16. **Mahoney R. C.** A common PASCAL test language: reality or pipedream // Ibid.
17. **Downey A. L.** Test program optimization technique for a high-speed performance VLSI tester // Int. Test Conf.— N. Y.: Cherry Hill, 1983.
18. **Okamoto T., Shibata H., Kinoshita K.** Design of high level test language for digital LSI // Ibid.
19. **Подзин А. Е.** Организация управления аппаратурными средствами автоматизированных систем контроля // Автометрия.— 1978.— № 4.
20. **Пратт Т.** Языки программирования: разработка и реализация.— М.: Мир, 1979.

Поступила в редакцию 11 сентября 1985 г.

УДК 62.505 : 519.24

К. В. ИСАЕВ

(*Ростов-на-Дону*)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ

Введение. Для задач обработки наблюдений (экспериментальных данных) характерна следующая постановка.

Пусть векторные случайные величины (наблюдения) $X_1, X_2, \ldots, X_N$ связаны с оцениваемым векторным параметром c соотношениями

$$X_i = f_i(c) + Y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

где $f_i(c)$ — заданные вектор-функции; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ — последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных векторов с плотностью распределения вероятностей (ПРВ) $\varphi(y|b)$, определенной с точностью до векторного параметра b. Требуется по реализации $x^{(N)} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ последовательности наблюдений $X^{(N)} = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ найти оценку c^* параметра c.

Математически корректные методы решения задач оценивания параметра c можно связать с байесовским подходом [1, 2], при котором параметры c и b интерпретируются как случайные векторы C и B с совместной априорной ПРВ $p_0(c, b|\alpha)$, зависящей от некоторого (в общем случае векторного) параметра α, смысл которого будет уточнен ниже. В соответствии с формулой Байеса совместная условная (апостериорная) ПРВ параметров C и B относительно реализации наблюдений $x^{(N)}$ определяется формулой

$$p(c, b|x^{(N)}, \alpha) = k(x^{(N)}, \alpha) p_0(c, b|\alpha) \varphi^{(N)}(x^{(N)}|c, b), \tag{2}$$

где

$$\varphi^{(N)}(x^{(N)} | c, b) = \prod_{i=1}^{N} \varphi(x_i - f_i(c) | b) \tag{3}$$

— условная (относительно c и b) ПРВ последовательности $X^{(N)}$; $k(x^{(N)}, \alpha)$ — нормирующий множитель, совпадающий с величиной, обратной значению безусловной ПРВ реализации $x^{(N)}$. Наиболее общий из методов оценивания — метод максимума апостериорной вероятности (МАВ) [3] — сводится к максимизации плотности (2) или, что то же самое, логарифма этой плотности по паре (c, b). С учетом соотношения (3) полученная (зависящая от α) МАВ-оценка этой пары имеет вид

$$(c_{\text{МАВ}}(\alpha), b_{\text{МАВ}}(\alpha)) = \arg\max_{(c,b)} \left[\ln p_0(c, b | \alpha) + \sum_{i=1}^{N} \ln \varphi(x_i - f_i(c) | b) \right]. \tag{4}$$

Метод МАВ тесно связан с методами регуляризации [4] задач обработки (аппроксимации) наблюдений (первое слагаемое в правой части формулы (4) можно рассматривать как стабилизирующую добавку с параметром регуляризации α). Вопросы выбора этой добавки и определения параметра регуляризации («по дополнительной информации о задаче» [4]) наименее разработаны в теории регуляризации. Очевидно, что приведенная статистическая интерпретация может существенно способствовать их уточнению и решению для многих задач обработки наблюдений. Ниже рассматривается один из эффективных и простых способов такого уточнения.

Заметим, что байесовский метод и в его рамках МАВ-оценивание во многом аналогичны методам теории размытых множеств [5]. Мы, однако, будем придерживаться статистической (байесовской) терминологии.

Построение регуляризованных МАВ-оценок. Будем исходить из следующих «физически» естественных предположений.

1. Условная ПРВ вектора B относительно α не зависит от α и, следовательно, совпадает с безусловной (априорной) ПРВ $p_{0B}(b)$ этого вектора. Другими словами, справедлива формула

$$p_0(c,\ b|\alpha)=p_{0C}(c|b,\ \alpha)p_{0B}(b),$$

где $p_{0C}(c|b,\ \alpha)$ — условная (относительно b и α) априорная ПРВ параметра C. Полагая распределение $p_{0B}b$ равномерным (максимально неопределенным) и заданным на достаточно большой области S, заведомо содержащей «истинное» значение $b_{\text{МАВ}}$, формулу (4) перепишем в виде

$$(c_{\text{МАВ}}(\alpha),\ b_{\text{МАВ}}(\alpha))=\arg\max_{(c,b)} J(c,\ b,\ \alpha), \tag{5}$$

где

$$J(c,\ b,\ \alpha)=\ln p_{0C}(c\,|\,b,\ \alpha)+\sum_{i=1}^{N}\ln\varphi(x_i-f_i(c)\,|\,b). \tag{6}$$

2. Имеется возможность независимо от c оценивать параметр b распределения $\varphi(y|b)$ (относящийся к помехе наблюдения Y_i) путем проведения эксперимента на «эталонном объекте» (метрологического эксперимента), т. е. в условиях, когда в модели наблюдения (1) можно положить $f_i(c)=\psi_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ K$, где ψ_i — точно заданные векторы. Термин «точно заданные» означает, что погрешности, с которыми известны ψ_i, пренебрежимо малы по сравнению с дисперсией шума Y_i, и поэтому ψ_i можно считать неслучайной величиной (фактически ψ_i — векторы с ПРВ близкими к дельта-функциям). Без потери общности будем полагать $\psi_i=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ K$, т. е. метрологический эксперимент опишем тривиальной моделью наблюдения $X_i=Y_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ K$. Таким образом, для МАВ-оценки $b_{\text{м}}$ параметра b, полученной по данным метрологического эксперимента $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_K$ (при равномерном априорном распределении вектора B), имеем формулу

$$b_{\text{М}}=\arg\max_{b}\sum_{i=1}^{K}\ln\varphi(y_i\,|\,b). \tag{7}$$

Число наблюдений (измерений) K метрологического эксперимента естественно согласовать (по точности оценки (7)) с точностью задания векторов ψ_i (классом точности эталонного объекта).

В условиях принятых предположений можно предложить несколько способов определения значения α^* параметра регуляризации α, связанных с использованием результата (7) обработки данных метрологического эксперимента. Рассмотрим два из них.

1. В качестве α^* берется решение (не обязательно единственное) уравнения

$$b_{\text{МАВ}}(\alpha)=b_{\text{м}} \tag{8}$$

(если это решение существует и принадлежит множеству L таких α, при которых функция $p_{0C}(c|b_{\text{м}},\ \alpha)$ является ПРВ).

2. В качестве α^* принимается

$$\alpha^*=\arg\max_{\alpha\in L}\|b_{\text{М}}-b_{\text{МАВ}}(\alpha)\|. \tag{9}$$

После определения α^* оценка $c^* = c_{\text{МАВ}}(\alpha^*)$ находится по формулам (5), (6) с подстановкой $\alpha = \alpha^*$. На этом все вычисления заканчиваются.

Как правило, функции $c_{\text{МАВ}}(\alpha)$, $b_{\text{МАВ}}(\alpha)$ не могут быть найдены в аналитическом виде, и поэтому описанный способ оценивания параметра c требует применения численных методов. В практике автора хорошо зарекомендовал себя алгоритм вычисления $c_{\text{МАВ}}(\alpha)$, $b_{\text{МАВ}}(\alpha)$ по заданным α и x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, сводящийся к численному решению относительно b уравнения

$$b_{\max}(c_{\max}(b, \alpha), \alpha) = b, \tag{10}$$

где $\quad c_{\max}(b, \alpha) = \arg\max\limits_{c} J(c, b, \alpha); \quad b_{\max}(c, \alpha) = \arg\max\limits_{b} J(c, b, \alpha).$

В простейших случаях параметр b — скаляр и решение $b_{\text{МАВ}}(\alpha)$ уравнения (10) легко определяется одним из известных итерационных методов (например, методом Вегстейна). В качестве побочного результата на последней итерации получается значение $c_{\text{МАВ}}(\alpha)$. Вычисление α^* путем решения уравнения (8) или в соответствии с формулой (9) в большинстве случаев также выполняется методом итераций, на каждом итерационном шаге которого численно решается уравнение (10).

Пример. Рассмотрим одномерную модель наблюдения (1), в которой X_i, Y_i — скаляры и шум Y_i распределен по нормальному закону $N_1(0, b)$ с нулевым средним и неизвестной дисперсией b. Априорное распределение $p_{0C}(c|\alpha)$ также выберем нормальным, исходя из следующих «физических» соображений. Пусть априори известно, что последовательность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, образующих компоненты вектора c, приблизительно описывается закономерностью $C_{j+1} = C_j + a_j + G_j$ $(j = 1, 2, \ldots \ldots, n-1)$, где a_j — заданные, а G_j — случайные величины с нулевыми средними значениями и известными дисперсиями σ_j^2. Это означает, что условное распределение компоненты C_{j+1} относительно компоненты c_j имеет вид $N_1^*(c_j + a_j, \sigma_j^2)$. Отсюда легко заключить, что ПРВ $p_{0C}(c|\alpha)$ определяется средним значением $c^0 = (c_1^0, c_1^0 + a_1, c_1^0 + a_1 + a_2, \ldots)^T$ и ковариационной матрицей $D(\alpha) = \alpha P + Q$, где α — выбранная в качестве параметра регуляризации дисперсия компоненты c_1; P — матрица, все элементы которой равны единице; Q — симметричная матрица с общим элементом $q_{ij} = \sum \sigma_{r-1}^2$, где суммирование выполняется от $r = 1$ до $r = \min(j, i)$, а σ_0^2 принимается равным нулю. Полагая векторы C и B априори статистически независимыми, получаем следующее выражение для функционала (6):

$$J(c, b, \alpha) = -(c - c^0)^T D^{-1}(\alpha)(c - c^0) - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{N}(x_i - f_i(c))^2 - N \ln b.$$

При этом функция $b_{\max}(c, \alpha)$, фигурирующая в правой части уравнения (10), не зависит от α и определяется в явном виде

$$b_{\max}(c) = \sum_{i=1}^{N}(x_i - f_i(c))^2/N.$$

В соответствии с (7) при $f_i(c) = 0$, $x_i = y_i$, $N = K$ последняя формула служит и для вычисления $b_{\text{м}}$. Для линейной по параметрам модели, т. е. в случае $f_i(c) = z_i^{\text{т}} c$ (т — символ транспонирования, z_i — заданные векторы), функция $c_{\max}(b, \alpha)$ также определяется в явном виде

$$c_{\max}(b, \alpha) = (M + bD^{-1}(\alpha))^{-1}(v + bD^{-1}(\alpha)c^0),$$

где
$$M = \sum_{i=1}^{N} z_i z_i^{\text{т}}, \quad v = \sum_{i=1}^{N} x_i z_i.$$

Заключение. Рассмотренный в примере способ регуляризации основан на широко распространенном приеме подгонки функционала среднеквадратической ошибки аппроксимации $b_{\text{МАВ}}(\alpha)$ наблюдений $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_N$ моделью (1) к оценке $b_{\text{м}}$ дисперсии шума измерений, полученной независимо по данным метрологического эксперимента. Подгонка осуществляется варьированием параметра α, регулирующего отношение между информацией, содержащейся в априорном распределении оцениваемого параметра, и информацией об этом параметре, имеющейся в экспериментальных данных (наблюдениях $x_1, x_2, \ldots, x_N$). По-видимому, этот способ регуляризации является самым простым. Как можно понять из статистической интерпретации задачи, другие способы регуляризации связаны с подгонкой более сложных (возможно, векторных) функционалов, заданных на последовательностях ошибок аппроксимации $\varepsilon_i = x_i - f_i(c_{\text{МАВ}}(\alpha))$, $i=1, 2, \ldots, N$, к соответствующим функционалам шума наблюдений y_i, $i=1, 2, \ldots, K$.

Укажем еще на связь между проверкой статистических гипотез и рассмотренным методом регуляризации: фактически параметр регуляризации α в этом методе подбирается по критерию максимальной достоверности гипотезы $H: b_{\text{МАВ}}(\alpha) = b_{\text{м}}$, связанной с проверкой адекватности данных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ и принятой для модели наблюдения вида (1).

Наконец, отметим очевидную возможность обобщения рассмотренного метода регуляризации на случаи неаддитивного шума наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петерка В.** Байесовский подход к идентификации систем // Современные методы идентификации систем/Под ред. П. Эйкхоффа.— М.: Мир, 1983.
2. **Де Гроот М.** Оптимальные статистические решения.— М.: Мир, 1979.
3. **Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л.** Идентификация систем управления.— М.: Наука, 1974.
4. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.
5. **Резник Л. К.** Использование нечеткой информации для повышения точности оценок измеряемых величин // Автометрия.— 1985.— № 4.

Поступила в редакцию 13 января 1986 г.

УДК 519.24

Я. А. БЕДРОВ

(*Ленинград*)

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ, БЛИЗКИХ К ПЕРИОДИЧЕСКИМ

Введение. Результаты экспериментальных наблюдений различных медико-биологических процессов свидетельствуют о том, что они часто имеют характер периодических колебаний. Эти колебания или связаны с периодичностью внешних воздействий (суточные и годовые колебания), или являются естественным режимом работы некоторой системы (дыхательные движения, сердечные сокращения и т. д.).

Наиболее существенное отличие периодических процессов в живых системах от аналогичных процессов в технических устройствах — это присущая первым нестационарность колебаний, которая есть следствие их высокой сложности. Это приводит к тому, что любой периодический процесс в живой системе будет им лишь приближенно. Типичный пример такой приближенной периодичности — процесс, у которого амплитуда подвержена медленным (по сравнению с периодом) изменениям.

Интуитивно ясно, что в этих случаях решение задачи оценивания дискретного процесса по результатам его зашумленных наблюдений сталкивается со следующей проблемой: каким образом учесть ту априорную информацию, которая заключается в его близости к периодическому процессу? Один из возможных способов решения этой задачи — исполь-