№ п/п	a	σ	$s^2(\widetilde{x}(\infty))$	$s^2(\widetilde{x}\times(\alpha_{min}))$	α_{min}	№ п/п	a	σ	$s^2(\widetilde{x}(\infty))$	$s^2(\widetilde{x}\times(\alpha_{min}))$	α_{min}
1	0,0025	0,02	0,00075	0,00014	2,2	11	0,0075	0,02	0,0059	0,00021	0,8
2	0,0025	0,04	0,00091	0,00042	4,2	12	0,0075	0,04	0,0061	0,00065	1,5
3	0,0025	0,06	0,0012	0,00079	7,0	13	0,0075	0,06	0,0063	0,0012	2,2
4	0,0025	0,08	0,0016	0,0013	10,0	14	0,0075	0,08	0,0067	0,0019	2,9
5	0,0025	0,10	0,0020	0,0018	16,0	15	0,0075	0,10	0,0072	0,0028	3,6
6	0,005	0,02	0,0027	0,00018	1,2	16	0,01	0,02	0,010	0,00024	0,6
7	0,005	0,04	0,0028	0,00055	2,2	17	0,01	0,04	0,011	0,00073	1,2
8	0,005	0,06	0,0031	0,0010	3,2	18	0,01	0,06	0,011	0,0014	1,7
9	0,005	0,08	0,0035	0,0016	4,2	19	0,01	0,08	0,011	0,0022	2,2
10	0,005	0,10	0,0040	0,0023	5,0	20	0,01	0,10	0,012	0,0031	2,7

Выберем в качестве оценки величины α^* значение α_{min}, доставляющее минимум функционалу $\mathcal{J}_0(\alpha)$.

3. **Алгоритм и пример применения.** Алгоритм вычисления оценки $\widetilde{x}(\alpha_{min})$ состоит из следующей последовательности операций:

1) составляется матрица M и вычисляется матрица M^TM;

2) вычисляются собственные значения $\{\lambda_i\}_1^{n-m}$ и собственные векторы $\{p_i\}_1^n$ матрицы M^TM и строится матрица

$$P = \| p_1 \colon \ldots \colon p_n \|;$$

3) находится значение вектора $\widetilde{z} = P^Ty$;

4) находится значение α_{min}, доставляющее минимум функции $\mathcal{J}_0(\alpha)$;

5) вычисляется оценка

$$\widetilde{x}(\alpha_{min}) = P(I + \alpha_{min}L)^{-1}\widetilde{z}.$$

Покажем эффективность оценки $\widetilde{x}(\alpha_{min})$ на следующем модельном примере. Пусть нестационарный периодический процесс удовлетворяет модели

$$y(i) = (1 + ai)\sin(2\pi 10 i/n) + \varepsilon_i;$$

$$\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2),\ n = 50;\ i = 1, \ldots, n.$$

Среднеквадратические ошибки оценивания его детерминированной составляющей по методу наименьших квадратов с ограничениями и с помощью выражения $\widetilde{x}(\alpha_{min})$ при различных сочетаниях параметров a и σ представлены в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андерсон Т.** Статистический анализ временных рядов.— М.: Мир, 1976.
2. **Себер Д.** Линейный регрессионный анализ.— М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 26 февраля 1986 г.

УДК 621.317.7

И. И. КРАСНЕНКО, В. А. ФЕДОРОВ

(*Томск*)

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХТОЧЕЧНОГО КОРРЕЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ УЗКОПОЛОСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Цель данной работы — исследование точностных характеристик двухточечного корреляционного метода (ДКМ) измерения частоты узкополосных стационарных случайных сигналов в сравнении с методом счета нулей (МСН), который является одним из самых популярных на практике. Статистические характеристики МСН достаточно хорошо изучены, для ДКМ таких исследований не проводилось, за исключением описанных в [1] тестовых испытаний при дистанционных акустических доплеровских измерениях скорости ветра V ($V = cf_д/2f_и$, где c — скорость звука; $f_д = f_с - f_и$ — доплеровский сдвиг частоты принимаемого сигнала $f_с$ относительно излучаемой $f_и$). В работе [2] приведен ряд профилей V, полученных ДКМ и спектральными методами в сравнении с эталонными локальными измерениями, проводимыми на башне. На основании достаточно хорошего совпадения всех указанных профилей и с учетом простоты реализации делается вывод о преимущественном использовании ДКМ. В то же время не приводятся величины достигаемых в ходе экспериментов отношений сигнал/шум (С/Ш) и не указаны ограничения данного метода, которые, как укажем ниже, существуют. Целесообразно показать реальные возможности этого метода, учитывая его возможное применение не только в акустическом зондировании атмосферы, но и в других областях.

Идея ДКМ измерения частоты узкополосных сигналов, корреляционная функция (КФ) которых представима в виде $B_с(\tau) = \sigma_с^2 \rho_с(\tau) \times \cos 2\pi f_с \tau$, где $\sigma_с^2$ — мощность сигнала; $f_с$ — средняя частота; $\rho_с(\tau)$ — огибающая КФ, достаточно проста. Учитывая, что $\rho_с(\tau)$ — медленно меняющаяся функция по сравнению с высокочастотным заполнением, запишем отношение двух значений КФ $B_с(\tau)$ при некотором малом $\tau = \tau_1$ и $\tau = 0$:

$$B_с(\tau_1)/B_с(0) \simeq \cos 2\pi f_с \tau_1. \tag{1}$$

Отсюда получается выражение для оценки частоты

$$\widehat{f}_с = \arccos R/(2\pi\tau_1), \tag{2}$$

где $R = \widehat{B}(\tau_1)/\widehat{B}(0)$; $\widehat{B}(\tau_1)$ и $\widehat{B}(0)$ — измеренные значения КФ. При этом предполагаем, что на вход измерительной системы поступает не только исследуемый полезный сигнал $s(t)$, но и аддитивный шум $n(t)$. Поэтому измеряться будет КФ смеси «сигнал + шум», т. е.

$$\widehat{B}(\tau) = \frac{1}{T - |\tau|} \int_0^{T-|\tau|} x(t)\, x(t + |\tau|)\, dt, \tag{3}$$

здесь $x(t) = s(t) + n(t)$. В дальнейшем считаем, что $s(t)$ и $n(t)$ — некоррелированные гауссовы дифференцируемые процессы с нулевыми средними и КФ шума в полосе пропускания приемной системы Δf с центральной частотой $f_и$ аналогично $B_с(\tau)$ имеет вид $B_ш(\tau) = \sigma_ш^2 \rho_ш(\tau) \times \cos 2\pi f_и \tau$. Если шум белый со спектральной плотностью N_0, то $\sigma_ш^2 = N_0 \Delta f$; $\rho_ш(\tau) = \sin \pi\tau\Delta f/\pi\tau\Delta f$. Исследуем статистические характеристики ДКМ. Вначале отметим, что метод однозначен, если $2\tau_1 f_с \leqslant 1$. Выполнить это условие на практике обычно не составляет труда. Гораздо сложнее правильно выбрать τ_1, которое обеспечивало бы минимальную погрешность измерений. Причем зачастую наиболее важная задача есть обеспечение минимальных систематических ошибок, так как случайные ошибки на практике часто можно уменьшить простым усреднением результатов измерений. При $\tau_1 = 1/4f_с$ соотношение (1) выполняется точно, следовательно, и оценка (2) также наиболее точна с точки зрения систематических ошибок. Однако такая ситуация на практике нереальна, так как априори $f_с$ неизвестна. Чем меньше τ_1, тем точнее выполняется (1), однако представляет интерес изучение ошибок и при больших τ_1. Таким образом, исследуем систематические ошибки измерений $\delta_f = M[\widehat{f}_с] - f_с$, где $M[\cdot]$ — символ математического ожидания, при $\tau_{min} \ll 1/2f_с$, $\tau_{max} \simeq 1/2f_с$ и при τ_1 вблизи $\tau_{опт} = 1/4f_с$. Применяя метод линеаризации и учитывая несмещенность оценки (3) относительно КФ смеси $s(t)$ и $n(t)$ [3], а также разлагая КФ сигнала и шума в ряд Тейлора при рассматриваемых малых τ: $B(\tau)=B(0)+B''(0)\tau^2/2+O(\tau^4)$ и учитывая известную связь производных КФ при $\tau=0$ с алгебраическими спектральными моментами [4], получаем искомые характеристики оценки (2) в указанных областях τ.

При $\tau_1=\tau_{\min}$ (или для введенных безразмерных параметров при $\lambda \ll 1/2k$)

$$M[\widehat{f}_c] = f_c\{1+(q+s_1^2+4k\gamma+\gamma^2)/[4k^2(q+1)]\}^{1/2}, \qquad (4)$$

где $q=\sigma_c^2/\sigma_ш^2$ — отношение С/Ш; $s_1=2\Delta f_{эш}/2\Delta f_{эс}$ — отношение эффективных спектральных ширин шума $2\Delta f_{эш}$ и сигнала $2\Delta f_{эс}$, причем в качестве ширины спектра принято ее определение через удвоенную среднеквадратичную ширину, т. е. $\Delta f_э=\sqrt{\varkappa_2[G(f)]}$, здесь $\varkappa_2[G(f)]=$ $=\int\limits_0^\infty (f-\bar{f})^2 G(f)\,df\Big/\int\limits_0^\infty G(f)\,df$ — второй нормированный центральный момент спектральной плотности $G(f)$ (в случае сигнала $G_c(f)$ и $\bar{f}=f_c$, шума $G_ш(f)$ и $\bar{f}=f_п$); $k=f_c/2\Delta f_{эс}$ — коэффициент узкополосности сигнала; $\gamma=(f_п-f_c)/\Delta f_{эс}$ — относительная расстройка центральных частот приемной системы и исследуемого сигнала. Если при доплеровских измерениях $f_п$ выбрана равной излучаемой частоте $f_и$, то $\gamma=-f_д/\Delta f_{эс}$ — относительный доплеровский сдвиг (в дальнейшем рассматривается только этот случай); $\lambda=2\Delta f_{эс}\tau_1$ — безразмерный аргумент КФ.

Заметим, что из соотношения (8.14) монографии [4] для среднего числа выбросов в единицу времени при введении наших параметров следует выражение для $M[\widehat{f}_c]$ метода счета нулей, полностью совпадающее с формулой (4). Следовательно, можно утверждать, что систематические ошибки измерения частоты ДКМ при данном выборе τ_1 и МСН практически совпадают. Так, даже при отсутствии шумов измеряется не центральная частота сигнала, а величина, равная корню квадратному из второго начального момента его спектральной плотности, которая всегда больше истинной частоты f_c, т. е.

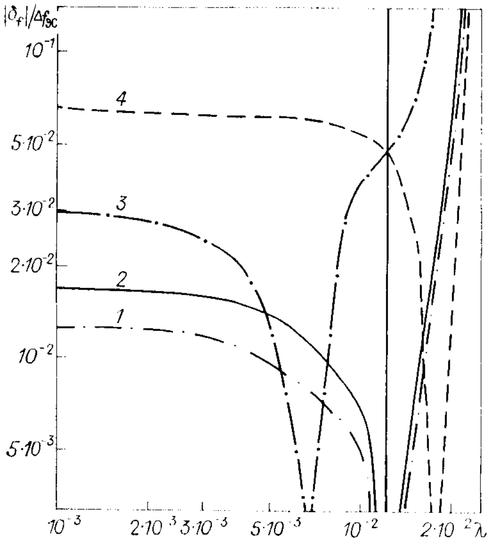
$$\lim_{q\to\infty} M[\widehat{f}_c] = (f_c^2+\Delta f_{эс}^2)^{1/2} = \left(\int\limits_0^\infty f^2 G_c(f)\,df\Big/\int\limits_0^\infty G_c(f)\,df\right)^{1/2}.$$

Однако при обработке узкополосных сигналов эта разница для практики часто несущественна.

Оценим влияние шума. Из (4), учитывая, что для рассматриваемых реальных параметров узкополосных сигналов и обрабатывающих систем числитель дроби существенно меньше ее знаменателя, и используя известную связь $\sqrt{1\pm x}\simeq 1\pm x/2$, получаем более удобную для анализа форму этого выражения:

$$\delta_f/\Delta f_{эс} = (q+s_1^2+4k\gamma+\gamma^2)/[4k(q+1)]. \qquad (5)$$

Первые два члена характеризуют систематические ошибки, обусловленные уменьшением коэффициента узкополосности исследуемой смеси сигнала и шума из-за увеличения их совместной эффективной спектральной ширины. Они играют определяющую роль при больших отношениях С/Ш или при малых $|f_д|$. Данные ошибки всегда вызывают увеличение измеренных значений f_c относительно истинных, что приводит к завышению положительных доплеровских сдвигов (или положительных скоростей ветра для случая акустического зондирования атмосферы) и, наоборот, к их занижению по абсолютной величине при $f_д<0$. Третий член характеризует ошибки, обусловленные расстройкой центральных частот измерительной системы и исследуемого сигнала вследствие доплеровских сдвигов: при фиксированном отношении С/Ш с увеличением $|f_д|$ систематические ошибки измерения f_c также увеличиваются. Причем при $f_д>0$ измеренное значение f_c будет заниженным, а при $f_д<0$ — завышенным. В обоих случаях эта составляю-



Относительные систематические ошибки ДКМ измерения частоты при $k = 20$:
кривая *1* соответствует значению $q = \infty$; кривая *2* — $q=20$, $\gamma=0$; кривая *3* — $q=20$, $\gamma=-1$; кривая *4* — $q=20$, $\gamma=1$

щая ошибки (5) приведет к занижению абсолютных значений $f_д$ и V. Величина этого смещения определяется отношением С/Ш. Влияние четвертого аддитивного члена менее существенно по сравнению с остальными. Наряду с первыми двумя членами, он приводит к увеличению измеренных значений f_c относительно истинных.

Учитывая различный характер вкладов в $\delta_f/\Delta f_{эс}$ при $f_д > 0$ аддитивных членов (5) и их одинаковую направленность при $f_д < 0$, можно сделать вывод о том, что при данном выборе τ_1 для ДКМ, как и для МСН, измерение положительных доплеровских сдвигов и скоростей будет сопровождаться меньшими систематическими ошибками, чем измерение отрицательных. Причем при определенной комбинации параметров сигнала, шума и измерительной системы, соответствующей доплеровским частотам $f_д \simeq \Delta f_{эс}^2 (q + s_1^2)/2f_и$, указанные ошибки близки к нулю. Однако на практике такие ситуации неконтролируемы.

При $\tau_1 = \tau_{max}$ $(\lambda = 1/2k)$ $\delta_f/\Delta f_{эс} = -\left[(q + s_1^2 + \gamma^2)/(q+1)\right]^{1/2}$, откуда следует, что даже в случае отсутствия шума систематические ошибки $\lim\limits_{q\to\infty} \delta_f = -\Delta f_{эс}$ являются недопустимо большими.

При τ_1 вблизи $\tau_{опт}$ (при λ вблизи $\lambda_{опт} = 1/4k$)

$$\frac{\delta_f}{\Delta f_{эс}} = \frac{\gamma}{q+1} - \frac{\pi^2}{4(q+1)}\left[q + s_1^2 + \gamma^2 + \frac{3s_1^2\gamma}{2k} + \frac{\gamma^3}{2k}\right](\lambda - \lambda_{опт}), \qquad (6)$$

т. е. даже в случае $\tau_1 = \tau_{опт}$, но при наличии шума и частотной расстройки γ оценка $\widehat{f_c}$ ДКМ является смещенной на величину первого члена в (6). При больших отношениях С/Ш или малых $f_д$ превалируют ошибки, обусловленные неточным выбором τ_1 и в пределе $\lim\limits_{q\to\infty} \delta_f/\Delta f_{эс} = -\pi^2(\lambda - \lambda_{опт})/4$.

В качестве примера на рисунке приведены относительные систематические ошибки ДКМ измерения частоты при варьировании параметра λ от λ_{min} до λ_{max} при различных частотных расстройках γ и отношениях С/Ш (при $q = \infty$ γ любое, если выполняется $|\gamma| < s$). Расчеты проводились для случая белого шума в полосе приемной системы Δf и вместо параметра s_1 был введен более наглядный параметр $s = \Delta f/2\Delta f_{эс} = 5$, характеризующий степень охвата Δf исследуемого спектра сигнала. (Связь s и s_1 выражается соотношением $s = \sqrt{3}\, s_1$, так как $\Delta f_{эш} = \Delta f/2\sqrt{3}$.) Вертикальная прямая на рисунке соответствует значению $\lambda = \lambda_{опт} = 0{,}0125$.

Анализируя вышеприведенные соотношения и результаты, представленные на рисунке, можно сделать вывод о том, что систематические ошибки с учетом возможных доплеровских сдвигов разных знаков минимальны вблизи $\tau_{опт} = 1/4f_c$. Однако на практике значение f_c априори неизвестно, поэтому можно только минимизировать эти ошибки. Указанное достигается выбором τ_1, равным четверти периода излучаемой (опорной) частоты, т. е. $\tau_1 = 1/4f_и$. Тогда, отбрасывая несущественные члены порядка $O(\gamma^2/k^3)$, можно получить

$$\frac{\delta_f}{\Delta f_{\text{эс}}} = \left(\frac{1}{q+1} + \frac{q}{q+1}\frac{\pi^2}{32k^2}\right)\gamma + O(\gamma^2/k^3). \tag{7}$$

В частности, $\lim\limits_{q\to\infty} \delta_f/\Delta f_{\text{эс}} = \pi^2\gamma/32k^2$, что существенно меньше аналогичных ошибок при $\tau_1 = \tau_{\min}$ ДКМ и МСН.

Таким образом, при данном выборе τ_1 в отличие от $\tau_1 = \tau_{\min}$ и МСН при фиксированном q абсолютные систематические ошибки измерения f_c, $f_{\text{д}}$ и V практически полностью определяются расстройкой центральных частот измерительной системы и исследуемого сигнала, т. е. самими измеряемыми значениями $f_{\text{д}}$. Относительные же ошибки измерения $f_{\text{д}}$ и V не зависят от измеряемых доплеровских сдвигов, а полностью определяются отношением С/Ш на входе измерительной системы. Это непосредственно следует из (7) без учета малого второго члена:

$$\delta_f/f_{\text{д}} = -1/(q+1) = \delta V/V. \tag{8}$$

Так, при $q = 100$ $\delta_f/f_{\text{д}} = -1\%$, при $q = 20 - 5\%$, при $q = 10 - 9\%$. С дальнейшим уменьшением отношения С/Ш ошибки резко возрастают и измеренные значения f_c стремятся к центральной частоте приемной системы $f_{\text{ц}}$, а $f_{\text{д}}$ и V — к нулю.

Таким образом, при выборе $\tau_1 = 1/4f_{\text{н}}$ в отличие от МСН и $\tau_1 = \tau_{\min}$ при $q = \text{const}$ обеспечивается постоянная относительная точность измерения доплеровских частот и скоростей. При этом одновременно обеспечивается и большая точность для больших отношений С/Ш или измерений малых $f_{\text{д}}$. Так, в случае отсутствия шума из (7) минимальная относительная ошибка равна $\delta_f/f_{\text{д}} = -\pi^2\Delta f_{\text{эс}}^2/8f_c^2$, в то же время из (5) $\delta_f/f_{\text{д}} = \Delta f_{\text{эс}}^2/2f_c f_{\text{д}}$. Однако в остальных случаях, как это следует из (5) и (7), относительные систематические ошибки измерения доплеровских частот и скоростей примерно одинаковы и определяются соотношением (8). Учитывая отмеченные выше определенные преимущества выбора $\tau_1 = 1/4f_{\text{н}}$ и то, что чувствительность ДКМ к изменению $f_{\text{д}}$ максимальна именно при этом τ_1, можно сделать вывод о предпочтительном выборе $\tau_1 = 1/4f_{\text{н}}$. В пользу данного выбора τ_1 говорит и то, что цифровая реализация метода в данном случае требует существенно меньшей частоты дискретизации, чем для $\tau_1 = \tau_{\min}$, что позволяет проводить измерения в реальном масштабе времени [1].

Рассмотрим случайные ошибки ДКМ, определяемые дисперсией $D[\widehat{f}_c]$. Применяя метод линеаризации к оценке (2), учитывая несмещенность (3) относительно КФ смеси сигнала и шума и результаты, приведенные в [3] для ковариационной функции $\text{cov}[\widehat{B}(\tau_1), \widehat{B}(\tau_2)]$ оценок КФ (3), после замены переменных $z = 2\Delta f_{\text{эс}}\tau$ получаем

$$\frac{D[\widehat{f}_c]}{\Delta f_{\text{эс}}^2} = \frac{D[\widehat{B}_{\text{н}}(\lambda)] + r^2 D[\widehat{B}_{\text{н}}(0)] - 2r\,\text{cov}[\widehat{B}_{\text{н}}(\lambda), \widehat{B}_{\text{н}}(0)]}{\pi^2\lambda^2(q+1)^2(1-r^2)}; \tag{9}$$

$$D[\widehat{B}_{\text{н}}(\lambda)] = \frac{1}{b_1-\lambda}\int\limits_{-(b_1-\lambda)}^{b_1-\lambda}\left(1-\frac{|z|}{b_1-\lambda}\right)[B_{\text{н}}^2(z) + B_{\text{н}}(z+\lambda)\,B_{\text{н}}(z-\lambda)]\,dz;$$

$$D[\widehat{B}_{\text{н}}(0)] = \frac{4}{b_1}\int\limits_0^{b_1}\left(1-\frac{z}{b_1}\right)B_{\text{н}}^2(z)\,dz; \quad r = B_{\text{н}}(\lambda)/B_{\text{н}}(0);$$

$$\text{cov}[\widehat{B}_{\text{н}}(\lambda), \widehat{B}_{\text{н}}(0)] = \frac{2}{b_1-\lambda}\int\limits_{-(b_1-\lambda)}^{b_1}\varphi(z)\,B_{\text{н}}(z)\,B_{\text{н}}(z-\lambda)\,dz;$$

$$\varphi(z)=\begin{cases}1-z/b_1, & \lambda<z;\\ 1-\lambda/b_1, & 0\leqslant z\leqslant\lambda;\\ 1-(\lambda-z)/b_1, & z<0;\end{cases}$$

$$B_{\text{н}}(z)=[B_{\text{с}}(z)+B_{\text{ш}}(z)]/\sigma_{\text{ш}}^2=q\rho_{\text{с}}(z)\cos 2\pi kz+\rho_{\text{ш}}(z)\cos\pi z(2k+\gamma)\text{ —}$$

нормированная на мощность шума КФ аддитивной некоррелированной смеси сигнала и шума; $b_1=2\Delta f_{\text{эс}}T$ — отношение длительности анализа T к радиусу корреляции сигнала, определяемому как $1/2\Delta f_{\text{эс}}$.

В интересующем нас случае выбора $\tau_1=1/4f_{\text{н}}$ $D[\widehat{f}_{\text{с}}]$ практически не зависит от γ, и, отбрасывая малые члены при разложении в ряд по этому параметру, имеем

$$D[\widehat{f}_{\text{с}}]/\Delta f_{\text{эс}}^2=D[\widehat{B}_{\text{н}}(\lambda_{\text{опт}})]/[\pi\lambda_{\text{опт}}(q+1)]^2+O(\gamma^2), \tag{10}$$

где $$B_{\text{н}}(z)=\cos 2\pi kz[q\rho_{\text{с}}(z)+\rho_{\text{ш}}(z)].$$

Рассмотрим случай $b_1\gg1$, представляющий практический интерес. При этом в (10) можно сделать существенное упрощение, полагая $D[\widehat{B}_{\text{н}}(\lambda_{\text{опт}})]\simeq\frac{1}{b_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[B_{\text{н}}^2(z)+B_{\text{н}}(z+\lambda_{\text{опт}})B_{\text{н}}(z-\lambda_{\text{опт}})]\,dz$. Тогда, предполагая, что сигнал и шум имеют гауссову спектральную плотность, т. е. $\rho_{\text{с}}(\tau)=\exp\left(-2\pi^2\Delta f_{\text{эс}}^2\tau^2\right)$ и $\rho_{\text{ш}}(\tau)=\exp\left(-2\pi^2\Delta f_{\text{эш}}^2\tau^2\right)$, получаем

$$\frac{D[\widehat{f}_{\text{с}}]}{\Delta f_{\text{эс}}^2}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,b_1(q+1)^2}\left[q^2+q\frac{4s_1^2}{(1+s_1^2)}\sqrt{\frac{2}{1+s_1^2}}+s_1\right]. \tag{11}$$

В случае белого шума

$$\frac{D[\widehat{f}_{\text{с}}]}{\Delta f_{\text{эс}}^2}=\frac{1}{b_1(q+1)^2}\left[\frac{q^2}{2\sqrt{\pi}}+\frac{2q}{s}+\frac{s}{3}\right]. \tag{12}$$

Из сравнения (11) и (12) при одинаковых параметрах следует, что $D[\widehat{f}_{\text{с}}]$ для белого шума несколько выше, чем для гауссова, что можно объяснить различиями их форм спектра. Наиболее существенное влияние на $D[\widehat{f}_{\text{с}}]$ оказывает величина длительности анализа наблюдения T, при этом $D[\widehat{f}_{\text{с}}]\sim1/T$, т. е. дисперсия, а следовательно и случайная ошибка измерений $\sigma_f=\sqrt{D[\widehat{f}_{\text{с}}]}$ с ростом T уменьшаются, что является следствием аналогичного хода дисперсий оценок КФ. Поэтому даже при малых отношениях С/Ш σ_f можно в принципе сделать незначительной выбором большого T (так, для белого шума в пределе $\sigma_{f\max}=\lim\limits_{q\to0}\sigma_f=\sqrt{\Delta f/12T}$). Однако сами измерения частоты будут бессмысленными из-за больших систематических ошибок. При больших С/Ш случайные ошибки определяются практически только шириной спектра сигнала и длительностью реализации

$$\sigma_{f\min}=\lim_{q\to\infty}\sigma_f=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta f_{\text{эс}}}{\sqrt{\pi}\,T}}\simeq0{,}38\sqrt{\frac{\Delta f_{\text{эс}}}{T}}.$$

Из соотношений (18.35), (18.37) монографии [4] для дисперсии числа нулей узкополосного процесса при больших T при введении наших параметров можно получить аналогичную формулу $\sigma_{f\min}\simeq\simeq0{,}61\sqrt{\Delta f_{\text{эс}}/T}$, из которой следует, что в данном случае ДКМ имеет определенные преимущества перед МСН.

Отметим, что проведенные расчеты дисперсии оценки частоты по общей формуле (9) при наличии белого шума и при параметре $s>1$ показали, что соотношение (12) справедливо с относительной погрешностью не более 5—10%, начиная уже с $b_1\geqslant1$, т. е. область применения данной формулы можно существенно расширить. Результаты расчетов и аналитические выводы показывают, что в случае выбора $\tau_1 = \tau_{\min}$ $D[\widehat{f}_c]$ при $b_1 \gg 1$ и больших отношениях С/Ш практически совпадают с таковыми при $\tau_1 = 1/4f_и$, но во всех остальных случаях $D[\widehat{f}_c]$ при $\tau_1 = 1/4f_и$ меньше, что является еще одним доводом в пользу этого выбора τ_1.

Из вышеприведенных соотношений следует, что измерения малых доплеровских сдвигов при недостаточно большом T могут сопровождаться большими относительными случайными ошибками даже при больших отношениях С/Ш, так как $\sigma_f/f_д = \sigma_f/(\Delta f_{эс}|\gamma|)$. Например, в случае акустических доплеровских измерений скорости ветра при таких типичных параметрах, как $f_и = 1000$ Гц, $T = 0{,}1$ с, $\Delta f_{эс} = 10-20$ Гц, σ_f имеет величину от 3,8 до 5,4 Гц, что в пересчете на случайные ошибки измерения V дает величину $\sigma_V = 0{,}6-0{,}9$ м/с. Таким образом, измерение малых «мгновенных» радиальных компонентов скорости ветра, например его вертикальной составляющей, при применении ДКМ и МСН статистически не обосновано. Однако при измерении средних профилей, т. е. при усреднении результатов зондирования за N периодов посылки звукового импульса, эти случайные ошибки существенно уменьшаются примерно в $\sqrt{N}$ раз, в то время как систематические практически не изменяются.

Рассмотрим встречающийся на практике случай малых T, т. е. когда $b_1 = 2\Delta f_{эс}T \ll 1$. Так как интегрирование при этом в $D[\widehat{B}_и(\lambda_{опт})]$ соотношения (10) ведется вблизи малых значений $-(b_1 - \lambda_{опт})$ и $(b_1 - \lambda_{опт})$, то допустимо разложение огибающих КФ сигнала и шума с учетом ранее сделанной замены переменных $z = 2\Delta f_{эс}\tau$: $\rho_с(z) = 1 - \pi^2 z^2/2 + O(z^4)$, $\rho_ш(z) = 1 - \pi^2 s_1^2 z^2/2 + O(z^4)$. Получающееся при этом после взятия интегралов выражение для $D[\widehat{f}_c]$ достаточно громоздко, поэтому приведем данное соотношение в частном случае $2f_cT = n$, где n — некоторое целое, которое отражает основные особенности общего выражения для $D[\widehat{f}_c]$ при $b_1 \ll 1$:

$$\frac{D[\widehat{f}_c]}{\Delta f_{эс}^2} = \frac{4}{\pi^4 (b_1 - \lambda_{опт})^2}\left(1 + \frac{3\beta}{8k^2} - \frac{\pi^2\beta}{32k^2}\right) - \frac{2\beta}{\pi^2} + \frac{\beta}{2}, \tag{13}$$

где $\beta = (q + s_1^2)/(q + 1)$. Величина дисперсии в основном определяется первым членом (13), который показывает, что в отличие от случая больших длительностей реализации, где $D[\widehat{f}_c] \sim 1/T$, здесь $D[\widehat{f}_c] \sim 1/(T - \tau_{опт})^2$ и наблюдается резкое увеличение случайной ошибки с уменьшением разности $T - \tau_{опт}$. В принципе можно $D[\widehat{f}_c]$ уменьшить применением смещенной оценки КФ [3], но за счет увеличения систематических ошибок. В любом случае $D[\widehat{f}_c]$ остается значительной и является серьезной преградой для корректных измерений частоты ДКМ. Так, даже при отсутствии шума из (13) следует, что $\sigma_f/\Delta f_{эс} \simeq 0{,}2/(b_1 - \lambda_{опт})$ (или $\sigma_f \simeq 0{,}1/(T - \tau_{опт})$) и при значениях обобщенных параметров $k = 20$, $b_1 = 0{,}1$, $\sigma_f/\Delta f_{эс} = 2{,}4$.

Для МСН случайные ошибки при малых T также достаточно велики. Так, из соотношения (18.15) [4] для дисперсии числа нулей при отсутствии шума получаем $\sigma_f = 0{,}71\sqrt{\Delta f_{эс}/T}$ и при ранее указанных параметрах k и b_1 $\sigma_f/\Delta f_{эс} = 3{,}2$. При других соотношениях значений обобщенных параметров σ_f МСН, оставаясь значительными, могут быть и меньше σ_f ДКМ.

Таким образом, в работе исследованы точностные характеристики ДКМ измерения частоты узкополосного стационарного процесса в зависимости от длины реализации, отношения С/Ш, относительных доплеровских сдвигов и других параметров. Обоснован выбор $\tau_1 = 1/4f_и$ в качестве параметра сдвига второй точки КФ. Показано, что относительные систематические ошибки измерений доплеровских частот и скоростей в основном определяются отношением С/Ш и они меньше 10%

только при $q \geqslant 10$. Поэтому радикальным средством их уменьшения, а также, естественно, и случайных ошибок является повышение отношения С/Ш в канале обработки, особенно при изменении доплеровских сдвигов в большом частотном диапазоне. Достаточно простое и эффективное средство решения данной задачи — проведение предварительной фильтрации измеряемого сигнала набором полосовых фильтров и затем подключение к каналу ДКМ измерения частоты выхода фильтра с максимумом спектральной плотности. Аналогичные системы успешно работают в акустических локаторах, где в качестве интерполятора используется канал МСН [5].

Величина случайной ошибки определяется преимущественно длиной исследуемой реализации T. При достаточно больших T, вернее при $T \gg 1/2\Delta f_{\text{эс}}$, эти ошибки могут быть незначительны. В других случаях для обеспечения достоверности измерений необходимо применять усреднение первичных результатов, полученных с помощью ДКМ.

Из сравнения ДКМ и МСН можно сделать вывод о том, что ошибки измерений частоты в большинстве практических ситуаций для обоих методов примерно одинаковы, ДКМ имеет преимущество лишь при больших q или при измерении малых доплеровских сдвигов.

В заключение отметим, что проведенное в [1] экспериментальное исследование точностных характеристик ДКМ путем имитации доплеровских сдвигов узкополосных случайных сигналов относительно шума в полосе пропускания приемной системы подтверждает вышеизложенные теоретические выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Галкин В. И., Красненко Н. П., Трофимов Ю. С. и др.** Моностатический акустический локатор МАЛ-1 для измерения скорости ветра и исследования структуры пограничного слоя атмосферы.— Томск, 1981. (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ИОА; 40).
2. **Owens E. J.** Microcomputer-controlled acoustic echo sounder // NOAA Technical Memorandum ERL WPL-21.— Colorado, Boulder, 1977.
3. **Дженкинс Г., Ваттс Д.** Спектральный анализ и его приложения.— М.: Мир, 1971, т. 1.
4. **Тихонов В. И.** Выбросы случайных процессов.— М.: Наука, 1971.
5. **Азизян Г. В., Каллистратова М. А., Мартвель Ф. Э. и др.** Измерение профиля ветра с помощью содарного анемометра // Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана.— 1984.— Т. 20, № 1.

Поступила в редакцию 22 июля 1986 г.

УДК 517.444 : 621.391

М. В. ЗЮЗИН

(*Новосибирск*)

АЛГОРИТМ СБОРКИ ОБРАТНЫХ ФИЛЬТРОВ

Пусть на равномерной сетке $\Omega = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ заданы значения некоторого экспериментального сигнала $f(n)$. Прямая задача цифровой обработки состоит в том, чтобы подействовать на $f(n)$ цифровым фильтром

$$\Phi f(n) = g(n), \tag{1}$$

осуществляющим заданное преобразование

$$\Phi e^{i\xi n} = K(\xi)\, e^{i\xi n} \tag{2}$$

функций $e^{i\xi n}$ с частотной характеристикой $K(\xi)$ на интервале $[0, 2\pi]$.