерные аппроксимации приближенных методов, разработанных для бесконечномерных функциональных пространств.

Указанные трудности можно преодолеть путем извлечения недостающей количественной информации непосредственно из исходных данных для решения задачи (1), считая по определению приближенным решением некоторую конечномерную аппроксимацию функции из $L_2(-T, T)$ с размерностью, определяемой размерностью исходных данных.

Пусть из опыта известны возмущенные случайными погрешностями измерений значения правой части уравнения (1)

$$\tilde{y}(t_k) = y(t_k) + \xi(t_k), \quad k = \overline{-N, N}, \tag{2}$$

в узлах равномерной сетки

$$\hat{x}^N(t_k) = w_k^N(\{\tilde{y}(t_l)\}_{l=-N}^{N}), \quad k = \overline{-N, N}, \tag{4}$$

и снабжена характеристикой качества, например функцией риска

$$R^N = M\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\left(\hat{x}^N(t_k) - x(t_k)\right)^2\right], \tag{5}$$

представляющей собой математическое ожидание квадрата среднеквадратической погрешности оценки (4).

В классе W^N может быть найдена оптимальная оценка, минимизирующая функцию риска (5), но так как она зависит от неизвестного решения $x(t)$, то ее нельзя использовать на практике. Однако на основе качественной априорной информации в классе W^N может быть выбрано семейство оценок, зависящих от параметра, при удачном выборе которого соответствующая оценка окажется близкой к оптимальной. Нужное значение параметра также зависит от $x(t)$ и потому неизвестно априори. Однако по исходным данным, зависящим от $x(t)$, может быть построена его статистическая оценка.

Рассмотрим поведение приближенных решений (4) при $N \to \infty$. В этом случае как приближенное решение, так и оценки необходимых для его построения параметров являются функциями большого числа случайных величин и при определенных условиях проявляют возрастающую статистическую устойчивость. Этот факт лежит в основе теории асимптотического статистического оценивания, в терминах которой приближенное решение (4) представляет собой статистическую оценку; к ней предъявляется требование состоятельности

$$\lim_{N\to\infty} R^N = 0. \tag{6}$$

Выполнение условия (6) гарантирует близость в среднеквадратическом смысле оценки к решению в узлах сетки (3), а также при соответствующей интерполяции на интервале $(-T, T)$ при конечных, но достаточно больших N, несмотря на то, что дисперсия возмущений правой части не стремится к нулю.

Свойства возмущений в исходных данных (2) описываются ковариационной матрицей

$$(R^N)_{kl} = M\xi(t_k)\xi(t_l), \quad k, l = \overline{-N, N}. \tag{7}$$

След матрицы (7) (сумма ее диагональных элементов) характеризует дисперсию возмущений $\sigma^2 = \frac{1}{2N+1}\operatorname{tr}(R^N) = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} M(\xi(t_k))^2$.

Если дисперсия σ^2 фиксирована, то корреляционные свойства возмущений характеризуются нормой матрицы $\|R^N\|_2 = \sup\limits_{\|e^N\|=1} \|R^N e^N\|$, где $\|e^N\| = \sqrt{\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{k=-N}^{N} e_k^2}$ есть норма вектора $(2N+1)$-мерного евклидова пространства.

Норма ковариационной матрицы R^N лежит в пределах $\sigma^2 \leqslant \|R^N\|_2 \leqslant (2N+1)\sigma^2$, достигая минимального значения для равномощных некоррелированных возмущений и максимального, когда возмущения представляют собой собственный вектор матрицы R^N со случайной амплитудой.

В ряде практически важных задач возмущения в исходных данных можно считать слабо коррелированными. Формализуя это свойство при асимптотическом подходе, назовем возмущения с ковариационной матрицей R^N асимптотически слабо коррелированными, если

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\|R^N\|_2}{2N+1} = 0 \quad \wedge \lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{tr}(R^N)}{2N+1} = \sigma^2 > 0. \tag{8}$$

Рассмотрим класс статистических оценок решения уравнения (1) вида

$$\hat{x}^N(t_k) = \frac{1}{2N+1}\sum_{l=-N}^{N} w_{k-l}^N \quad \tilde{y}(t_l) = \sum_{l=-N}^{N} \tilde{Y}_l^N W_l^N e^{i\frac{2\pi}{2N+1}kl}, \quad k = -\overline{N, N}, \tag{9}$$

где w_{k-l}^N — некоторая циркулянтная теплицева матрица, порожденная периодической функцией $w^N(t_k)$, а комплексные коэффициенты

$$\begin{gathered} \tilde{Y}_l^N = \mathscr{F}_l^N[\tilde{y}(t_k)] \equiv \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} \tilde{y}(t_k)\, e^{-i\frac{2\pi}{2N+1}kl}, \\ W_l^N = \mathscr{F}_l^N[w^N(t_k)], \quad l = -\overline{N, N}, \end{gathered} \tag{10}$$

представляют собой дискретные преобразования Фурье (ДПФ) функций $\tilde{y}(t_k)$ и $w^N(t_k)$ соответственно. Функция риска (5) для оценок (9) имеет вид

$$R^N(\{W_k^N\}_{k=-N}^N) = \sum_{k=-N}^{N} M\,|\tilde{Y}_k^N - Y_k^N|^2\,|W_k^N|^2 + \sum_{k=-N}^{N} |Y_k^N W_k^N - X_k^N|^2, \tag{11}$$

где $Y_k^N = M\tilde{Y}_k^N = \mathscr{F}_k^N[y(t_l)]$, $X_k^N = \mathscr{F}_k^N[x(t_l)]$. Первое слагаемое в (11) представляет собой дисперсию оценки (9), второе — ее среднеквадратическое смещение.

Класс оценок (9) содержит «классическое» решение, представляющее собой точное решение уравнения

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} \tilde{x}^N(t_k)\, g(t_l - t_k) = \tilde{y}(t_l), \quad l = -\overline{N, N}. \tag{12}$$

Его можно получить, положив в (9) $W_k^N = \frac{1}{G_k^N}$, где $G_k^N = \mathscr{F}_k^N[g(t_l)]$. Если возмущения в данных асимптотически слабо коррелированы, то «классическое» решение асимптотически неустойчиво, а именно, для его функции риска (11) справедливо $\lim\limits_{N\to\infty} R^N\left(\left\{\frac{1}{G_k^N}\right\}_{k=-N}^{N}\right) = \infty$. Так, при асимптотическом статистическом подходе проявляется некорректность рассматриваемой задачи (1).

Естественно попытаться найти состоятельные оценки решения, удовлетворяющие условию (6), среди оценок, близких к оптимальной в классе (9). Последняя дает минимум функции риска (11) и может быть найдена из условий $\frac{\partial R^N(\{W_l^N\}_{l=-N}^N)}{\partial \overset{*}{W}_k^N} = 0, k = \overline{-N, N}$, где * — знак комплексного сопряжения. Для весов оптимальной оценки получаем

$$\overset{\circ}{W}_k^N = \frac{X_k^N}{Y_k^N} \frac{1}{1+\beta_k^N}, \quad k = \overline{-N, N}, \tag{13}$$

где величины

$$\beta_k^N = \frac{M\,|\tilde{Y}_k^N - Y_k^N|^2}{|Y_k^N|^2}, \quad k = \overline{-N, N}, \tag{14}$$

характеризуют относительные возмущения коэффициентов ДПФ правой части уравнения (1) (отношения «шум/сигнал»).

Минимальная погрешность оценок (9) характеризуется значением функции риска (11) при подстановке в нее оптимальных весов (13)

$$R_0^N = \sum_{k=-N}^{N} \frac{|X_k^N|^2 \beta_k^N}{1+\beta_k^N}. \tag{15}$$

Очевидно, оптимальная оценка не имеет практической ценности, так как для ее построения необходимо знать решение. Однако с ее помощью может быть охарактеризована эффективность любой другой оценки из рассматриваемого класса. Функцию риска произвольной оценки вида (9) с помощью (13) и (15) можно представить следующим образом:

$$R^N(\{W_l^N\}_{l=-N}^N) = R_0^N + \sum_{k=-N}^{N} \frac{|X_k^N|^2}{1+\beta_k^N} \left| \frac{W_k^N - \overset{\circ}{W}_k^N}{\overset{\circ}{W}_k^N} \right|^2. \tag{16}$$

Потеря эффективности оценки, обусловленная отклонением весов от оптимальных, характеризуется отношением

$$\frac{R^N(\{W_k^N\}_{k=-N}^N)}{R_0^N} = 1 + \bar{\Delta}^N(\{W_k^N\}_{k=-N}^N), \tag{17}$$

где

$$\bar{\Delta}^N(\{W_k^N\}_{k=-N}^N) = \frac{\sum\limits_{k=-N}^{N} \frac{|X_k^N|^2 \beta_k^N \Delta(W_k^N)}{1+\beta_k^N}}{\sum\limits_{k=-N}^{N} \frac{|X_k^N|^2 \beta_k^N}{1+\beta_k^N}} \tag{18}$$

представляет собой взвешенное среднее неотрицательных величин

$$\Delta(W_k^N) = \frac{1}{\beta_k^N} \left| \frac{W_k^N - \overset{\circ}{W}_k^N}{\overset{\circ}{W}_k^N} \right|^2 \equiv \frac{|W_k^N - \overset{\circ}{W}_k^N|^2 / |\overset{\circ}{W}_k^N|^2}{M|\tilde{Y}_k^N - Y_k^N|^2 / |Y_k^N|^2}, \tag{19}$$

характеризующих относительное отклонение весов оценки от оптимальной в сравнении с относительным возмущением исходных данных.

Назовем оценку, порождаемую весами $\{W_k^N\}_{k=-N}^N$, асимптотически оптимальной по порядку с константой C, если справедливо условие

$$\sup_{x(t)\in L_2(-T,T)} \lim_{N\to\infty} \frac{R^N(\{W_k^N\}_{k=-N}^N)}{R_0^N} = C^2, \tag{20}$$

показывающее, что при достаточно больших N среднеквадратическая погрешность оценки не более чем в C раз превосходит погрешность оптимальной оценки.

Из (17) и (18) следует, что справедлива

Лемма 1. Если

$$\lim_{N\to\infty}\max_{0<k\leqslant N}\Delta\left(W_k^N\right)=\Delta<\infty, \tag{21}$$

то соответствующая оценка вида (9) асимптотически оптимальна по порядку с константой $C=\sqrt{1+\Delta}$.

Рассмотрим семейство оценок

$$\widehat{x}_n^N(t_k)=\sum_{l=-n}^{n}\frac{\widetilde{Y}_l^N}{G_l^N}e^{i\frac{2\pi}{2N+1}lk},\quad k=-\overline{N,N}, \tag{22}$$

порожденных весами вида

$$W_k^N(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{G_k^N}, & |k|\leqslant n;\\ 0, & |k|>n,\end{cases} \tag{23}$$

зависящими от натурального параметра $0\leqslant n\leqslant N$. Определим условия, которым должны удовлетворять значения параметра n, чтобы соответствующие оценки из семейства (22) были асимптотически оптимальными по порядку. Для этого найдем отклонение весов (23) от оптимальных (13)

$$\Delta\left(W_k^N(n)\right)=\begin{cases}\left|\sqrt{\beta_k^N}+\alpha_k^N\left(1+\beta_k^N\right)\right|^2, & |k|\leqslant n;\\ \left(\beta_k^N\right)^{-1}, & n<|k|\leqslant N.\end{cases} \tag{24}$$

Здесь величины

$$\alpha_k^N=\frac{Y_k^N-G_k^NX_k^N}{G_k^NX_k^N}\Bigg/\sqrt{\beta_k^N},\quad k=-\overline{N,N},$$

характеризуют сравнительный вклад в погрешность коэффициентов Фурье исходных данных дискретизации уравнения (1) и случайных возмущений. Можно показать, что в случае, когда возмущения асимптотически слабо коррелированы и $x(t)$, $g(t)$, $y(t)\in L_2(-T,\ T)$,

$$\lim_{N\to\infty}\max_{0<k\leqslant N}\left|\alpha_k^N\right|=0. \tag{25}$$

Предположим, что при $N\to\infty$ существует последовательность натуральных чисел $\{n_0^N\}$ такая, что

$$\begin{cases}\beta_k^N\leqslant 1, & |k|\leqslant n_0^N\leqslant N;\\ \beta_k^N\geqslant 1, & n_0^N<|k|\leqslant N.\end{cases} \tag{26}$$

В случае асимптотически слабо коррелированных возмущений такая последовательность всегда может быть выбрана, если спектр $y(t)$ достаточно регулярен (при обращении в нуль некоторой компоненты спектра равны нулю и все последующие). Предположение (26) означает, что в области нижних частот, отвечающей за плавное регулярное поведение функций, спектральные амплитуды функции $y(t_k)$ преобладают над амплитудами возмущений и наоборот, в области высоких частот преобладают возмущения.

Теорема 1. Оценка решения уравнения (1) из семейства (22) при выборе параметра из условия (26) асимптотически оптимальна по порядку с константой $C=\sqrt{2}$.

Доказательство вытекает из леммы 1 с учетом (24)—(26). Свойство асимптотической оптимальности по порядку оценок (22) устойчиво к отклонению значений параметра от n_0^N. Пусть вместо n_0^N используются значения n^N, для которых условие (26) выполняется лишь приближенно, леммы 1 с учетом (24) и (26) вытекает, что соответствующая оценка асимптотически оптимальна по порядку с константой $C=\sqrt{2+\delta}$.

В основе рассматриваемого асимптотического подхода лежит требование состоятельности статистических оценок решения уравнения (1), т. е. неограниченное увеличение их точности при $N\to\infty$. Существование состоятельных оценок вида (9) гарантирует следующая теорема.

Теорема 2. Если решение уравнения (1) единственно и возмущения в исходных данных (2) асимптотически слабо коррелированы, то в классе оценок решения вида (9) существуют состоятельные оценки (для которых справедливо (6)).

Доказательство. Рассмотрим функцию риска оценок (22) в зависимости от параметра n. При подстановке (23) в (11) получаем $R^N(n)=D^N(n)+\delta_x^N(n)$, где $D^N(n)=\sum\limits_{k=-n}^{n}\dfrac{M\,|\widetilde{Y}_k^N-Y_k^N|^2+|Y_k^N-G_k^N X_k^N|^2}{|G_k^N|^2}$ монотонно не убывает, а функция $\delta_x^N(n)=\sum\limits_{|k|=n+1}^{N}|X_k^N|^2$ монотонно не возрастает. Поэтому существует значение параметра $n=n_1^N$ такое, что

$$D^N(n_1^N)\leqslant\delta_x^N(n_1^N)\wedge D^N(n_1^N+1)\geqslant\delta_x^N(n_1^N+1),$$

$$R^N(n_1^N)\leqslant 2\delta_x^N(n_1^N)\wedge R^N(n_1^N+1)\leqslant 2D^N(n_1^N+1).$$

Покажем, что оценка из семейства (22) при $n=n_1^N$ состоятельна, т. е. $\lim\limits_{N\to\infty}R^N(n_1^N)=0$. Для этого достаточно показать, что либо $\lim\limits_{N\to\infty}\delta_x^N(n_1^N)=0$, либо $\lim\limits_{N\to\infty}D^N(n_1^N+1)=0$. Первое из этих соотношений очевидно, если $\lim\limits_{N\to\infty}n_1^N=\infty$. В противном случае $\lim\limits_{N\to\infty}n_1^N=n_1<\infty$ и в силу (8) и (25)

$$\lim_{N\to\infty}D^N(n_1^N+1)\leqslant\left(\lim_{N\to\infty}\frac{\|R^N\|_2}{2N+1}\right)\left(\sum_{k=-(n_1+1)}^{n_1+1}\frac{1}{|G_k|^2}\right)=0.$$

Здесь $G_k=\lim\limits_{N\to\infty}G_k^N=\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}g(t)\,e^{-\frac{\pi}{T}kt}\,dt\neq 0$, так как решение уравнения (1) единственно. Таким образом, теорема доказана.

Очевидным следствием теоремы 2 является состоятельность асимптотически оптимальных по порядку оценок. Так проявляется роль априорной информации о решении (качественной в рассматриваемом подходе), которая позволяет слабую коррелированность возмущений в исходных данных из дестабилизирующего фактора, приводящего к неустойчивости «классического» решения, превратить в фактор, обусловливающий статистическую устойчивость асимптотически оптимальных по порядку оценок решения.

Для реализации предложенных оценок необходимо указать способ выбора значений параметра n, удовлетворяющих при $N\to\infty$ условию (26) или более слабому условию (27). Можно показать, что для этого могут быть использованы известные методы [5], различающиеся по форме и полноте задания априорной информации о возмущениях в исходных данных. Наибольший интерес представляют те из них, которые требуют минимальной априорной информации, носящей качественный характер, например, метод cross — validation [5].

Рассмотрим семейство статистических оценок правой части уравнения (1)

$$\widehat{y}_n^N(t_k) = \sum_{l=-n}^{n} \widetilde{Y}_l^N e^{i\frac{2\pi}{2N+1}kl}, \quad k = \overline{-N, N}. \tag{28}$$

Функция риска оценок (28) зависит от параметра n:

$$\Omega^N(n) = \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} M\left(\widehat{y}_n^N(t_k) - y(t_k)\right)^2 = \sum_{k=-n}^{n} \beta_k^N |Y_k^N|^2 + \sum_{|k|=n+1}^{N} |Y_k^N|^2. \tag{29}$$

Нетрудно показать, что минимум функции (29) соответствует значению параметра $n = n_0^N$, удовлетворяющему условию (26). Метод cross — validation позволяет выбрать значение параметра, минимизирующее функцию (29) при $N \to \infty$ и, следовательно, построить оценку n_0^N. Однако этот метод довольно громоздок. Поэтому рассмотрим кратко более простой способ, основанный на построении состоятельной статистической оценки функции (29), позволяющий не только выбрать оптимальное значение параметра при $N \to \infty$, но и оценить среднеквадратическую погрешность оценок из семейства (28).

Спектр мощности возмущений, если они некоррелированны, равномерно распределен по частотам

$$M|\widetilde{Y}_k^N - Y_k^N|^2 = \frac{\sigma^2}{2N+1}, \quad k = \overline{-N, N}, \tag{30}$$

и функция риска (29) принимает вид

$$\Omega^N(n) = \frac{2n+1}{2N+1}\sigma^2 + \delta_y^N(n), \tag{31}$$

где

$$\delta_y^N(n) = \sum_{|k|=n+1}^{N} |Y_k^N|^2 \tag{32}$$

— среднеквадратическое смещение оценок (28).

Построим статистические оценки дисперсии σ^2 и среднеквадратического смещения (32), а тем самым и функции риска (31). Для этого рассмотрим статистики

$$S(n) = \sum_{|k|=n+1}^{N} |\widetilde{Y}_k^N|^2, \quad n = \overline{0, N-1}. \tag{33}$$

Вследствие асимптотической нормальности коэффициентов Фурье $\widetilde{Y}_k^N$ [6] случайные величины $\frac{(2N+1)S(n)}{\sigma^2}$ имеют асимптотически нецентральное χ^2-распределение с $2(N-n)$ степенями свободы и параметром нецентральности $\frac{(2N+1)\delta_y^N(n)}{\sigma^2}$. Таким образом, статистики (33) содержат информацию как о дисперсии возмущений σ^2, так и о среднеквадратическом смещении оценок (28) $\delta_y^N(n)$.

Рассмотрим математическое ожидание статистик (33)

$$MS(n) = \frac{2(N-n)\sigma^2}{2N+1} + \delta_y^N(n). \tag{34}$$

Из (34) следует, что если последовательность натуральных чисел $\{m^N\}$

такова, что $\lim\limits_{N\to\infty} \delta_y^N(m^N) = 0$, то искомые оценки можно выбрать в виде

$$\widehat{\sigma}^2(m^N) = \frac{2N+1}{2(N-m^N)} S(m^N), \tag{35}$$

$$\widehat{\delta}_y^N(n) = \begin{cases} S(n) - \frac{2(N-n)}{2N+1}\widehat{\sigma}^2(m^N), & n \leqslant n_{\max}^N < m^N; \\ 0, & n > n_{\max}^N, \end{cases} \tag{36}$$

где $n_{\max}^N$ — максимальное натуральное число, при котором $\widehat{\delta}_y^N(n) > 0$. Полагая

$$n_{\max}^N = [qm^N], \tag{37}$$

где $0 < q < 1$ и $[\cdot]$ обозначает целую часть числа, получаем, что обе оценки (35) и (36) зависят от одного параметра m^N, значение которого однозначно определяется условием

$$m^N = \max\left\{m\colon n \leqslant [qm] \Rightarrow S(n) - \frac{2(N-n)}{2N+1}\widehat{\sigma}^2(m) > 0\right\}. \tag{38}$$

Приведем без доказательства теорему, гарантирующую состоятельность оценки функции (31) вида

$$\widehat{\Omega}^N(n) = \frac{2n+1}{2N+1}\widehat{\sigma}^2(m^N) + \widehat{\delta}_y^N(n) \tag{39}$$

в тех случаях, когда среднеквадратическое смещение $\delta_y^N(n^N)$ убывает при $n^N \to \infty$ не медленнее, чем некоторая степенная функция.

Теорема 3. Пусть для некоторого $\alpha > 0$ $\lim\limits_{n^N\to\infty} (n^N)^\alpha \delta_y^N(n^N) = 0$. Тогда оценка функции (31), определяемая соотношениями (35)—(39), состоятельна, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} M\left(\frac{\widehat{\Omega}^N(n^N)}{\Omega^N(n^N)} - 1\right)^2 = 0 \tag{40}$$

для любой последовательности натуральных чисел $n^N \leqslant N$.

Оценку $\widehat{n}_0^N$ оптимального значения параметра n_0^N найдем из условия

$$\widehat{\Omega}^N(\widehat{n}_0^N) = \min_{0\leqslant n\leqslant N} \widehat{\Omega}^N(n). \tag{41}$$

Тогда из (40) следует, что при $N \to \infty$ последовательность $\{\widehat{n}_0^N\}$ минимизирует функцию $\Omega^N(n)$ и, следовательно, асимптотически удовлетворяет условиям (26), а соответствующая оценка из семейства (22) асимптотически оптимальна по порядку с константой $C = \sqrt{2}$.

Таким образом, в случае некоррелированных возмущений задача построения состоятельной асимптотически оптимальной по порядку оценки решения уравнения (1) решена без привлечения количественной априорной информации о решении и величине погрешностей в исходных данных.

Предложенный метод построения приближенного решения уравнения (1) реализован в виде программы на языке Фортран-IV и опробован на модельных примерах и практических задачах.

Для иллюстрации работы алгоритма рассмотрим тестовый пример, предложенный в [1]. Решение задается функцией

$$x(t) = \begin{cases} \left[\frac{1}{0{,}95}\left(e^{-\frac{(t+0{,}2)^2}{0{,}03}} + e^{-\frac{(t-0{,}2)^2}{0{,}03}}\right) - 0{,}05\right] 1{,}4(t+0{,}5), & |t| \leqslant 0{,}5; \\ 0, & |t| > 0{,}5. \end{cases}$$

Точная правая часть уравнения $y(t)$ получается в результате свертки

n	$\widehat{\Omega}^N(n)$	$\Omega^N(n)$	n	$\widehat{\Omega}^N(n)$	$\Omega^N(n)$
0	$0{,}687\cdot10^{-3}$	$0{,}689\cdot10^{-3}$	6	$0{,}143\cdot10^{-6}$	$0{,}132\cdot10^{-6}$
1	$0{,}170\cdot10^{-3}$	$0{,}173\cdot10^{-3}$	7	$0{,}145\cdot10^{-6}$	$0{,}145\cdot10^{-6}$
2	$0{,}567\cdot10^{-4}$	$0{,}581\cdot10^{-4}$	8	$0{,}164\cdot10^{-6}$	$0{,}164\cdot10^{-6}$
3	$0{,}306\cdot10^{-4}$	$0{,}316\cdot10^{-4}$	9	$0{,}183\cdot10^{-6}$	$0{,}183\cdot10^{-6}$
4	$0{,}738\cdot10^{-5}$	$0{,}780\cdot10^{-5}$	...	...	...
5	$0{,}752\cdot10^{-6}$	$0{,}704\cdot10^{-6}$			

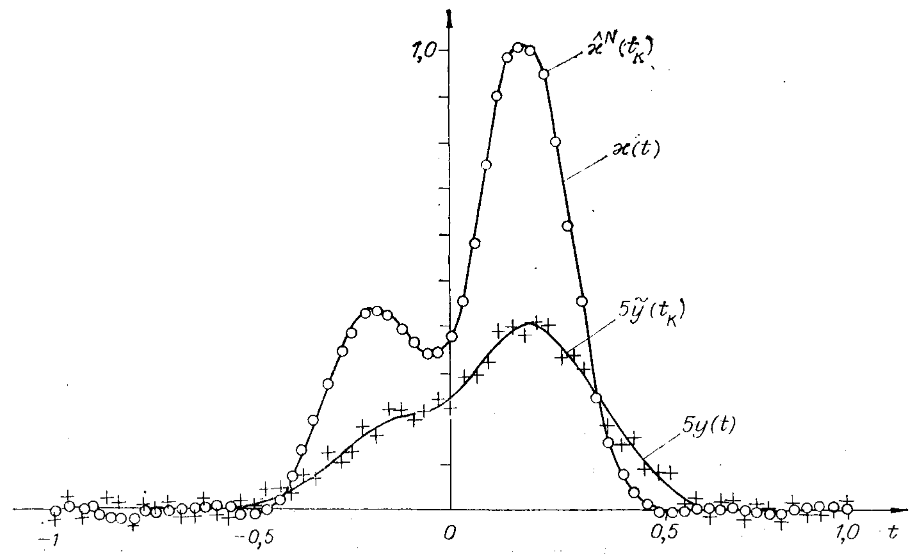
$x(t)$ с ядром

$$g(t)=\begin{cases} e^{-80t^2}, & |t|\leqslant 0{,}5;\\ 0, & |t|>0{,}5. \end{cases}$$

Исходные данные для решения уравнения представляют собой значения правой части на равномерной сетке $t_k=\frac{2}{65}k$, $k=-\overline{32,32}$, возмущенные случайными числами из нормальной совокупности с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением $\sigma=\alpha\max\limits_{|t|<1}|y(t)|$ $(\alpha=0{,}01)$. Приведем результаты вычислений для одной из реализаций случайных возмущений правой части (см. рисунок). Точные значения функции $\Omega^N(n)$ и значения ее оценки $\widehat{\Omega}^N(n)$ приведены в таблице.

Очевидно, для данной реализации оптимальное значение параметра и его оценка совпадают: $n_0^N=\widehat{n}_0^N=6$. Для рассматриваемого примера такое совпадение является типичным. В худшем случае для других реализаций случайных возмущений значения n_0^N и $\widehat{n}_0^N$ отличались на 1. Точность полученной оценки не ниже точности приближенного решения, построенного с помощью регуляризации по методу невязки [1]. Однако в отличие от последнего, предлагаемый метод не требует априорных сведений о величине возмущений и прост в вычислительном отношении.

Алгоритм может быть использован для оценивания функций $y(t)$ и их производных $y^{(m)}(t)$ $(m<N)$ по значениям $\tilde{y}(t_l)=y(t_l)+\xi(t_l)$ функции, возмущенным некоррелированным шумом. Для функций алгоритм позволяет оценить точность получаемых аппроксимаций (28), так как $\sqrt{\widehat{\Omega}^N(n)}$ представляет собой состоятельную оценку их среднеквадратической погрешности в зависимости от выбранного значения параметра n.



ЛИТЕРАТУРА

1. **Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.** Регуляризующие алгоритмы и априорная информация.— М.: Наука, 1983.
2. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. В 4-х т.— М.: Мир, 1977.— Т. 1: Функциональный анализ.
3. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М.: Наука, 1978.
4. **Федотов А. М.** Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных.— Новосибирск: Наука, 1982.
5. **Воскобойников Ю. Е.** Выбор размерности функциональных приближений экспериментальных данных // Автометрия.— 1985.— № 4.
6. **Бриллинджер Д.** Временные ряды. Обработка данных и теория.— М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 30 июля 1986 г.

УДК 518 : 517.949.12

Р. Р. НИГМАТУЛЛИН, М. Х. САЛАХОВ

(Казань)

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Понятие дробной производной (ДП) было введено еще Лейбницем [1]. Значительный вклад в разработку понятия ДП внес русский математик А. В. Летников. Как отмечается в [2], им было обобщено понятие производной и предложены новые оригинальные методы в решении дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Кроме того, он показал, что многие спецфункции могут быть выражены через элементарные посредством применения к ним оператора ДП.

Особый интерес заслуживает применение оператора ДП в естественных науках и практических исследованиях. Первое практическое применение ДП половинного порядка и ее аналоговая реализация стали активно использоваться в электрохимии [3, 4], что стимулировало появление монографии [5], где систематизирована обширная библиография (в основном математическая) по развитию аппарата дробного исчисления. Отметим также работу [6], где оператор ДП был использован для описания деформации в высокоэластичных полимерах. Совсем недавно вышла монография [7], автор которой, базируясь на идеях Летникова [2], предложил новый метод поиска граничных решений широкого класса уравнений тепломассопереноса.

Цель настоящей работы — разработка устойчивого алгоритма расчета ДП на основе метода статистической регуляризации. Проведены численные эксперименты по вычислению ДП от различных функций.

ДП и ее основные свойства. Нам понадобятся два основных определения оператора ДП, которые, как показано в [5], эквивалентны друг другу.

1. Определение Грюнвальда [8], Летникова [2]

$$D_a^q f \equiv \frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\left[\frac{x-a}{N}\right]^{-q}}{\Gamma(-q)}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f\left(x - j\left[\frac{x-a}{N}\right]\right)\right\}. \quad (1а)$$

Здесь q — произвольное действительное число; $f=f(x)$ — действительная функция; $\Gamma(x)$ — гамма-функция; пределы изменения x: $a \leqslant x < \infty$.