Отсутствие реальной экономии команд при реализации параллельного алгоритма объясняется неэффективностью поразрядной распаковки M-разрядного результата суммирования знаков по модулю 2. Секционированный алгоритм при $M=32$ экономичнее последовательного более чем в 10 раз.

Таким образом, рациональный выбор вида знаковой функции, параллельное формирование как битов несовпадения знаков коррелируемых процессов, так и сумм переменной разрядности позволили реализовать алгоритм формирования знаковой корреляционной функции, производительность которого пропорциональна разрядности используемого арифметико-логического устройства. Для 32-разрядного АЛУ достигнуто десятикратное повышение скорости вычислений по сравнению с последовательным алгоритмом вычисления ЗКФ. Кроме того, разработанный алгоритм параллельного накопления независимых сумм однобитовых операндов может быть использован в многочисленных приложениях, связанных с параллельной обработкой импульсных потоков.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мирский Г. Я.** Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения.— М.: Энергоиздат, 1982.
2. **Рабинер Л., Гоулд Б.** Теория и применение цифровой обработки сигналов.— М.: Мир, 1978.
3. **Руденко В. Г.** Реализация алгоритмов БПФ и БПУ без двоично-инверсного счетчика // АСУ и приборы автоматики. Харьков: Вища школа, 1982, вып. 63.

Поступила в редакцию 11 ноября 1985 г.

УДК 621.391.1

Б. Ф. БЕЗРОДНЫЙ, А. В. САВИЧ, Я. А. ФОМИН

(Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ ОДНОМЕРНЫХ НОРМАЛЬНЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ

Задача распознавания двух одномерных нормальных совокупностей может быть сформулирована как задача определения принадлежности ансамбля независимых случайных величин $x^n=(x_1, \ldots, x_n)$, называемого контрольной выборкой, к одному из двух нормальных законов $N_1=N(a_1, \sigma_1^2)$ или $N_2=N(a_2, \sigma_2^2)$.

В общем случае, когда средние a_1, a_2 и дисперсии σ_1^2, σ_2^2 неизвестны, правило распознавания записывается в виде [1]; если справедливо

$$V=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\widehat{\sigma}_1^2}(x_i-\widehat{a}_1)^2-\frac{1}{\widehat{\sigma}_2^2}(x_i-\widehat{a}_2)^2\right]+n\ln\frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2}\geqslant 2k, \tag{1}$$

принимается решение $x^n\in N_2$, в противном случае — решение $x^n\in N_1$. Здесь

$$\widehat{a}_i=\frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}x_j^{(i)};\ \widehat{\sigma}_i^2=\frac{1}{m_i-1}\sum_{j=1}^{m_i}(x_j^{(i)}-\widehat{a}_i)^2,\ i=1,\ 2,$$

— МП-оценки: соответствующих неизвестных параметров [2], полученные по обучающим выборкам $\left(x_1^{(i)}, \ldots, x_{m_i}^{(i)}\right)\in N_i$.

Представив $\widehat{\sigma}_i^2$ как $\widehat{\sigma}_i^2 = \frac{\sigma_i^2 \omega_i}{m_i - 1}$, перепишем (1) следующим образом:

$$V = \frac{m_1 - 1}{\sigma_1^2 \omega_1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \widehat{a}_1)^2 - \frac{m_2 - 1}{\sigma_2^2 \omega_2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \widehat{a}_2)^2 + n \ln \frac{\omega_1 \sigma_1^2 (m_2 - 1)}{\omega_2 \sigma_2^2 (m_1 - 1)} \geqslant 2k. \quad (2)$$

Поскольку известно [3], что все случайные величины $\widehat{a}_i$, ω_i, $i = 1, 2$, независимы, причем $\widehat{a}_i$ подчиняется нормальному закону $N(a_i, \sigma_i^2/m_i)$, а $\omega_i - \chi^2$ — распределению с $m_i - 1$ степенью свободы, то вероятность ошибки распознавания 1-го рода α, состоящей в том, что будет принято решение $x^n \in N_2$, когда на самом деле $x^n \in N_1$, можно записать в виде [4]

$$\alpha = P(V \geqslant 2k \mid x^n \in N_1) = \int_0^\infty \int_0^\infty P_{\omega_1 \omega_2}(V \geqslant 2k \mid x^n \in N_1) P_{m_1 - 1}(\omega_1) P_{m_2 - 1}(\omega_2)\, d\omega_1 d\omega_2,$$

где $P_{\omega_1 \omega_2}(V \geqslant 2k \mid x^n \in N_1)$ — условная вероятность того, что $V \geqslant 2k$ при фиксированных ω_1 и ω_2 и $x^n \in N_1$; $P_{m_1 - 1}(\omega_1)$ и $P_{m_2 - 1}(\omega_2)$ — плотности распределения случайных величин ω_1 и ω_2.

Для определения $P_{\omega_1 \omega_2}(V \geqslant 2k \mid x^n \in N_1)$, зафиксировав в (2) ω_1 и ω_2, сведем V к сумме независимых случайных величин, имеющих центральные и нецентральные χ^2-распределения.

Нетрудно убедиться, что ковариационные матрицы векторов $\xi = (x_1 - \widehat{a}_1, \ldots, x_n - \widehat{a}_1)^T$ и $\eta = (x_1 - \widehat{a}_2, \ldots, x_n - \widehat{a}_2)^T$ имеют общий базис из собственных векторов $g_1, \ldots, g_n$, причем $g_1 = (1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n})^T$, а остальные g_i, $i = 2, \ldots, n$, определяются условиями ортогональности и нормировки. Осуществляя декоррелирующее компоненты векторов ξ и η линейное преобразование, матрица которого составлена из векторов $g_1, \ldots, g_n$, приведем (2) к виду

$$V = \left(\frac{m_1 - 1}{\omega_1} - \frac{m_2 - 1}{r\omega_2}\right) \sum_{i=2}^{n} t_i^2 + \left[\frac{m_1 - 1}{\omega_1}\left(q - \frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\widehat{a}_1\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{m_2 - 1}{r\omega_2}\left(q - \frac{\sqrt{n}}{\sigma_1}\widehat{a}_2\right)^2\right] + k_0 \geqslant 0, \quad (3)$$

где $r = \sigma_2^2/\sigma_1^2$, $k_0 = n \ln \frac{\omega_1 \sigma_1^2 (m_2 - 1)}{\omega_2 \sigma_2^2 (m_1 - 1)} - 2k$, $q = (x_1 + \ldots + x_n)/\sigma_1 \sqrt{n}$,

$$t_i \in N(0, 1), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Выражение, стоящее в (3) в квадратных скобках, можно представить в виде линейной комбинации $k_1 \varkappa_1^2 + k_2 \varkappa_2^2$ квадратов независимых нормальных случайных величин

$$\varkappa_1 = q - \beta_1 z - \gamma_1 u \quad \text{и} \quad \varkappa_2 = q - \beta_2 z - \gamma_2 u,$$

где

$$z = \sqrt{n}\widehat{a}_2/\sigma_1, \quad u = \sqrt{n}\widehat{a}_1/\sigma_1.$$

Коэффициенты k_i, β_i, γ_i, $i = 1, 2$, определяемые условиями алгебраического равенства рассматриваемых выражений и независимости случайных величин $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, находятся в результате решения системы 6 уравнений с 6 неизвестными:

$$\begin{aligned} &\gamma_i = [t + \lambda_0 + (-1)^{i+1}\sqrt{(t + \lambda_0)^2 + 4t\alpha_1}]/2t; \quad \beta_i = 1 - \gamma_i; \\ &\alpha_1 = (m_1 - 1)/\omega_1, \quad \alpha_2 = (1 - m_2)/r\omega_2, \quad t = (\alpha_1/m_1 - \alpha_2 r/m_2)n; \\ &k_i = (-1)^{i+1}(\alpha_1 - \gamma_{3-i}\lambda_0)/(\gamma_1 - \gamma_2), \quad \lambda_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, имеем

$$V = \lambda_0\chi^2_{n-1,0} + \lambda_1\chi^2_{1,b_1} + \lambda_2\chi^2_{1,b_2} + k_0, \tag{5}$$

где
$$\lambda_i = k_i\sigma^2_{\varkappa_i};\ b_i = a^2_{\varkappa_i}\big/\sigma^2_{\varkappa_i};\ a^2_{\varkappa_i} = n\beta^2_i(a_1 - a_2)^2\big/\sigma^2_1;$$
$$\sigma^2_{\varkappa_i} = 1 + nr\beta^2_i/m_2 + n\gamma^2_i/m_1, \qquad i = 1, 2;$$

$\chi^2_{N,b}$ — случайная величина, подчиняющаяся нецентральному χ^2-распределению с N степенями свободы и параметром нецентральности b. Воспользовавшись инверсной формулой [5], получаем окончательно

$$P_{\omega_1\omega_2}(V \geqslant 2k \mid x^n \in N_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\theta(u)}{\rho(u)}\frac{du}{u},$$

В итоге вероятность ошибки распознавания 1-го рода α может быть вычислена по формуле

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty P_{m_1-1}(\omega_1)\,P_{m_2-1}(\omega_2)\frac{\sin\theta(u)}{u\rho(u)}\,d\omega_1 d\omega_2 du, \tag{6}$$

здесь $P_{m_i-1}(\omega_i)$ — плотность вероятности χ^2-распределения с $m_i - 1$ степенью свободы.

Легко проверить, что вероятность ошибки распознавания 2-го рода

$$\beta = P(V < 2k | x^n \in N_2)$$

может быть вычислена по той же формуле (6), если в (4), (5) поменять местами σ_1 и σ_2, m_1 и m_2, ω_1 и ω_2 и заменить k на $-k$, r на r^{-1}.

Анализ формул (4) и (5) показывает, что вероятности α и β суть функции пяти параметров: объемов выборок m_1, m_2, n, расстояния $d = (a_1 - a_2)^2/\sigma^2_1$ и отношения дисперсий $r = \sigma^2_2/\sigma^2_1$, которое без ограничения общности можно считать большим 1.

Полученные выражения для вероятностей ошибок распознавания α и β составляют основу для оптимизации системы распознавания двух одномерных нормальных совокупностей с неизвестными средними и дисперсиями, состоящей [6, 7] в отыскании вектора параметров системы θ, минимизирующего некоторый критерий $F(\theta)$ при ограничениях $f_j(\theta) \geqslant C_j$, $j = 1, \ldots, J$, на допустимые значения параметров и вероятности ошибок.

Следует отметить, что вероятности α и β зависят от априорно неизвестных величин a_1, a_2, σ_1, σ_2. Однако, как правило, можно заранее определить числа r_0 и d_0 (например, исходя из точности измерения выборочных значений) такие, что заведомо $r \geqslant r_0$ и $d \geqslant d_0$, и при оптимизации ориентироваться на наихудший случай $r = r_0$, $d = d_0$.

Учитывая тот факт, что во многих практических задачах эффективность системы распознавания, наряду с вероятностями ошибок, в значительной степени определяется длительностью обучения и принятия решения, в качестве критерия оптимальности системы $F(\theta)$ целесообразно использовать суммарный объем ρ обучающих и контрольной выборок, необходимых для достижения заданной достоверности распознавания:

$$\begin{aligned} &\rho = m_1 + m_2 + n \to \min; \\ &\alpha(n, m_1, m_2, r_0, d_0) \leqslant \alpha_0; \\ &\beta(n, m_1, m_2, r_0, d_0) \leqslant \beta_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Таблица 1

$1-\alpha_0$	r_0	$d_0=1,0$			$d_0=0,5$			$d_0=0,25$			$d_0=0,1$		
		m^*	n^*	ρ^*	m^*	n^*	ρ^*	m^*	n^*	ρ^*	m^*	n^*	ρ^*
0,9	1,1	13	20	46	25	39	89	48	75	171	106	160	372
	1,3	14	20	48	26	41	93	46	74	166	83	138	304
	1,5	14	21	49	26	42	94	43	70	156	64	113	241
	1,8	14	21	49	24	40	88	36	61	133	50	83	183
0,95	1,1	21	36	78	41	70	152	77	122	276	153	242	548
	1,3	22	38	82	42	73	157	75	119	269	121	206	448
	1,5	23	39	85	41	71	153	67	110	244	95	159	349
	1,8	22	39	83	38	67	143	57	95	209	79	123	281
0,99	1,1	37	69	143	72	132	276	127	220	474	264	463	991
	1,3	40	72	152	74	135	283	121	212	454	209	379	797
	1,5	41	73	155	73	131	277	108	190	406	159	278	596
	1,8	40	73	153	66	113	245	92	156	340	118	202	438

В табл. 1 для некоторых значений параметров r_0 и d_0 и допустимых вероятностей ошибок распознавания α_0 и β_0 приведены оптимальные объемы обучающих m^* и контрольной n^* выборок, а также соответствующие им значения оптимального суммарного объема выборок $\rho^* = 2m^* + n^*$, являющиеся решениями задачи оптимизации (7) и полученные при помощи стандартных методов целочисленного программирования [8]. При этом полагалось $k=0$, т. е. решающее правило (1) — суть критерий максимального правдоподобия [2], и для простоты были введены дополнительные условия $m_1 = m_2 = m$, $\alpha_0 = \beta_0$. Из табл. 1 видно, что при $d_0 = 1,0$ и $d_0 = 0,5$ и всех приведенных значениях $1-\alpha_0$ функция $\rho^*(r_0)$ при некотором $r_0 = r^*$ имеет максимум, а при $d_0 = 0,25$; 0,1 значения ρ^* в табл. 1 с ростом r_0 монотонно убывают. Причина наблюдаемого эффекта состоит в том, что рост r_0 фактически означает увеличение дисперсий случайных величин, составляющих обучающие и контрольные выборки из класса S_2, что при постоянных m, n и d_0 ведет к увеличению ошибок распознавания α и β, причем в большей степени β. С другой стороны, чем больше r_0, тем сильнее отличие распределений N_1 и N_2 друг от друга и тем меньше, очевидно, должны быть вероятности α и β при неизменных m, n и d_0. Таким образом, характер изменения вероятностей α и β с ростом r_0 определяется противоположным влиянием этих двух тенденций. При значениях r_0, близких к 1, доминирует тенденция, обусловливающая рост α и β, что ведет к увеличению оптимального суммарного объема выборок ρ^*, требуемого для достижения заданного уровня достоверности $1-\alpha_0$. Так, увеличение r_0 с 1,1 до 1,5 при $1-\alpha_0 = 0,9$ и $d_0 = 0,5$ сопровождается ростом ρ^* с 89 до 94. Однако при дальнейшем увеличении r_0 до 1,8 ρ^* уменьшается до 88. Это объясняется тем, что с ростом r_0 усиливается влияние тенденции, ведущей к уменьшению вероятностей ошибок α и β, и, начиная с некоторого значения r^* (в рассмотренном примере $1,3 \leqslant r^* \leqslant 1,8$), ее влияние становится преобладающим. При этом величина r^* тем меньше, чем меньше d_0. Так, при $d_0 = 1,0$ $r^* \sim 1,8$, при $d_0 = 0,5$ $r^* \sim 1,5$, а при $d_0 \leqslant 0,25$ $r^* < 1,1$, чем и объясняется отсутствие в табл. 1 максимума функции $\rho^*(r)$ при $d_0 \leqslant 0,25$. Незначительный рост оптимальных объемов выборок m^* и n^* при значениях r_0, близких к 1, и существенное их убывание в широком диапазоне остальных значений r_0 и всех значений d_0 подтверждают возможность использования приведенной таблицы для выбора оптимальных объемов выборок m^* и n^*, требуемых для достижения заданной достоверности $1-\alpha_0$, ориентируясь на наихудший случай $d = d_0$, $r = r_0$.

Таблица 2

$1-\alpha_0$	r_0	$d_0=1{,}0$			$d_0=0{,}5$			$d_0=0{,}25$			$d_0=0{,}1$		
		m^*	n^*	ρ^*	m^*	n^*	ρ^*	m^*	n^*	ρ^*	m^*	n^*	ρ^*
0,9	1,1	10	13	33	19	27	65	37	54	128	88	132	308
	1,3	11	13	35	19	28	66	34	52	120	63	108	234
	1,5	11	14	36	18	27	63	28	45	101	41	80	162
	1,8	10	14	34	15	24	54	20	36	76	25	49	99
0,95	1,1	14	22	50	28	43	99	54	86	194	128	211	467
	1,3	15	23	53	28	45	101	51	82	184	93	172	358
	1,5	16	23	55	27	42	96	42	72	156	63	119	245
	1,8	15	23	53	22	37	81	31	55	117	41	78	160
0,99	1,1	25	44	94	49	88	186	96	175	367	231	419	881
	1,3	27	47	101	50	90	190	89	166	344	171	324	666
	1,5	28	47	103	48	85	181	74	142	290	115	224	454
	1,8	27	46	100	40	76	156	55	106	216	71	138	280

Полезно сравнивать приведенные результаты с аналогичными, полученными для задач с иной степенью априорной неопределенности в параметрах нормальных законов N_1 и N_2. Нетрудно показать, что решение задачи оптимизации системы распознавания двух одномерных нормальных совокупностей с неизвестными средними a_1 и a_2 и известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 может быть найдено по тем же формулам, если в них положить $r_0=\sigma_2^2/\sigma_1^2$, $\omega_i=m_i-1, P_{m_i-1}(\omega_i)=\delta(m_i-1)$, где $\delta(X)$ — обычная дельта-функция. Оптимальные для этой задачи с точки зрения критерия (7) объемы выборок m^* и n^* приведены в табл. 2.

Сравнение табл. 1 с табл. 2 показывает, что платой за отсутствие априорных знаний о дисперсиях σ_1^2 и σ_2^2 распределений N_1 и N_2 является значительное по сравнению со случаем известных σ_1^2 и σ_2^2 увеличение оптимальных объемов обучающих и контрольной выборок. При этом величина относительного приращения суммарного объема $\rho^*=2m^*+n^*$ выборок колеблется от 14% при $1-\alpha_0=0{,}99$, $r_0=1{,}1$, $d_0=0{,}1$ до 84% при $1-\alpha_0=0{,}9$, $r_0=1{,}8$, $d_0=0{,}1$, а для большинства приведенных в таблице значений $1-\alpha_0$, r_0, d_0 она лежит в пределах 30—60%. Таким образом, в отличие от случая равных дисперсий [9] при использовании критерия максимального правдоподобия $(k=0)$ для распознавания двух нормальных распределений N_1 и N_2 с неравными средними и дисперсиями одинаково существенное влияние на величины оптимальных объемов m^* и n^* обучающих и контрольной выборок оказывает отсутствие априорных сведений как о значениях средних a_1 и a_2, так и о величинах дисперсий σ_1^2 и σ_2^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники.— Т. 2.— М.: Сов. радио, 1975.
2. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники.— Т. 3.— М.: Сов. радио, 1976.
3. **Себер Дж.** Линейный регрессионный анализ.— М.: Мир, 1980.
4. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей.— М.: Наука, 1969.
5. **Imhof J. P.** Computing the distribution of quadratic forms in normal variables // Biometrika.— 1961.— V. 48, N 3.
6. **Фомин Я. А., Савич А. В.** Оптимизация временных параметров систем распознавания одномерных нормальных совокупностей // Радиотехника.— 1984.— Т. 39, № 11.
7. **Фомин Я. А., Савич А. В.** Оптимизация систем распознавания многомерных нормальных совокупностей // Радиотехника.— 1985.— Т. 40, № 12.
8. **Ху Т.** Целочисленное программирование и потоки в сетях.— М.: Мир, 1974.
9. **Фомин Я. А., Тарловский Г. Р.** Статистическая теория распознавания образов.— М.: Радио и связь, 1986.

Поступила в редакцию 26 сентября 1986 г.