

В общем случае аналитическое решение задачи (38) неизвестно, поэтому условие (38) предлагается заменить следующим:

$$\min_{R_L(x)} \max_{x \in [-h, h]} |R_L(x) - 1| \leq \tilde{\varepsilon}_L,$$

здесь $h = \max\{-h_1, h_2\}$.

Для четных степеней L полином $R_L(x)$ определяется с помощью полинома $\tilde{R}_M(x)$ степени $M = L/2$, являющегося решением задачи типа (34):

$$\min_{\tilde{R}_M(x)} \max_{x \in [v\delta, v\bar{h}]} |\tilde{R}_M(x) - 1| \leq \tilde{\varepsilon}_L; \quad R_L(x) = \tilde{R}_M(x^2).$$

Пусть $K(\xi)$ имеет два нуля на интервале $[0, 2\pi]$. Качественный вид частотных характеристик результирующих фильтров, получаемых при восстановлении сигнала, изображен на рисунке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зюзин М. В. Алгоритм построения полосовых фильтров высокого качества // Вариационные методы в задачах численного анализа.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1986.
2. Применение цифровой обработки сигналов/Под ред. А. Опенгейма.— М.: Мир, 1980.
3. Джон Ф. Клаербуот. Теоретические основы обработки геофизической информации.— М.: Недра, 1981.
4. Суэтин П. К. Классические ортогональные многочлены.— М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 7 мая 1986 г.

УДК 618.61 : 621.3

В. П. ИЛЬИН, С. А. САНДЕР

(Новосибирск)

«ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ» МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение. В работе [1] был предложен метод импедансного аналога электромагнитного пространства (ИАЭП), эффективно использованный в дальнейшем для решения ряда электротехнических задач*.

Метод ИАЭП включает несколько этапов. Прежде всего, область, где рассматриваются уравнения Максвелла, разбивается на некоторую совокупность достаточно малых (элементарных) объемов. Затем для каждого элементарного объема на основе приближенного решения уравнений Максвелла определяется эквивалентная схема, содержащая емкости, индуктивности и сопротивления. Далее из схем элементарных объемов составляется полная эквивалентная схема устройства, которая названа импедансным аналогом электромагнитного пространства [1].

Согласно этому алгоритму, решение задачи сводится к анализу цепей импедансов. Необходимо отметить, что такой анализ выполняется не на основе уравнений, описывающих процессы в цепи, так как это соответствовало бы возврату к уравнениям Максвелла, рассматриваемым,

*См., например, работы, выполненные Б. В. Сестроречским (лично или с соавторами) и опубликованные в журнале «Вопросы радиоэлектроники. Сер. Общетеchnическая» за период с 1976 г. по настоящее время.

быть может, уже не в исходной, а в некоторой приближенной форме. Алгоритм работы [1] основан на построении сравнительно простой цепи, имеющей характеристики, эквивалентные искомым характеристикам сети импедансов. Построение такой цепи выполняется с помощью хорошо известных в электротехнике преобразований.

Широко известный сеточный подход к решению краевых задач (конечные разности, конечные элементы) в некоторой степени близок к методу ИАЭП. Например, в случае конечно-элементных аппроксимаций вся расчетная область разбивается на некоторые элементарные подобласти — конечные элементы, причем на каждом элементе решение однозначно определяется в простой форме по значениям в узлах на границах элементов. Аналогия с методом ИАЭП заключается в том, что узлы конечных элементов играют роль клемм, а сами конечные элементы — роль элементарных электротехнических устройств.

Цель данной работы — детальная разработка этой аналогии и построение алгоритма решения сеточных уравнений, являющегося алгебраической интерпретацией метода ИАЭП. Проводится вывод формул элементарных преобразований, дается общая схема алгоритма и анализируются некоторые его вычислительные свойства.

1. Описание системы сеточных уравнений. Дадим описание системы линейных алгебраических уравнений, для решения которой предназначен излагаемый алгоритм. Эта система порождается конечно-разностной или конечно-элементной пятиточечной аппроксимацией двумерных эллиптических краевых задач. Не будем останавливаться на выводе сеточных уравнений и их свойствах, многократно описанных в литературе (см., например, [2, 3] и приведенную там обширную библиографию). Отметим только, что такие уравнения возникают при решении разных типов краевых задач с использованием различных видов сеток и способов аппроксимации. Для краткости изложения остановимся на случае прямоугольных сеток.

Пусть Ω — ограниченная связная область на плоскости переменных x, y . Построим прямоугольную сетку H так, чтобы она покрывала Ω , и через l_{ix}, l_{iy} обозначим вертикальные и горизонтальные образующие этой сетки:

$$l_{ix}: x = x_i, i = 0, 1, \dots, n_x + 1; l_{iy}: y = y_j, j = 0, 1, \dots, n_y + 1.$$

Числа $x_i, i = 0, 1, \dots, n_x + 1$, и $y_j, j = 0, 1, \dots, n_y + 1$, будем считать упорядоченными по возрастанию.

Кроме введенной нумерации линий сетки удобно будет использовать и некоторую нумерацию узлов, появивших в область Ω или на ее границе. Число таких узлов положим равным K . Конкретный способ задания r — номера какого-то фиксированного узла — не будет здесь уточняться; предположим только, что первыми занумерованы узлы из Ω и их число равно M , а в остальном ограничимся требованием, что r является однозначной функцией номеров линий сетки H , на пересечении которых лежит рассматриваемый узел: $r = r(i, j)$. Предположим также, что могут быть определены обратные зависимости — функции $I(r), J(r)$, которые по номеру узла позволяют найти номера пересекающихся в нем линий $l_{I(r)x}, l_{J(r)y}$. В соответствии с изложенным для узла с номером N будем использовать обозначения P_N или P_{ij} , если $i = I(N), j = J(N)$.

Для каждого r -го узла из Ω рассматривается сеточное уравнение вида

$$-a_{rr}u_r + \sum_{s \in \omega_r} a_{rs}u_s = f_r, \quad r = 1, 2, \dots, M. \quad (1)$$

Здесь ω_r означает совокупность узлов, соседних к r -му, т. е. участвующих в r -м уравнении. Эта совокупность определяется равенством

$$|I(r) - I(s)| + |J(r) - J(s)| = 1, \quad (2)$$

из которого следует, что матрица A системы (1) пятидиагональная.

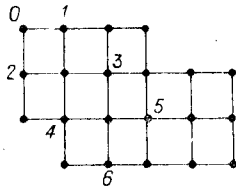


Рис. 1

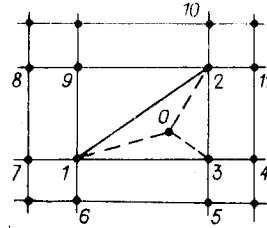


Рис. 2

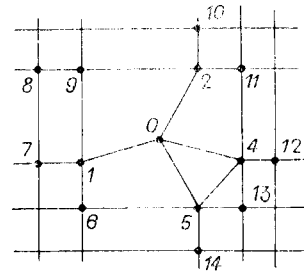


Рис. 3

В уравнении (1) предполагается, что если s -й узел внешний, то $a_{rs} = 0$, а остальные коэффициенты и правая часть определяются с учетом краевых условий исходной задачи.

Относительно системы (1) считаем также, что она симметрична, т. е. $a_{rs} = a_{sr}$, и является системой положительного типа [3], что означает выполнение условий

$$a_{rr} - \sum_{s \in \omega_r} a_{rs} \geq 0, \quad a_{rr} > 0, \quad a_{rs} \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, M, \quad (3)$$

причем в первом соотношении хотя бы для одного r неравенство строгое. Из этого следует невырожденность системы сеточных уравнений.

2. **Элементарные преобразования сеточных уравнений.** Свойство (2) позволяет сопоставить с системой сеточных уравнений схему на рис. 1. Здесь точками выделены узлы сетки H , лежащие в области Ω , а отрезками соединены пары узлов, которым отвечают искомые значения, одновременно входящие в какое-нибудь из сеточных уравнений. Свойства положительности и симметричности коэффициентов системы позволяют интерпретировать приведенную схему как изображение сети импедансов с изотропными связями. При этом узлы на рис. 1 могут рассматриваться как обозначения клемм, а отрезки — как обозначения емкостей, индуктивностей или сопротивлений.

Решение задач по методу ИАЭП сводится к выполнению преобразований «звезда — треугольник» и «треугольник — звезда». Смысл использования этих преобразований заключается в том, чтобы последовательно исключать из рассмотрения некоторые клеммы, сохраняя одновременно сравнительно простую структуру цепи. Опишем процесс перестройки схемы, в результате которого исключается одна из клемм. Сначала исключается из цепи клемма «0» с введением дополнительной «диагональной» связи между клеммами «1» и «2», причем таким образом, чтобы величины токов в остальных звеньях цепи оставались неизменными. На втором этапе исключается связь «1—2» с появлением в эквивалентной цепи новой диагональной связи «3—4». Затем аналогично диагональные связи «перегоняются» вниз вправо до их полного исчезновения при достижении границы.

Построим теперь алгебраический метод решения сеточных уравнений (1), аналогичный описанному алгоритму преобразования цепей. Под аналогичным методом подразумевается такой, который, во-первых, при той же последовательности исключения неизвестных приводил бы к матрицам, где расположение ненулевых элементов определяется схемой связей клемм в методе ИАЭП, и, во-вторых, сохранял бы симметричность системы (изотропность связей).

Прежде всего рассмотрим элементарные преобразования, которые в методе ИАЭП способствуют перемещению диагональной связи. Они выполняются в два этапа. На первом этапе схема рис. 2 преобразуется за счет перехода треугольника «1—2—3» в звезду «0—1—2—3». Штриховой линией на рис. 2 обозначены связи, которые предполагается ввести вместо исключаемых связей «1—2», «1—3» и «2—3». На втором

этапе полученная схема преобразуется к виду, изображенному на рис. 3. Это преобразование выполняется за счет перехода звезды «3-0-4-5» в треугольник «0-4-5». Отметим, что схема на рис. 3 может быть представлена и в принятой выше форме, когда всем клеммам соответствуют точки, расположенные в узлах прямоугольной сетки. При этом всем связям будут соответствовать отрезки на линиях сетки, а связи узлов «4» и «5» — диагональ прямоугольной ячейки «0, 5, 13, 4».

В соответствии с такой перестройкой к каноническому виду узлу, который на схеме 2 был введен под номером нуль, в дальнейшем будем приписывать третий номер, но при этом запомним, что соответствующее значение искомой функции не равно значению в третьем узле схемы 2.

Рассмотрим теперь соответствующие алгебраические преобразования сеточных уравнений. Пусть узлы сетки H занумерованы так, как показано на рис. 2. Выделим из системы (1) уравнения для первого, второго и третьего узлов:

$$-a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{16}u_6 + a_{17}u_7 + a_{19}u_9 = f_1; \quad (4)$$

$$a_{21}u_1 - a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + a_{29}u_9 + a_{210}u_{10} + a_{211}u_{11} = f_2; \quad (5)$$

$$a_{31}u_1 + a_{32}u_2 - a_{33}u_3 + a_{34}u_4 + a_{35}u_5 = f_3. \quad (6)$$

В дальнейшем преобразования коснутся только первых трех слагаемых в каждом из них, поэтому перенесем произведения, куда входят u_n , $n > 3$, в правые части и перепишем соотношения (4)–(6) в форме

$$-a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 = b_1; \quad (7)$$

$$a_{21}u_1 - a_{22}u_2 + a_{23}u_3 = b_2; \quad (8)$$

$$a_{31}u_1 + a_{32}u_2 - a_{33}u_3 = b_3; \quad (9)$$

Как показано на рис. 2, переход «треугольник — звезда» требует введения новой переменной u_0 такой, что уравнения (7)–(9) можно записать в виде равенств

$$a_{10}^{(1)}u_0 - a_{11}^{(1)}u_1 = b_1; \quad (10)$$

$$a_{20}^{(1)}u_0 - a_{22}^{(1)}u_2 = b_2; \quad (11)$$

$$a_{30}^{(1)}u_0 - a_{33}^{(1)}u_3 = b_3. \quad (12)$$

Чтобы найти значения коэффициентов в этих соотношениях, приравняем левые части уравнений (7) и (10), (8) и (11), (9) и (12). Тогда получим

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 = a_{10}^{(1)}u_0; \quad (13)$$

$$a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 = a_{20}^{(1)}u_0; \quad (14)$$

$$a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 = a_{30}^{(1)}u_0, \quad (15)$$

если через a_i , $i = 1, 2, 3$, обозначить разности коэффициентов при u_i , $i = 1, 2, 3$:

$$a_1 = a_{11}^{(1)} - a_{11}, \quad a_2 = a_{22}^{(1)} - a_{22}, \quad a_3 = a_{33}^{(1)} - a_{33}.$$

Как показывают равенства (13)–(15), для выполнения соотношений (10)–(12) ранг матрицы

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix}$$

должен равняться единице. Это условие однозначно определяет коэффициенты a_i , $i = 1, 2, 3$:

$$a_1 = a_{13}a_{12}/a_{23}; \quad (16)$$

$$a_2 = a_{21}a_{23}/a_{13}; \quad (17)$$

$$a_3 = a_{31}a_{32}/a_{12}, \quad (18)$$

а с ними и коэффициенты

$$a_{11}^{(1)} = a_{11} + a_{13}a_{12}/a_{23}; \quad (19)$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} + a_{21}a_{23}/a_{13}; \quad (20)$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{33} + a_{31}a_{32}/a_{12}. \quad (21)$$

Теперь значение u_0 определено с точностью до постоянного множителя, так как каждое из уравнений (13)–(15) позволяет записать соотношение

$$u_0 = \alpha(a_{12}a_{13}u_1 + a_{21}a_{23}u_2 + a_{31}a_{32}u_3). \quad (22)$$

Чтобы найти параметр α из выражения (22) и коэффициенты a_{i0} , $i = 1, 2, 3$, из (10)–(12), необходимо дополнительно подчинить связи первого, второго и третьего узлов с нулевым узлом дополнительным условиям. Будем считать, что соотношение (22) определяет уравнение в нулевом узле, и запишем его в форме равенства

$$-a_{00}^{(1)}u_0 + a_{01}^{(1)}u_1 + a_{02}^{(1)}u_2 + a_{03}^{(1)}u_3 = 0, \quad (23)$$

подчинив коэффициенты условию

$$a_{00}^{(1)} = a_{01}^{(1)} + a_{02}^{(1)} + a_{03}^{(1)}. \quad (24)$$

Тогда получим, что $\alpha = (a_{12}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{32})^{-1}$, а для параметров $a_{0i}^{(1)}$, $i = 1, 2, 3$, справедливы формулы

$$a_{01}^{(1)} = \alpha a_{00}^{(1)} a_{12} a_{13}, \quad a_{02}^{(1)} = \alpha a_{00}^{(1)} a_{21} a_{23}, \quad a_{03}^{(1)} = \alpha a_{00}^{(1)} a_{31} a_{32},$$

где значение $a_{00}^{(1)}$ пока неизвестно. В то же время соотношения (13)–(15) после подстановки равенств (16)–(18) в их левые части и выражения (22) в их правые части позволяют записать уравнения

$$a_{10}^{(1)} = (\alpha a_{32})^{-1}, \quad a_{20}^{(1)} = (\alpha a_{13})^{-1}, \quad a_{30}^{(1)} = (\alpha a_{21})^{-1}.$$

Нетрудно заметить, что все три условия изотропности (симметричности) $a_{i0}^{(1)} = a_{0i}^{(1)}$, $i = 1, 2, 3$, эквивалентны соотношению $a_{00}^{(1)}\alpha^2 = (a_{12}a_{13}a_{23})^{-1}$, определяющему коэффициент

$$a_{00}^{(1)} = (a_{12}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{32})/a_{12}a_{13}a_{23}, \quad (25)$$

а следовательно, и остальные коэффициенты:

$$a_{10}^{(1)} = a_{01}^{(1)} = a_{12} + a_{13} + a_{12}a_{13}/a_{23};$$

$$a_{20}^{(1)} = a_{02}^{(1)} = a_{21} + a_{23} + a_{21}a_{23}/a_{13};$$

$$a_{30}^{(1)} = a_{03}^{(1)} = a_{31} + a_{32} + a_{31}a_{32}/a_{12}.$$

Полученные соотношения однозначно задают переход от уравнений (7)–(9) к системе уравнений (23), (10)–(12). Поскольку все остальные уравнения в результате рассмотренных вычислений не изменялись, то преобразование сеточных уравнений, аналогичное преобразованию «треугольник — звезда», описано полностью.

Перейдем к преобразованию «звезда — треугольник», которое рассмотрим на примере перехода к схеме 3. С точки зрения линейной алгебры этот переход сводится к исключительно неизвестной u_3 , но получаемая в результате редуцированная система определяется неоднозначно (см., например, описание вариантов процесса исключения Гаусса в книге [4]). Легко, впрочем, указать условие, которое единственным образом задает все искомые коэффициенты. Заключается оно в том, что под действием рассматриваемых преобразований, если их направить на исключение неизвестной u_0 , система (23), (10)–(12) должна перейти в систему (7)–(9). Как нетрудно проверить, этому требованию отвечает переход к матрице, являющейся дополнением Шура диагонального элемента, принадлежащего исключаемому уравнению.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$DV = g \quad (26)$$

с матрицей D размерности m , вектором неизвестных V и вектором правой части g . Выделим в V подвекторы V_1 и V_2 с размерностями m_1 и m_2 : $m_1 + m_2 = m$. Тогда уравнение (26) можно переписать в форме

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

где D_{11} , D_{22} — квадратные $m_1 \times m_1$, $m_2 \times m_2$ -матрицы, а D_{12} и D_{21} — прямоугольные $m_1 \times m_2$ и $m_2 \times m_1$ -матрицы. Следствие системы (27) — уравнение

$$(D_{22} - D_{21}D_{11}^{-1}D_{12})V_2 = g_2 - D_{21}D_{11}^{-1}g_1, \quad (28)$$

которое может быть получено при исключении подвектора V_1 . Матрица уравнения (28) $D/D_{11} = D_{22} - D_{21}D_{11}^{-1}D_{12}$ и называется дополнением Шура блока D_{11} в матрице D .

Применим описанное преобразование к рассматривавшейся выше системе сеточных уравнений. При этом можно ограничиться изучением уравнений в нулевом и третьем — пятом узлах, так как остальные соотношения при переходе к схеме \mathcal{Z} не изменяются. Выделенные равенства запишем в виде

$$-a_{33}^{(1)}u_3 + a_{30}^{(1)}u_0 + a_{34}^{(1)}u_4 + a_{35}^{(1)}u_5 = f_3 \equiv b_3^{(1)}; \quad (29)$$

$$a_{03}^{(1)}u_3 - a_{00}^{(1)}u_0 = b_0^{(1)}; \quad (30)$$

$$a_{43}^{(1)}u_3 - a_{44}^{(1)}u_4 = b_4^{(1)}; \quad (31)$$

$$a_{53}^{(1)}u_3 - a_{55}^{(1)}u_5 = b_5^{(1)}, \quad (32)$$

включая в правые части слагаемые, которые содержат u_n , $n \neq 0, 3, 4, 5$, поскольку они не претерпят изменений.

Пользуясь обозначениями системы (27) для записи уравнений (29) — (32), положим $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $D_{11} = -a_{33}^{(1)}$,

$$D_{12} = D_{21}^t = (a_{30}^{(1)}, a_{34}^{(1)}, a_{35}^{(1)}), \quad D_{22} = \text{diag}(-a_{00}^{(1)}, -a_{44}^{(1)}, -a_{55}^{(1)}),$$

где индекс t означает транспонирование, а $\text{diag}(\dots)$ — диагональную матрицу с перечисленными в скобках диагональными элементами. Тогда соотношение (28) определяет нужные уравнения схемы \mathcal{Z} :

$$-a_{00}^{(2)}u_0 + a_{01}^{(2)}u_4 + a_{05}^{(2)}u_5 = b_0^{(2)}; \quad (33)$$

$$a_{40}^{(2)}u_0 - a_{44}^{(2)}u_4 + a_{45}^{(2)}u_5 = b_4^{(2)}; \quad (34)$$

$$a_{50}^{(2)}u_0 + a_{54}^{(2)}u_4 - a_{55}^{(2)}u_5 = b_5^{(2)} \quad (35)$$

с коэффициентами

$$a_{45}^{(2)} = a_{54}^{(2)} = a_{43}^{(1)}(a_{33}^{(1)})^{-1}a_{35}^{(1)}; \quad (36)$$

$$a_{ii}^{(2)} = a_{ii}^{(1)} - a_{i3}^{(1)}(a_{33}^{(1)})^{-1}a_{3i}^{(1)}; \quad (37)$$

$$a_{0i}^{(2)} = a_{i0}^{(1)} = a_{03}^{(1)}(a_{33}^{(1)})^{-1}a_{3i}^{(1)}, \quad i = 4, 5, \quad (38)$$

и правыми частями

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - a_{i3}^{(1)}(a_{33}^{(1)})^{-1}b_3^{(1)}, \quad i = 0, 4, 5.$$

Эти формулы завершают описание алгебраических аналогов преобразований «треугольник — звезда» и «звезда — треугольник». Рассмотрим их применение в некоторых частных случаях.

Исключение узла «0» на схеме I может осуществляться как частный случай перехода «звезда — треугольник». Дополнительно достаточно

предположить, что отсутствует взаимная зависимость искомым значений в узлах, лежащих правее и ниже линий l_{ix}, l_{jy} , $i = I(0)$, $j = J(0)$, со значениями в остальных узлах сетки. Формулы (36) — (38) при этом остаются справедливыми, в них только надо приравнять нулю параметры вида $a_{0s}^{(1)}, a_{s0}^{(1)}$, описывающие взаимодействия с нулевым узлом.

При смещении диагональной связи, например в направлении вниз вправо, она приблизится к границе области. Тогда возможна ситуация, изображенная, например, на рис. 4, когда отсутствует взаимодействие с узлами сетки, лежащими правее и (или) ниже линий l_{ix}, l_{jy} . И в этих случаях нулевыми оказываются некоторые коэффициенты приведенных выше формул, но все расчетные соотношения «работают», а очередной сдвиг диагональной связи приводит к ее уничтожению.

3. Алгоритм решения систем сеточных уравнений. Рассмотренные выше преобразования позволяют построить прямой алгоритм решения систем сеточных уравнений в областях общего вида. Сами преобразования «треугольник — звезда» и «звезда — треугольник» играют при этом роль элементарных «блоков», из которых собирается весь метод, а его описание сводится к указанию последовательности использования «блоков». Благодаря отмеченной особенности, вычисления, реализующие алгоритм, могут быть заданы с помощью схем. Такой способ описания и используется ниже.

Описание алгоритма дадим на примере области Ω , которая является квадратом, причем будем считать, что сетка имеет число шагов $n_x = n_y = n$. Процесс решения соответствующей системы из n^2 уравнений проходит в два этапа — прямой и обратный. На первом из них будет построена последовательность систем убывающих размерностей, а на втором — непосредственно вычислены все неизвестные величины.

Изложение последовательности вычислений проиллюстрируем с помощью рис. 5, 6. Первый шаг заключается в исключении из системы неизвестного значения с индексами (1, 1), что на рис. 5 соответствует удалению связей углового узла с соседними узлами. Штриховыми линиями обозначены промежуточные связи, появляющиеся в процессе эквивалентных преобразований, а сплошными — остающиеся связи. Крестики — узлы, которым в редуцированной системе уравнений соответствуют новые неизвестные и новые коэффициенты связей, получаемые аналогично, как при выводе уравнений (33) — (35). Таким же образом могут быть исключены все неизвестные, соответствующие остальным узлам 1-й строки и 1-го столбца сетки. После этого найдем преобразованную систему порядка $(n-1)^2$ (см. рис. 6), которую по аналогии с (1) можно записать в виде

$$-a_{rr}^{(1)} u_r^{(1)} + \sum_{s \in \omega_r} a_{rs}^{(1)} u_s^{(1)} = f_r^{(1)}, \quad r = 1, 2, \dots, M_1, \quad (39)$$

где r соответствует индексам $i = 2, \dots, n$; $j = 2, \dots, n$. Отметим, что если все $u_r^{(1)}$ каким-то образом вычислены, то искомые значения u_r находятся по формулам преобразований, рассмотренных в п. 2.

Дальнейший анализ алгоритма можно проводить рекурсивно. Решение системы (39) представляет собой ту же задачу, что и для уравнений (1), но только меньшего порядка. Ее можно свести к системе уравнений порядка $M_2 = (n-2)^2$

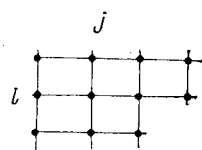


Рис. 4

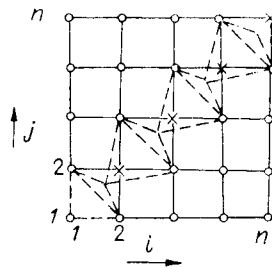


Рис. 5

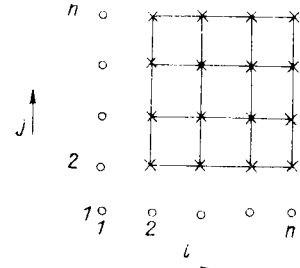


Рис. 6

для новых неизвестных $u_r^{(2)}$, соответствующих узлам с индексами $i = 3, \dots, n; j = 3, \dots, n$. Продолжая такой процесс далее, получим в итоге уравнение с одним неизвестным, после определения которого начинается обратный ход алгоритма, причем каждый его шаг выполняется так же, как при переходе от величин $u_r^{(1)}$, $r = 1, 2, \dots, M_1$, к величинам u_r , $r = 1, 2, \dots, M$, т. е. в соответствии с формулами п. 2.

Перейдем теперь к оценкам вычислительных ресурсов, необходимых для реализации алгоритма. Исключение узла P_{11} требует Bn арифметических операций, где B — число действий на одну пару преобразований «треугольник — звезда» и «звезда — треугольник». Здесь и далее считаем n достаточно большим и учитываем в оценках только главный член. Переход от исходной системы (1) к (39) (см. рис. 5, 6) требует $B[n + 2(n-1) + 2(n-2) \dots + 2] \cong Bn^2$ операций. Поскольку такие переходы нужно проделать n раз, то на весь прямой ход затрачивается $B[n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1] \approx Bn^3/3$ операций. Обратный ход алгоритма требует, как нетрудно видеть, примерно такого же количества арифметических действий.

Оценим теперь объем запоминаемой информации. Система (1) в общем случае определяется заданием $6n^2$ чисел. Поскольку редуцированные системы вида (39) совершенно аналогичны исходной, то полное их задание проводится с помощью $6[n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1] \approx 2n^3$ чисел. Таким образом, и объем вычислений, и объем памяти ЭВМ для реализации данного метода есть величина $O(n^3)$. Экономия вычислений и памяти может быть достигнута в так называемых частичных задачах, где требуется найти только относительно малую часть неизвестных, при этом за счет соответствующим образом подобранной последовательности вычислений обратный ход может целиком или частично не потребоваться.

Отметим, что при решении системы (1) с лепточной матрицей порядка n^2 и шириной полулобуса n методом исключения Гаусса требуемый объем вычислений составляет $O(n^4)$ действий при использовании памяти, необходимой для хранения $2n^3$ чисел, т. е. предлагаемый алгоритм по числу действий на порядок экономичней.

Вопрос численной устойчивости рассматриваемого метода требует специальных исследований. Обнадеживающим фактором является то, что все промежуточные системы симметричны и положительного типа, если такова исходная система. Это утверждение легко проверяется с помощью формул эквивалентных преобразований п. 2. Из него следует, в частности, что алгоритм «безаварийный», т. е. при его реализации в точной арифметике не может происходить деления на нуль.

В заключение авторы выражают благодарность Б. В. Сестрорецкому за проведенные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сестрорецкий Б. В. Возможности прямочисленного решения краевых задач на основе метода импедансного аналога электромагнитного пространства (ИАЗИ) // *Вопр. радиоэлектрон. Сер. Общ.техн.*— 1976.— Вып. 2.
2. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики.— М.: Наука, 1985.
3. Ильин В. П. Разностные методы решения эллиптических уравнений.— Новосибирск: НГУ, 1970.
4. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. И. Вычислительные методы линейной алгебры.— М.: Л.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 22 июля 1986 г.