вый уровень не подвергается травлению.

При изготовлении ДОЭ с помощью дихотомического комплекта между величинами φ_n выполняется соотношение $\varphi_{n+N/2}=\varphi_n+\Delta_1$, где Δ_1 — фазовая ошибка первого травления (с использованием наиболее низкочастотного ФШ), которое следует из того, что $(n+N/2)$-й уровень профиля ДОЭ формируется той же последовательностью травлений, что и n-й, плюс первое травление (см. рис. 3 из [1]). Аналогично можно записать $\varphi_{n+N/4}=\varphi_n+\Delta_2$ и т. д., что позволяет привести (8) к виду

$$I_1'=I_1\prod_{l=1}^{L}\cos\left(\frac{\Delta_l}{2}\right). \tag{9}$$

Фазовая ошибка l-го травления в дихотомическом случае равна $\Delta_l=2\pi\delta h_l/2^l$, где δh_l — относительная ошибка глубины травления. Поскольку δh_l слабо зависит от абсолютной глубины травления, т. е. от номера l, то ясно, что наибольшее влияние на отношение I_1'/I_1 оказывает первое, наиболее глубокое травление. Выражение (9) означает также, что каждое последующее травление способно только ухудшить отношение I_1'/I_1, хотя эффективность I_1' при этом, конечно, увеличивается.

При использовании одночастотного комплекта в отличие от дихотомического можно в принципе решать задачу максимизации эффективности ДОЭ при последнем травлении, зная ошибки предыдущих, однако вряд ли это имеет смысл. Если возможно точно выдержать оптимальную глубину последнего травления, то можно выдержать и глубины предыдущих, в результате чего необходимость оптимизации отпадет.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Спектор Б. И.** Об одном методе синтеза фазовой структуры киноформов // Автометрия.— 1985.— № 6.
2. **Пальчикова И. Г., Рябчун А. Г.** О влиянии погрешностей изготовления киноформов на функцию зрачка // Там же.

Поступила в редакцию 22 июля 1986 г.

УДК 519.237 : 535.31

А. А. ЯКОВЛЕВ

(Ленинград)

СТАТИСТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рассматривается задача статистической классификации изображений на основе расчета квадратичной меры b_j удаления распознаваемого изображения от центра рассеивания изображений для объектов j-го класса. Обычно это удаление (расстояние) измеряется в метрике, определяемой эллипсоидом рассеяния для возможных реализаций изображений j-го класса объектов:

$$b_j = (x_t - m_j)^{\#} C_j^{-1} (x_t - m_j), \tag{1}$$

где m_j — математическое ожидание для изображений объектов j-го класса; C_j — ковариационная матрица для реализаций изображений j-го класса объектов; x_t — фиксированная реализация (изображение), удаление которой от m_j отыскивается; $\#$ — знак транспонирования. Принадлежность тестируемого изображения изображениям объектов класса j определяется по величине b_j.

Как правило, точные значения m_j и C_j априори неизвестны, и вместо них используются выборочные оценки среднего и ковариаций $\bar{x}_j$ и D_j. Характеристики рассеивания выборки искажаются вследствие неизбежного присутствия случайных ошибок измерения компонент реализации. К тому же при большой размерности реализаций, характерной для изображений, матрица рассеивания для конечной выборки оказывается вырожденной или почти вырожденной. Это обстоятельство принципиально ограничивает возможность непосредственного применения ряда статистических методов распознавания образов прямо к изображениям без использования, например, предварительного сжатия информации [1]. Обращение выборочных ковариационных матриц при большой размерности реализаций и конечных объемах выборок дает неустойчивые оценки дискриминантных статистик (дисперсия оценок стремится к бесконечности).

Устойчивость дискриминантных статистик можно повысить, используя принцип ранжировки получаемой из обучающей выборки информации в соответствии с реальной информативностью измерений [2]. При этом удается понизить случайные ошибки оценки границ дискриминации классов объектов и достичь компромисса между уровнем случайного и систематического смещения границ.

Пусть D_j — выборочная ковариационная матрица для изображений j-го класса объектов; $\bar{x}_j$ — средняя реализация в обучающей выборке изображений j-го класса; x_t — заданная реализация, подлежащая классификации.

Под реализациями можно понимать как непосредственные результаты фотометрических измерений изображений объектов, так и результаты определенных функциональных преобразований изображений.

Будем полагать, что случайные ошибки измерений имеют математические ожидания, равные нулю, и известные априори ковариационные матрицы Σ_j при измерениях компонент изображений, принадлежащих объектам j-го класса.

Матрицы D и Σ могут быть представлены через матрицы их собственных векторов V и T и соответствующих собственных чисел Γ и M в виде

$$D = V\Gamma V^{*};\ \ \Sigma = T\mathrm{M}T^{*}. \tag{2}$$

Эффективная информативность измеренного рассеивания реализаций в выборке j определяется соотношением между размерами области рассеивания выборочных данных и уровнем ошибок измерений [3, 4] и характеризуется матрицей информативности измерений [2]

$$S_j = \mathrm{M}^{-1/2} T^{*} D_j T \mathrm{M}^{-1/2}. \tag{3}$$

Структура информативности независимо оцениваемых компонент рассеивания реализаций обучающей выборки описывается собственными векторами U и собственными числами Λ матрицы $S (S = U\Lambda U^{*})$. Достоверные оценки выборочного рассеивания, очевидно, получаются только в направлении векторов, соответствующих собственным числам λ, величина которых много больше единицы.

При произвольных λ достоверность оценки рассеивания описывается функцией ранжировки компонент информации $R(\lambda)$, которая в рассматриваемой задаче определяется простым выражением [4]

$$R(\lambda)=\lambda/(1+\lambda). \tag{4}$$

Оценка $\widehat{D}_j^{-1}$ обратной матрицы выборочного рассеивания, полученная с использованием ранжировки результатов эксперимента по их информативности, рассчитывается следующим образом:

$$\widehat{D}_j^{-1}=T_j\mathrm{M}_j^{-1/2}\left(U_j\Lambda_j^{-1}R(\Lambda_j)U_j^{\#}\right)\mathrm{M}_j^{-1/2}T_j^{\#}. \tag{5}$$

Так как $R(\Lambda)=\Lambda(I+\Lambda)^{-1}$ (где I — диагональная единичная матрица), то оценка (5) может быть представлена в виде

$$\widehat{D}_j^{-1}=T_j\mathrm{M}_j^{-1/2}U_j(I+\Lambda_j)^{-1}U_j^{\#}\mathrm{M}_j^{-1/2}T_j^{\#}. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что оценка $\widehat{b}_j$ расстояния до центра рассеивания выборки будет определяться

$$\widehat{b}_j=(x_t-\bar{x}_j)^{\#}T_j\mathrm{M}_j^{-1/2}U_j(I+\Lambda_j)^{-1}U_j^{\#}\mathrm{M}_j^{-1/2}T_j^{\#}(x_t-\bar{x}_j). \tag{7}$$

Представление оценки (7) в форме $\widehat{b}_j=y_{tj}^{\#}(S_j+I)^{-1}y_{tj}$, где $y_{tj}=\mathrm{M}_j^{-1/2}T_j^{\#}(x_t-\bar{x}_j)$, позволяет дать ей интересную физическую интерпретацию. Вектор относительных отклонений y_{tj} представляет собой отклонение классифицируемой реализации x_t от среднего $\bar{x}_j$ в координатах собственных векторов T_j ковариационной матрицы Σ_j ошибок измерений, нормированное на размеры осей эллипсоида рассеяния ошибок измерений (т. е. взвешенное с учетом погрешностей измерений). Матрица же информативности измерений S_j описывает рассеивание реализаций в обучающей выборке реализаций j-го класса, представленное также в метрике, определяемой матрицей ковариаций ошибок измерений Σ_j (см. формулу (3)). Матрица $(S_j+I)^{-1}$ обратная для S_j с учетом ранжировки измерительной информации по информативности.

Таким образом, оценка (7) представляет собой (с учетом поправки на ранжировку информации) квадратичную меру отклонения классифицируемого изображения от среднего для j-го класса, если представлять и отклонения $(x_t-\bar{x}_j)$, и выборочную дисперсию D_j в метрике, определяемой дисперсией ошибок измерений Σ_j.

Нетрудно видеть, что при невырожденной матрице выборочного рассеивания D_j и бесконечно малых ошибках измерений оценка (7) переходит в обычную (неранжированную) статистическую оценку

$$\widetilde{b}_j=(x_t-\bar{x}_j)^{\#}D_j^{-1}(x_t-\bar{x}_j).$$

Интересно отметить определенные аналогии предложенного алгоритма расчета устойчивых статистик дискриминации изображений с некоторыми алгоритмами, использовавшимися в других работах.

При одинаковом уровне и независимости между собой ошибок измерений всех компонент реализации изображений для обучающей выборки (при $\Sigma_j=\sigma_j^2I$) ранжированная оценка (7) имеет простой вид

$$\widehat{b}_j\Big|_{\Sigma_j=\sigma_j^2I}=(x_t-\bar{x}_j)^{\#}\left(D_j+\sigma_j^2I\right)^{-1}(x_t-\bar{x}_j), \tag{8}$$

где σ_j^2 — дисперсия ошибок измерения каждой компоненты реализации в выборке j.

Из формулы (8) видно, что для обучающей выборки оценка $\widehat{b}_j$ является смещенной, причем смещение пренебрежимо мало в направлениях главных осей эллипсоида выборочного рассеивания (т. е. в направлениях собственных векторов матрицы D, которым соответствуют собственные числа $\gamma\gg\sigma^2$) и велико в направлениях, в которых рассеивание реализаций выборки мало по сравнению с дисперсией ошибок измерений.

Дискриминантная статистика вида (8) использовалась в методе гребневых оценок [5], но в отличие от нашего рассмотрения при гребневой оценке не определен однозначно коэффициент k при единичной матрице

I и его выбор производится эмпирически. Формулой же (8) однозначно задается связь k с ошибками измерений: $k = \sigma_j^2$.

Можно показать также, что при некоррелированных ошибках измерений и специальном выборе функции ранжировки в виде [4]

$$R(\lambda) = \begin{cases} 1 \text{ при } \lambda \geqslant c_0; \\ 0 \text{ при } \lambda < c_0 \end{cases}$$

описанный алгоритм сводится как частный случай к алгоритму сжатия информации и дискриминации изображений в подпространстве первых собственных векторов выборочной ковариационной матрицы [6, 7]. Призов в форме (7) при произвольной корреляционной структуре как сигналов, так и шумов. Причем в частных случаях данный алгоритм приводит к результатам, эффективность которых подтверждена при решении ряда различных задач опознавания объектов [5—7].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фукунага К.** Введение в статистическую теорию распознавания образов.— М.: Наука, 1979.
2. **Яковлев А. А.** О критериях оптимальности эксперимента при дистанционном зондировании // Исслед. Земли и космоса.— 1983.— № 5.
3. **Ozeki K.** A coordinate — free theory of eigenvalue analysis related to the method of principal components and the Karhunen — Loeve expansion // Information and Control.— 1979.— V. 42, N 1.— P. 38—59.
4. **Яковлев А. А.** Апостериорное сглаживание спектрофотометрических реализаций // Опт.-мех. пром-сть.— 1985.— № 3.
5. **Di Pillo P. J.** Biased discriminant analysis: evaluation of the optimum probability of misclassification // Comm. in Statist., P. A. Theory and Methods.— 1979.— V. A8, N 14.— P. 1447—1457.
6. **Ватанабе С., Ламберт П. Ф., Куликовский С. А. и др.** Оценка и отбор параметров в задачах распознавания образов // Автоматический анализ сложных изображений/Под ред. Э. М. Бравермана.— М.: Мир, 1969.
7. **Duvernoy J.** Handwriting synthesis and classification by means of space — variant transform and Karhunen — Loeve analysis // J. Opt. Soc. Amer.— 1975.— V. 65, N 11.— P. 1331—1336.

Поступила в редакцию 26 июня 1985 г.