φ	σ	$\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_2$	φ	σ	$\tilde{\beta}_1$	$\tilde{\beta}_2$

где $\beta_1=3$, $\beta_2=2$, $\alpha=1$, $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2)$, значения регрессоров x_{1i} и x_{2i} задавались с помощью выражений

$$x_{1i}=\sin(2\pi i/10);$$
$$x_{2i}=\sin(2\pi i/10+\pi/2\varphi), \quad i=1, \ldots, 10.$$

Для имитации поведения испытуемого в эксперименте с подбором параметра значение регрессора z определялось по формуле

$$z_i=(y-x_{1i}\beta_1-x_{2i}\beta_2-\varepsilon_i)/\alpha, \quad i=1, \ldots, 10,$$

при значениях $y=0{,}4$ и $y=0{,}8$. На основании полученных значений регрессоров вычислялась оценка $\tilde{\beta}$ вектора $|\beta_1, \beta_2|^T$ по формуле (9). Значения компонент вектора, найденные при различных комбинациях параметров σ и φ, приведены в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рао Р. С.** Линейные статистические методы и их применения.— М.: Наука, 1968.
2. **Себер Дж.** Линейный регрессионный анализ.— М.: Мир, 1980.
3. **Hocking R. R.** Developments in linear regression methodology: 1959—1982 // Technometrics.— 1983.— V. 25, N 3.— P. 219—230.

Поступила в редакцию 18 декабря 1984 г.

УДК 528.722.024

Л. Л. КОНЦЕВИЧ, М. Л. КОНЦЕВИЧ, А. Х. ШЕНЬ

(Москва)

ДВА АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФОРМЫ

Введение. В настоящей работе рассматриваются математические вопросы, возникающие при решении задачи интерпретации глубины по параллаксу движения и бинокулярному параллаксу.

Сформулируем общую задачу. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве S выделен конечный набор точек $A=\{a_i\}$. Этот набор (число точек в нем обозначим n) будем называть объектом. Допустим, что на S действуют m операторов проектирования p_j в двумерные евклидовы пространства F_j. В каждом F_j точке $a_i \in A$ соответствует точка $a_{ji}=p_j(a_i)$.

Допустим, что не известны ни $A \subset S$, ни p_j. Известны только a_{ji} и их соответствие (т. е. известно, какие точки являются различными проекциями одной). Известен также класс возможных отображений p_j. Требуется восстановить A.

Будут описаны решения следующих задач этого типа:

1) восстановление формы объекта по трем и более ортогональным проекциям;

2) восстановление формы объекта по двум центральным проекциям в том случае, когда для каждой проекции известны основание перпендикуляра из центра проектирования на плоскость проектирования и его длина.

Вопросы, связанные с выделением фигуры из фона и установлением соответствия точек на различных проекциях, в данной работе не рассматриваются.

Первая задача соответствует наблюдению вращающегося объекта, линейные размеры которого много меньше расстояния до него. При этом объект должен содержать не менее четырех точек общего положения. Получаемое решение определяется с точностью до изометрических преобразований (т. е. можно восстановить расстояние между любой парой точек). Почти так же решается задача восстановления глубины в том случае, когда проекции известны с точностью до подобия (это соответствует большим перемещениям по глубине удаленного небольшого объекта). В этом случае решение определяется с точностью до аффинного преобразования, сохраняющего углы (т. е. можно восстановить отношение расстояний между любыми двумя парами точек).

Вторая задача соответствует бинокулярному наблюдению объекта, линейные размеры которого соизмеримы с расстоянием до него. Для предлагаемого нами способа решения этой задачи необходимо, чтобы объект содержал не менее восьми точек (хотя, вообще говоря, для восстановления формы достаточно пяти точек общего положения). Решение этой задачи также определяется с точностью до аффинного преобразования, сохраняющего углы. Кроме того, если не известна ориентация проекций, возможно появление двух различных решений.

Для задач подобного класса неоднократно предлагались решения, основанные на традиционном аппарате проективной геометрии [1—3]. Однако такой подход обладает рядом недостатков:

1) алгоритмы получаются очень громоздкими;

2) точки объекта при вычислениях неравноправны — на последовательность обрабатываемых точек накладываются некоторые условия, невыполнение которых может привести к ошибочным результатам;

3) получающиеся алгоритмы принципиально не используют интегральную информацию обо всех точках; для увеличения точности алгоритмов приходится разбивать множество точек объекта на подмножества (возможно, пересекающиеся), в каждом подмножестве решать задачу восстановления глубины и потом усреднять полученные результаты.

Приятным исключением является работа [4], в которой решается вторая задача. Предлагаемый в этой работе алгоритм свободен от перечисленных недостатков и в некоторых пунктах совпадает с нашим. Однако в целом он представляется, скорее, удачной находкой, а не результатом приложения универсального подхода к частной задаче.

Предлагаемый нами метод позволяет при восстановлении объекта A использовать однородно информацию сразу о всех точках (их возможное число не ограничено сверху), что существенно повышает точность решения задачи восстановления метрики при неточной информации об a_{ji}. К важным достоинствам метода следует отнести и тот факт, что удается полностью линеаризовать задачи, т. е. свести их решение к стандартным операциям над векторами и матрицами. Дополнительная информация об объекте (существование плоскости симметрии объекта, информация об абсолютной или относительной ориентации проектирования, изображения на проекциях центров других проекций — так называемые «керновые точки» и т. д.) легко может быть использована при соответствующих модификациях предлагаемых схем вычислений.

При разработке конкретных алгоритмов мы стремились использовать рекуррентные процедуры, допускающие быстрое добавление новых точек и последующую коррекцию параметров аффинной (проективной) структуры объекта. Для второй задачи это требование выполнено полностью: программа восстанавливала проективную структуру объекта и метрику, используя память, объем которой не зависел от числа обработанных точек (координаты точек хранились в памяти, не относящейся к программе).

Построенные алгоритмы оказались весьма быстрыми. Так во второй, более сложной задаче, добавление новой точки и цикл перевычислений в рекуррентной схеме требовали около 400 операций с действительными числами.

При построении решений часть проблем не была решена:

1) в задаче 1 не удалось построить рекуррентную схему добавления новых точек и новых проекций;

2) в задаче 2 при переходе к большему числу проекций (более двух) или к меньшему числу точек (менее восьми) мы столкнулись с серьезными трудностями.

При изложении руководствовались тем, что не всем читателям, испытывающим потребность в использовании описанных алгоритмов, будут интересны математические обоснования. Поэтому для каждой задачи вслед за общими рассуждениями приводится явное описание возможного алгоритма.

Все алгоритмы были проверены на компьютере и показали хорошую устойчивость к ошибкам в локализации точек на проекциях при восстановлении аффинной (проективной) структуры объекта и высокую точность при восстановлении евклидовой структуры в том случае, когда эти ошибки достаточно малы. Оба алгоритма включают в себя промежуточные проверки, что делает их устойчивыми к ошибкам типа «сбой» при вводе координат точек проекций.

1. Восстановление глубины объекта по нескольким параллельным проекциям. 1.1. Восстановление объекта с точностью до аффинного преобразования. Рассмотрим отображение $p = p_1 \oplus \ldots \oplus p_m : S \to F_1 \oplus \ldots \oplus F_m$. При $m > 2$ в случае общего положения p является вложением и S можно отождествить как аффинное пространство с $p(S)$. Далее, употребляя S, будем иметь в виду $p(S)$.

Таким образом, задача сводится к проведению трехмерного аффинного подпространства через конечный набор точек $p(A)$. Для однозначного решения этой задачи необходимо, чтобы объект не был плоской фигурой.

1.2. Восстановление евклидовой структуры объекта. Вспомним, что S и F_j обладают евклидовой структурой. Перейдем от аффинных пространств к линейным, выбрав в качестве начала координат одну из точек набора и ее образы. Рассмотрим случай, когда p_j — ортогональные проекции. Эти условия на p_j равносильны тому, что сопряженные отображения $p_j^* : F_j^* \to S^*$ — изометрические вложения. Каждое p_j определяет три независимых линейных условия на квадратичную форму Q^*, задающую евклидову структуру в S^*, сопряженную к имеющемуся в S скалярному произведению. Матрица соответствующего скалярного произведения в S будет обратной к матрице формы Q^* в сопряженном базисе.

Нетрудно видеть, что для восстановления евклидовой структуры объекта необходимо по крайней мере три проекции (хотя евклидова структура S определяется шестью параметрами и две проекции дают шесть уравнений на эти параметры, ранг построенной системы линейных уравнений будет равен пяти).

В том случае, когда ортогональные проекции p_j заданы с точностью до подобия, можно аналогичным образом восстановить скалярное произведение с точностью до множителя. Единственное отличие будет состоять в том, что каждое p_j определяет два независимых линейных условия на квадратичную форму Q^*. В этом случае форма восстанавливается с точностью до гомотетии также по трем и более проекциям.

1.3. Алгоритм. 1. Для точек a_{ji} на проекциях F_j выписываем координаты (x_{ji}, y_{ji}) в матрицу M размером $2m \times n$:

$$M = \begin{pmatrix} x_{11} \ldots x_{1n} \\ y_{11} \ldots y_{1n} \\ \ldots \quad \ldots \\ x_{m1} \ldots x_{mn} \\ y_{m1} \ldots y_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Находим трехмерное аффинное подпространство, натянутое (приближенно) на векторы-столбцы этой матрицы. Например, это может быть сделано следующим образом. Из всех столбцов M вычитается первый (осуществляется линеаризация $p(S)$). С помощью стандартной процедуры производится сингулярное разложение $M = O_1 D O_2$, где O_1, O_2 — ортогональные матрицы, D — диагональная [5]. Пусть $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, здесь $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$. В том случае, когда $\lambda_3 \gg \lambda_4$ (т. е. матрица M близка к матрице ранга 3), будем считать систему проекций согласованной и положим $M := O_1 D' O_2$, где $D' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0, \ldots, 0)$, $\operatorname{rank}(M) = 3$. Обозначим через B матрицу размером $2m \times 3$, состоящую из трех первых столбцов O_1. Столбцы B образуют ортонормированный базис (в обычной метрике R^{2m}) в образе оператора M.

3. Разлагаем столбцы M по базису B. Тем самым объект вложен в координатное пространство R^3. Если базис B был выбран так, как указано выше, то трехмерный вектор, сопоставленный точке $a_i \in A$,— это первые три компоненты i-го столбца матрицы $D'O_2$. Теперь осталось только найти матрицу скалярного произведения в R^3.

4. Разобьем матрицу B на m блоков $\{B_j\}$ размером 2×3. Линейные уравнения на симметричную матрицу Q^* размером 3×3 получаем из соотношений $B_j Q^* B_j^T = \operatorname{diag}(1, 1)$ для ортогонального проектирования, и $B_j Q^* B_j^T$ равно матрице вида $\operatorname{diag}(\lambda, \lambda)$ для варианта с подобием. Полученная система $3m$ (соответственно $2m$) линейных уравнений решается любым подходящим методом.

5. $Q = (Q^*)^{-1}$. Диагонализируя Q, находим евклидову модель объекта.

2. Восстановление объекта по двум центральным проекциям. 2.1. Восстановление объекта с точностью до проективного преобразования. Пусть V — аффинное пространство. Сопоставим ему векторное пространство $\tilde{V}$, в котором V отождествляется с гиперплоскостью, не проходящей через ноль. Проективное пространство $P(\tilde{V})$ состоит из точек V и бесконечно удаленных точек. Отображение центральной проекции $p_j : S \to F_j$ можно с точностью до множителя поднять до линейного отображения $\tilde{p}_j : \tilde{S} \to \tilde{F}_j$. Заметим, что точкам a_i в пространстве S и a_{ji} на проекции F_j будут сопоставлены одномерные пространства $\tilde{a}_i$ и $\tilde{a}_{ji}$ в $\tilde{S}$ и $\tilde{F}_j$ соответственно. При этом $\tilde{p}_j : \tilde{a}_i \to \tilde{a}_{ji}$.

Рассмотрим отображение $\tilde{p} = \tilde{p}_1 \oplus \tilde{p}_2 : \tilde{S} \to \tilde{F}_1 \oplus \tilde{F}_2$. В случае несовпадения центров проектирования $\operatorname{Ker}(\tilde{p}) = \operatorname{Ker}(\tilde{p}_1) \cap \operatorname{Ker}(\tilde{p}_2) = \tilde{f}_1 \cap \tilde{f}_2 = 0$ (здесь $f_j \in S$ — центр j-й проекции). Следовательно, $\tilde{S}$ может быть отождествлено как линейное пространство с $\tilde{p}(\tilde{S})$. Поэтому восстановление проективной структуры объекта сводится к нахождению в шестимерном пространстве $\tilde{F}_1 \oplus \tilde{F}_2$ такого четырехмерного подпространства $\tilde{S}$, что $\dim(\tilde{S} \cap (\tilde{a}_{1i} \oplus \tilde{a}_{2i})) \geqslant 1$ для произвольного i. Это условие равносильно существованию точки a_i, проектирующейся в a_{1i} и a_{2i}. Ниже будет показано, что указанные ограничения на $\tilde{S}$ при достаточном количестве точек в A определяют однопараметрическое семейство возможных решений, эквивалентных с точки зрения проективной структуры. В конкретных вычислениях достаточно построить лишь одно из решений.

Так как коразмерность $\tilde{S}$ равна двум, ему отвечает 2-форма $\omega \in \Lambda^2((\tilde{F}_1 \oplus \tilde{F}_2)^*)$, определенная с точностью до скалярного множителя. Обозначим через T компоненту ω в слагаемом $\tilde{F}_1^* \oplus \tilde{F}_2^*$ при разложении в прямую сумму $\Lambda^2((\tilde{F}_1 \oplus \tilde{F}_2)^*) = \Lambda^2(\tilde{F}_1^*) \oplus (\tilde{F}_1^* \otimes \tilde{F}_2^*) \oplus \Lambda^2(\tilde{F}_2^*)$. Можно показать, что тензор T определяет пространство S с точностью до действия независимых гомотетий в $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$. Ограничения на S можно переписать в следующем виде:

$$\langle T, a_{1i} \wedge a_{2i} \rangle = \langle \omega, a_{1i} \wedge a_{2i} \rangle = 0.$$

Запишем условия на T в явном виде. Подпространство определяется двумя линейными уравнениями:

$$(\alpha_1^T, \alpha_2^T)(v_1, v_2)^T = 0;$$

$$(\beta_1^T, \beta_2^T)(v_1, v_2)^T = 0.$$

Здесь $v_j \in \widetilde{F}_j$; $\alpha_j^T, \beta_j^T \in \widetilde{F}_j^*$. В матричной записи $T = \beta_2\alpha_1^T - \alpha_2\beta_1^T$. Условия на подпространство $\widetilde{S}$ означают, что

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_1^T a_{1i} & \alpha_2^T a_{2i}\\ \beta_1^T a_{1i} & \beta_2^T a_{2i}\end{pmatrix} = 0 = (\beta_2^T a_{2i})(\alpha_1^T a_{1i}) - (\alpha_2^T a_{2i})(\beta_1^T a_{1i}) = \mathrm{tr}\left((a_{2i}^T\beta_2\alpha_1^T a_{1i}) -\right.$$
$$\left. - (a_{2i}^T\alpha_2\beta_1^T a_{1i})\right) = \mathrm{tr}\left((\beta_2\alpha_1^T - \alpha_2\beta_1^T)(a_{1i}a_{2i}^T)\right) = \mathrm{tr}\left(T(a_{1i}a_{2i}^T)\right).$$

Таким образом, получены линейные уравнения, определяющие тензор T. Так как $\mathrm{rank}(T) = 2$, T можно представить в виде разности двух матриц ранга 1: $T = T_1 - T_2$. Разлагая T_1 и T_2 в произведение столбца и строки, получаем коэффициенты уравнений, задающих одно из возможных подпространств S (выше было отмечено, что решение задачи неоднозначно).

2.2. Восстановление евклидовой структуры объекта. Введем невырожденное скалярное произведение в $\widetilde{F}_j$ следующим образом. Так как F_j определяется оптической системой с известным фокусным расстоянием, $\widetilde{F}_j$ можно канонически отождествить с трехмерным физическим пространством, в котором единицей длины естественно считать фокусное расстояние.

Покажем, что евклидова структура (с точностью до скалярного множителя) в S определяет квадратичную форму Q^* сигнатуры $(+++0)$ в $\widetilde{S}^*$ (с точностью до множителя) и наоборот. Действительно, в $\widetilde{S}$ есть линейное подпространство L, параллельное S и, следовательно, обладающее невырожденной квадратичной формой. Значит, определено скалярное произведение в $L^* = \widetilde{S}^*/\mathrm{Ann}(L)$ и тем самым и в $\widetilde{S}^*$. Обратно квадратичная форма Q^* указанной сигнатуры обладает одномерным ядром, аннулятор которого есть гиперплоскость L в $\widetilde{S}$. Имеющаяся на L метрика может быть перенесена на любую гиперплоскость, параллельную L, и, следовательно, с точностью до множителя на область $P(\widetilde{S})\setminus P(L)$ проективного пространства.

Как и в предыдущей задаче, $\widetilde{p}_j^* : \widetilde{F}_j^* \to \widetilde{S}^*$ являются изометрическими вложениями с точностью до множителя.

Пространство $M = \widetilde{p}_1^*(\widetilde{F}_1^*) \cap \widetilde{p}_2^*(\widetilde{F}_2^*)$ двумерно, и две квадратичные формы на нем, возникающие из евклидовых структур в $\widetilde{F}_1^*$ и $\widetilde{F}_2^*$, должны быть пропорциональны. Умножим одну из квадратичных форм в $\widetilde{F}_j^*$ на соответствующий коэффициент так, чтобы их ограничения на M совпадали. Выберем в M ортонормированный базис e_1^* и e_2^*. Дополним его векторами e_3^* и e_4^* (соответственно из $\widetilde{p}_1^*(\widetilde{F}_1^*)$ и $\widetilde{p}_2^*(\widetilde{F}_2^*)$) до ортонормированных базисов в этих подпространствах. В базисе $e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*$ матрица Грама

$$Q^* = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\lambda\\0&0&\lambda&1\end{pmatrix},$$

где λ — неизвестное число. Из условия $\det(Q^*) = 0$ получаем $\lambda = \pm 1$. Выбирая одно из этих значений λ, найдем два решения задачи.

Точке из $p(S)$ с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4) в базисе e_k сопоставим точку пространства R^3 с координатами $x_1/(x_3 - \lambda x_4)$, $x_2/(x_3 - \lambda x_4)$, $(x_3 + \lambda x_4)/(x_3 - \lambda x_4)$. Построенное отображение $p(S)$ в R^3 является изометрией.

2.3. Алгоритм. 1. На проекции F_j введем ортогональную систему координат. За начало отсчета примем ближайшую к центру проектирования точку на плоскости проектирования. Единицу длины в системе координат, связанную с j-й проекцией, выберем равной соответствующему фокусному расстоянию. Обозначим координаты точек a_j в построенной системе координат x_{ji}, y_{ji}.

2. Находим матрицу T из системы линейных уравнений вида

$$\mathrm{tr}\left(T\begin{pmatrix} x_{1i}\ x_{2i} & x_{1i}\ y_{2i} & x_{1i} \\ y_{1i}\ x_{2i} & y_{1i}\ y_{2i} & y_{1i} \\ x_{2i} & y_{2i} & 1 \end{pmatrix}\right)=0.$$

Это однородная система уравнений с девятью неизвестными. Ненулевое решение с точностью до линейного множителя определяется восьмью точками.

Для решения переопределенной системы линейных уравнений удобно использовать рекуррентный метод, основанный на алгоритме псевдообращения Гревилля [6].

Указанный алгоритм псевдообращения позволяет восстанавливать T с точностью $\sim n^{-1/2}$ (n — число точек объекта) при фиксированной погрешности координат точек на проекциях. Матрица T определяется взаимным расположением центров и плоскостей проектирования и с точностью до подобия определяет его. T может быть найдена с существенно большей точностью, чем форма самого объекта. Возможно, эта задача представляет самостоятельный интерес, но она выходит за рамки данной работы.

Если у полученной матрицы T детерминант равен нулю (конечно, с заданной точностью), вычисления могут быть продолжены. В противном случае проекции несовместны.

3. Разложим T в разность матриц T_1 и T_2 ранга 1 произвольным образом. Например, можно воспользоваться стандартной процедурой сингулярного разложения. Матрицы T_1 и T_2 ранга 1 представляем в виде произведений столбца на строку (любым способом): $T=T_1-T_2=\beta_2\alpha_1^T-\alpha_2\beta_1^T$.

Итак, получены столбцы коэффициентов α_1, α_2, β_1, β_2. Так как использовалось сингулярное разложение, $(\alpha_1,\ \beta_1)=(\alpha_2,\ \beta_2)=0$ и $(\alpha_1,\ \alpha_1)=(\beta_1,\ \beta_1)=1$. Условие совместимости квадратичных форм означает, что $(\alpha_2,\ \alpha_2)=(\beta_2,\ \beta_2)=c$. Это условие должно быть проверено: задача в случае его невыполнения не имеет решения.

4. Базис в пространстве $\tilde{S}^*$, рассматриваемом как фактор-пространство $R^6\Big/\left(*\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}+*\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}\right)$, будет следующим:

$$\overset{*}{e}_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ 0\end{pmatrix},\quad \overset{*}{e}_2=\begin{pmatrix}\beta_1\\ 0\end{pmatrix},\quad \overset{*}{e}_3=\begin{pmatrix}\alpha_1\times\beta_1\\ 0\end{pmatrix},\quad \overset{*}{e}_4=\begin{pmatrix}0\\ \alpha_2\times\beta_2\end{pmatrix}\Big/c^2.$$

5. Для каждой точки a_i строим ее представитель $v_i\in\tilde{S}\subset R^6$: $v_i=c_1(x_{1i},\ y_{1i},\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)^T+c_2(0,\ 0,\ 0,\ x_{2i},\ y_{2i},\ 1)^T$. Коэффициенты c_1 и c_2 выбираем так, чтобы $(\alpha_1^T,\ \alpha_2^T)v_i=0$. Например, $c_1=\alpha_2^T(x_{2i},\ y_{2i},\ 1)^T$, $c_2=-\alpha_1^T(x_{1i},\ y_{1i},\ 1)^T$.

6. Для каждой точки a_i вычислим четыре координаты $x_k(a_i)=\overset{*}{e}_k v_i$. По указанной выше формуле, выбрав $\lambda=+1$ или $\lambda=-1$, получаем две евклидовы модели объекта.

Авторы выражают благодарность М. Н. Вайнцвайгу, П. П. Николаеву и А. М. Бонч-Осмоловскому, советы которых в немалой степени содействовали появлению этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ульман Ш.** Принципы восприятия подвижных объектов.— М.: Радио и связь, 1983.
2. **Смирнов С. А.** Стереоперспектива в фотограмметрии.— М.: Недра, 1982.
3. **Лобанов А. Н.** Фотограмметрия.— М.: Недра, 1984.
4. **Longuet-Higgins H. C.** A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections // Nature.— 1981.— V. 293.— P. 133.
5. **Гельфанд И. М.** Лекции по линейной алгебре.— М.: Наука, 1966.
6. **Кохонен Т.** Ассоциативная память.— М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 7 апреля 1986 г.