ЛИТЕРАТУРА

1. **Дрейзин Ю. А.** О применении метода накопления в электромагнитных зондированиях // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1982.— № 2.
2. **Журавин Л. Г., Мариненко В. А., Мариненко М. А. и др.** Оптимизация статистической обработки результатов многократных измерений в измерительных системах с негауссовыми шумами // Изв. вузов. Приборостроение.— 1983.— № 7.
3. **Холлендер, Вулф Д.** Непараметрические методы статистики: Пер. с англ. Д. С. Шмерлинга/Под ред. Ю. П. Адлера, Ю. Н. Тюрина.— М.: Финансы и статистика, 1983.
4. **А. с. 1157505 (СССР).** Устройство для нелинейной обработки электроразведочных сигналов/В. И. Лемец; В. А. Мариненко, П. И. Тишин и др.— Опубл. в БИ, 1985, № 19.

Поступила в редакцию 5 января 1985 г.

УДК 519.2 : 612.821

О. Б. КОВЧЕГОВА

(Москва)

ПОТЕРИ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ИМПУЛЬСНОЙ АКТИВНОСТИ НЕЙРОНОВ И ИХ СВЯЗЬ С ИЗМЕНЕНИЕМ АВТО- И КРОССКОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ

При регистрации импульсной активности нейронов в результате аппаратурного шума (помех) амплитуда импульса может быть искажена так, что происходит выброс сигнала за установленные пороги. Регистрируя сигналы, амплитуда которых попадает в интервал, ограниченный установленными порогами, мы неизбежно потеряем импульсы, амплитуда которых под действием шума стала меньше нижнего или больше верхнего порога, что приведет к искажению авто- и кросскорреляционных функций регистрируемых процессов. В настоящей работе исследуются такие изменения корреляционных функций импульсных процессов.

Пусть $\{t_k\}$ — моменты возникновения импульсов. Импульсный поток может быть показан [1] в виде суперпозиции δ-функций Дирака:

$$\xi(t) = \sum \delta(t - t_k). \qquad (1)$$

Потеря некоторой доли моментов t_k может быть формально представлена как умножение процесса $\xi(t)$ на некоторый не зависящий от ξ процесс $\eta(t)$, принимающий два значения — нуль и единицу:

$$\tilde{\xi}(t) = \xi(t)\,\eta(t). \qquad (2)$$

Процесс η отражает результат воздействия шума на сигнал:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда сигнал в момент } t \text{ не пропадает;} \\ 0, & \text{когда сигнал в момент } t \text{ пропадает.} \end{cases}$$

Приблизительный вид траектории η дан на рис. 1.

Считаем ξ стационарным процессом с математическим ожиданием $M\xi = 0$, следовательно, $M\tilde{\xi} = 0$. Из определения автокорреляционной функции и выражения (2), учитывая независимость ξ и η, получим

$$K_{\tilde{\xi}}(\tau) \doteq M(\eta(t)\,\eta(t+\tau))\,K_\xi(\tau) = P(\eta(t) = 1,\ \eta(t+\tau) = 1)\,K_\xi(\tau), \qquad (3)$$

где K_* — автокорреляционная функция процесса; $M(*)$ — математическое ожидание; $P(\eta(t) = 1,\ \eta(t+\tau) = 1)$ — вероятность того, что $\eta(t)$ и

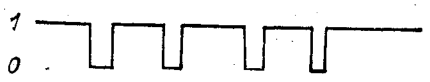

Рис. 1

$\eta(t+\tau)$ (сечения процесса η в моменты времени t, $t+\tau$) принимают значения 1. При стационарном η данная вероятность есть функция от τ, не зависящая от t.

Процесс ξ отражает поступление в моменты времени t_k импульсов постоянной амплитуды A. Шум (помехи), искажающий сигнал, считаем стационарным гауссовым процессом $\theta(t)$, сечения которого в каждый момент времени есть нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Регистрация сигналов происходит следующим образом: устанавливаются пороги α и β, $\alpha < A < \beta$, и отмечаются моменты времени, когда амплитуда попадает в интервал $[\alpha, \beta]$. Потеря импульсов, о которой сообщалось ранее, соответствует следующей картине: в результате действия шума амплитуда сигнала в момент t становится случайной величиной $A+\theta(t)$, и если происходит выброс за одну из линий уровня — нижнюю (α) или верхнюю (β), то сигнал не регистрируется. Процессы $\eta(t)$ и $\theta(t)$ связаны между собой следующим образом:

$$\eta(t)=\begin{cases}0 \Leftrightarrow A+\theta(t)>\beta \text{ или } A+\theta(t)<\alpha;\\ 1 \Leftrightarrow \alpha \leqslant A+\theta(t) \leqslant \beta.\end{cases} \tag{4}$$

Связь процессов η и θ показана на рис. 2.

Определим долю потерь как предел отношения числа потерянных импульсов процесса $\xi(t)$ ко всем импульсам процесса $\xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, при $T \to \infty$, что соответствует доле времени пребывания процесса η в состоянии $\eta=0$, т. е. вероятности

$$P\{\eta(t)=0\}=P\{\theta(t)>\beta-A\}+P\{\theta(t)<\alpha-A\}. \tag{5}$$

Из условия нормальности распределения случайных величин $\theta(t)$ получаем выражение для доли потерь:

$$P\{\eta(t)=0\}=\Phi\left(\frac{A-\beta}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\alpha-A}{\sigma}\right), \tag{6}$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ — табулированная функция Лапласа.

Доказано [2], что при выполнении некоторых ограничений на вторую производную автокорреляционной функции процесса θ поток пересечений гауссовым процессом θ снизу вверх уровня u в пределе при $u \to \infty$ пуассоновский. Таким образом, если $\beta - A$ и $A - \alpha$ достаточно велики по сравнению с σ и пороги α и β выбраны почти симметрично относительно A, то поток точек пересечения процессом θ верхней линии уровня β снизу вверх и нижней линии уровня α сверху вниз можем считать пуассоновским и процесс η трактовать как пуассоновский поток «сбоев» (переходов в значение 0) с экспоненциально распределенной длительностью пребывания в «аварийном» состоянии (в состоянии $\eta=0$, т. е. пришедшие за это время импульсы не регистрируются). Процесс

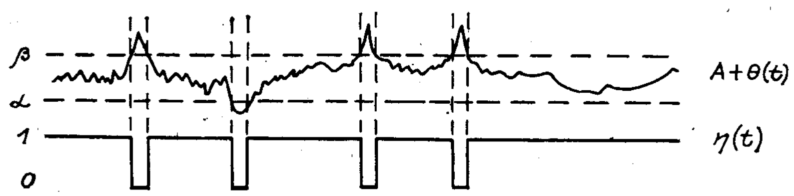

Рис. 2

можно изобразить схематически:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\mu"] & 1 \arrow[l, bend left, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

где λ — параметр пуассоновского потока «сбоев» (λ^{-1} — среднее время между поступлениями); μ — параметр экспоненциального распределения длительности пребывания в состоянии 0 (μ^{-1} — среднее время пребывания в состоянии 0). Очевидно, что $\lambda^{-1} > \mu^{-1}$, т. е. средний интервал между началами двух сбоев, следующих один за другим, больше среднего интервала времени от начала сбоя до его устранения, отсюда $\lambda < \mu$. Имеет смысл рассматривать такие процессы η, для которых $\lambda \ll \mu$, т. е. сбои редки и длятся недолго. Известны условные вероятности переходов системы из состояния i в состояние j $(i, j \in \{0, 1\})$ за малое время Δt:

$$P\{\eta(t+\Delta t)=0|\eta(t)=1\}=1-e^{-\lambda\Delta t};\ P\{\eta(t+\Delta t)=0|\eta(t)=0\}=e^{-\mu\Delta t};$$
$$P\{\eta(t+\Delta t)=1|\eta(t)=1\}=e^{-\lambda\Delta t};\ P\{\eta(t+\Delta t)=1|\eta(t)=0\}=1-e^{-\mu\Delta t}. \tag{7}$$

Обозначим: $P_i(t)=P(\eta(t)=i)$, $P_{i,j}(t_1, t_2)=P(\eta(t_1)=i, \ \eta(t_2)=j)$, $p = P(\eta(0)=1)$ — начальная вероятность. Чтобы выразить $K_{\tilde{\xi}}$ через K_ξ, осталось найти вероятность $P_{11}(t, t+\tau)$. Используя формулу полной вероятности и значения условных вероятностей (7), составляем уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial P_{11}(t, t+\tau)}{\partial\tau}=\mu P_{10}(t, t+\tau)-\lambda P_{11}(t, t+\tau). \tag{8}$$

При этом

$$P_{10}(t, t+\tau)=P_1(t)-P_{11}(t, t+\tau); \tag{9}$$

$$P_1(t)=\left(p-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}. \tag{10}$$

Решая уравнение, получаем

$$P_{11}(t, t+\tau)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\left(p-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)t}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\mu}e^{-(\lambda+\mu)\tau}\right). \tag{11}$$

При $t\to\infty$ вероятности $P_1(t)$ и $P_0(t)$ стремятся к своим стационарным значениям $P_1=\mu/(\lambda+\mu)$ и $P_0=\lambda/(\lambda+\mu)$ [3]. Так как процесс длится достаточно долго, считаем, что в некоторый момент времени вероятности пребывания в состояниях 0 и 1 совпали со стационарными, и получаем упрощенный вид формулы (11):

$$P_{11}(t, t+\tau)=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2\left(1+\frac{\lambda}{\mu}e^{-(\lambda+\mu)|\tau|}\right). \tag{12}$$

Следствие 1. Автокорреляционная функция стационарного марковского процесса η с двумя состояниями 0 и 1

$$K_\eta(\tau)=M(\eta(t)\eta(t+\tau))-(M\eta)^2=\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}e^{-(\lambda+\mu)|\tau|} \tag{13}$$

(так как $M\eta=\mu/(\lambda+\mu)$).

Следствие 2. Связь между корреляционными функциями импульсного процесса ξ и полученного в результате регистрации процесса $\tilde{\xi}$ выражается следующим равенством:

$$K_{\tilde{\xi}}(\tau)=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2\left(1+\frac{\lambda}{\mu}e^{-(\lambda+\mu)|\tau|}\right)K_\xi(\tau). \tag{14}$$

Очевидно, что при любом τ выполняются неравенства

$$\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 < \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \left(1+\frac{\lambda}{\mu}e^{-(\lambda+\mu)|\tau|}\right) \leqslant \frac{\mu}{\lambda+\mu}. \qquad (15)$$

Утверждение 1. Для того чтобы автокорреляционная функция импульсного процесса изменялась незначительно на участке $|\tau| \leqslant T$ в связи с потерями отдельных импульсов под воздействием помех, т. е. для произвольно выбранного небольшого $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство $K_\xi(\tau) - K_{\tilde{\xi}}(\tau) < \varepsilon$ при любом $\tau \in [-T, T]$, необходимо, чтобы

$$\lambda/(\lambda+\mu) < \varepsilon/K \leqslant \varepsilon/K_\xi(\tau), \qquad (16)$$

и достаточно, чтобы

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \leqslant 1 - \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{K}} \leqslant 1 - \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{K_\xi(\tau)}} \qquad (17)$$

для любого $\tau \in [-T, T]$ $\left(\text{здесь } K = \max\limits_{[-T,T]} K_\xi(\tau)\right)$. Условия (16) и (17) можно переписать в виде

$$\Phi\left(\frac{A-\beta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\alpha-A}{\sigma}\right) < \frac{\varepsilon}{K} \leqslant \frac{\varepsilon}{K_\xi(\tau)}; \qquad (16^*)$$

$$\Phi\left(\frac{A-\beta}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\alpha-A}{\sigma}\right) \leqslant 1 - \sqrt{1-\varepsilon/K} \leqslant 1 - \sqrt{1-\varepsilon/K_\xi(\tau)}. \qquad (17^*)$$

Утверждение 1 является следствием неравенства (15). Так как $\lambda/(\lambda+\mu)$ есть не что иное, как доля потерь, для которой получено равенство (6), то $\lambda/(\lambda+\mu) = \Phi(A-\beta)/\sigma + \Phi(\alpha-A)/\sigma$, откуда и следуют (16*) и (17*).

Пусть ξ, ν — импульсные процессы, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\nu}$ — процессы, найденные в результате регистрации процессов ξ, ν (т. е. с учетом исчезновения отдельных импульсов). Пусть $K_{\xi,\nu}(\tau), K_{\tilde{\xi},\tilde{\nu}}(\tau)$ — кросскорреляционные функции случайных процессов ξ и ν, $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\nu}$ соответственно и $M\xi = M\nu = 0$.

Утверждение 2. Имеет место неравенство

$$K_{\xi,\nu}(\tau) - K_{\tilde{\xi},\tilde{\nu}}(\tau) \leqslant K_{\xi+\nu}(\tau) - K_{\widetilde{\xi+\nu}}(\tau), \qquad (18)$$

где $\widetilde{\xi+\nu} = \tilde{\xi} + \tilde{\nu}$ — процесс, полученный при регистрации суммарного процесса $\xi+\nu$.

Для доказательства устанавливается связь между автокорреляционной функцией суммарного процесса и кросскорреляционными функциями суммируемых процессов

$$K_{\xi+\nu}(\tau) = M((\xi+\nu)(t)(\xi+\nu)(t+\tau)) =$$
$$= K_\xi(\tau) + K_\nu(\tau) + K_{\xi,\nu}(\tau) + K_{\xi,\nu}(-\tau)$$

и используется тот факт, что значения авто- и кросскорреляционных функций «просеянных» процессов не превосходят соответствующих значений для исходных процессов $(K_{\xi,\nu}(\tau) - K_{\tilde{\xi},\tilde{\nu}}(\tau) \geqslant 0;\ K_{\xi,\nu}(-\tau) - K_{\tilde{\xi},\tilde{\nu}}(-\tau) \geqslant \geqslant 0)$: $K_{\xi,\nu}(\tau) - K_{\tilde{\xi},\tilde{\nu}}(\tau) \leqslant (K_{\xi,\nu}(\tau) - K_{\tilde{\xi},\tilde{\nu}}(\tau)) + (K_{\xi,\nu}(-\tau) - K_{\tilde{\xi},\tilde{\nu}}(-\tau)) = (K_{\xi,\nu}(\tau) + K_{\xi,\nu}(-\tau)) - (K_{\tilde{\xi},\tilde{\nu}}(\tau) + K_{\tilde{\xi},\tilde{\nu}}(-\tau)) = (K_{\xi+\nu}(\tau) - K_\xi(\tau) - K_\nu(\tau)) - (K_{\widetilde{\xi+\nu}}(\tau) - K_{\tilde{\xi}}(\tau) - K_{\tilde{\nu}}(\tau)) \leqslant K_{\xi+\nu}(\tau) - K_{\widetilde{\xi+\nu}}(\tau)$, что и требовалось доказать.

Следствие. Для того чтобы кросскорреляционная функция импульсных процессов изменялась незначительно на участке $|\tau| \leqslant T$ вследствие потерь отдельных импульсов под воздействием помех, т. е. для произвольно выбранного небольшого $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство $K_{\xi,\nu}(\tau) - K_{\tilde{\xi},\tilde{\nu}}(\tau) < \varepsilon$ при $|\tau| \leqslant T$, достаточно, чтобы автокорреляционная функция суммарного импульсного процесса изменялась незначительно; если импульсы процессов ξ и ν имеют одинаковую амплитуду A, то достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\Phi\left(\frac{A-\beta}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\alpha-A}{\sigma}\right)\leqslant 1+\sqrt{1-\varepsilon/K_{\xi+\nu}(\tau)} \qquad (19)$$

при любом $\tau\in[-T, T]$.

В случае, когда амплитуда импульсов ξ не равна амплитуде импульсов ν, неравенство (19) выглядит следующим образом: доля потерь процесса $\xi+\nu$ не превосходит $1-\sqrt{1-\varepsilon/K_{\xi+\nu}(\tau)}$.

ВЫВОДЫ

В настоящей работе: 1) предложен способ оценки доли потерь в зависимости от параметров шума, амплитуды регистрируемых спайков и выбранных порогов (формула (6)); 2) найдено выражение зависимости автокорреляционной функции «искаженного» потерями процесса от автокорреляционной функции исходного импульсного процесса (формула (14)); 3) выведены необходимые и достаточные условия того, чтобы изменения автокорреляционной функции импульсного процесса не превосходили заданного значения (утверждение 1); 4) выведены достаточные условия того, чтобы изменения кросскорреляционных функций импульсных процессов не превосходили заданного значения (следствие из утверждения 2); 5) получено выражение автокорреляционной функции стационарного марковского процесса с двумя состояниями — 0 и 1 (формула (13)).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. М., Васильев А. В.** К вопросу о математическом описании импульсных потоков в нервных сетях // Функциональная структура анализаторов.— М.: МГУ, 1976.
2. **Беляев Ю. К.** О числе пересечений уровня гауссовским случайным процессом // Теория вероятностей и ее применение.— 1966.— Т. XI, № 1.
3. **Саати Т. Л.** Элементы теории массового обслуживания и ее приложения.— М.: Сов. радио, 1965.

Поступила в редакцию 26 февраля 1985 г.