

стекла) с матовым полупрозрачным слоем — экраном. В этом случае планшет устройства может служить как кодирующей поверхностью, так и просветным экраном для проекции изображения со стороны, противоположной пользователю. В силу того, что координатная матрица изготавливается из очень тонкого провода и имеет большой шаг укладки, она практически не оказывает заметного влияния на качество полуавтоматического кодирования проецируемого графического изображения, например рентгеновского снимка [10, 11]. Местоположение самих координатных шин фиксировано в плоскости планшета, и координаты их заранее известны. Поэтому в случае необходимости координаты самих координатных шин могут быть учтены программным способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. с. 517906 (СССР). Устройство для считывания графической информации/Э. Н. Леонович, В. Г. Хациревич.— Оpubл. в БИ, 1976, № 22.
2. Пат. 3819857 (США). Electromagnetic induction-type pattern input apparatus/S. Inokuchi.— Оpubл. 25.06.74.
3. А. с. 108484-А (СССР). Устройство для считывания графической информации/В. Г. Хациревич, А. К. Якушев.— Оpubл. в БИ, 1984, № 13.
4. А. с. 484536 (СССР). Способ считывания графической информации/Э. Н. Леонович, В. Г. Хациревич.— Оpubл. в БИ, 1975, № 34.
5. А. с. 729602 (СССР). Способ считывания графической информации/Э. Н. Леонович, Г. П. Апарин, В. Г. Хациревич.— Оpubл. в БИ, 1980, № 15.
6. А. с. 413504 (СССР). Съёмник координат для устройства графического ввода/Э. Н. Леонович, В. Г. Хациревич.— Оpubл. в БИ, 1974, № 4.
7. Леонович Э. Н., Хациревич В. Г. Индукционный съёмник координат полуавтоматического устройства считывания графической информации // Вычислительная техника в машиностроении: Науч.-техн. сб.— Минск: ИТК АН БССР, 1976, № 2.
8. Леонович Э. Н., Хациревич В. Г., Кулешов А. Я. Оценка возможностей одного способа считывания графической информации.— Там же, 1981, № 2.
9. Хомерики О. К. Применение гальваномагнитных датчиков в устройствах автоматизации и измерений.— М.: Энергия, 1971.
10. Пат. 2651689 (ФРГ). Einrichtung zur Eingabe der Position eines Antipppunktes in einen Rechner/A. Helbert, S. Dieter, Y. Zuhair.— Оpubл. 24.05.78.
11. Вайда Ф., Чакань А. МикроЭВМ.— М.: Энергия, 1970.

Поступила в редакцию 27 декабря 1984 г.

УДК 62.501

К. И. ЛИВШИЦ

(Томск)

ВЫДЕЛЕНИЕ ТРЕНДА СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА СПЛАЙНАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Введение. При выделении трендов нестационарных случайных процессов в условиях неполной априорной информации удобно строить модель тренда в виде сплайн-функции [1] с последующей оценкой параметров сплайна по измерениям. Такая обработка имеет ряд преимуществ перед классическим регрессионным анализом, так как позволяет строить модели с меньшим числом одновременно оцениваемых параметров, а получающиеся алгоритмы дают возможность сравнительно просто организовать обработку информации в реальном масштабе времени по мере поступления исходных данных. В работе рассматривается задача аппроксимации тренда сплайном первого порядка и оценки параметров сплайна методом наименьших квадратов и его модификациями: скользящим методом наименьших квадратов; методом наименьших квадратов с объединением в группы.

1. Оценка параметров сплайна методом наименьших квадратов. Будем предполагать, что наблюдаемый процесс

$$z_i = f(t) + n_i,$$

где $f(t)$ — непрерывная кусочно-линейная функция, принимающая в узлах t_0, t_1, t_2, \dots значения y_0, y_1, y_2, \dots . Далее будем предполагать, что узлы являются равноотстоящими ($t_k - t_{k-1} = T$) и измерения проводятся в равноотстоящих точках. Тогда, если между узлами имеем ровно m отсчетов, то на k -м отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ измерение

$$z_{ik} = \frac{iy_k + (m-i)y_{k-1}}{m} + n_{ik}, \quad i = \overline{0, m}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Будем считать также, что n_{ik} — независимые случайные величины с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

При принятой модели задача оценки тренда $f(t)$ процесса z_i сводится к оценке параметров сплайна $y_0, y_1, \dots, y_k, \dots$ по наблюдениям z_{ik} . Применим для построения оценок параметров $\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_k, \dots$ метод наименьших квадратов [2].

Пусть произведено k групп наблюдений. Тогда оценки параметров должны определяться из условия

$$\sum_{p=1}^k \sum_{i=0}^m \left[z_{ip} - \frac{i\hat{y}_p + (m-i)\hat{y}_{p-1}}{m} \right]^2 = \min. \quad (2)$$

Непосредственно дифференцируя, получим систему нормальных уравнений

$$\begin{aligned} a\hat{y}_0 + b\hat{y}_1 &= f_1; \\ b\hat{y}_{p-1} + 2a\hat{y}_p + b\hat{y}_{p+1} &= g_p + f_{p+1}, \quad p = \overline{1, k-1}; \\ b\hat{y}_{k-1} + a\hat{y}_k &= g_k, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$a = \frac{1}{m^2} \sum_{i=0}^m i^2; \quad b = \frac{1}{m^2} \sum_{i=0}^m i(m-i); \quad (4)$$

$$f_p = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m (m-i)z_{ip}, \quad g_p = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m iz_{ip}. \quad (5)$$

решая которую, найдем оценки искомых параметров.

При оценке параметров в реальном масштабе времени при обработке очередной $(k+1)$ -й группы наблюдений, кроме оценки очередного коэффициента \hat{y}_{k+1} , должны пересчитываться и все уже ранее оцененные коэффициенты $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k$. Поэтому удобно перейти к рекуррентному алгоритму оценки параметров. Специфика задачи в данном случае состоит в том, что алгоритм должен быть одновременно рекуррентным и по числу параметров, и по числу групп измерений. Обозначим через $\hat{y}_i(k)$ оценки, получаемые на k -м этапе, а через $\hat{y}_i(k+1)$ — на $(k+1)$ -м этапе. Рассматривая системы уравнений (3) для k -го и $(k+1)$ -го этапов, получаем, что рекуррентная процедура будет определяться следующей системой уравнений:

$$\hat{y}_i(k+1) = \hat{y}_i(k) + bd_i(k)[\hat{y}_k(k) - \hat{y}_k(k+1)], \quad i = \overline{0, k-1}; \quad (6)$$

$$\hat{y}_k(k+1) = \hat{y}_k(k) + A_{11}[f_{k+1} - a\hat{y}_k(k)] + A_{12}[g_{k+1} - b\hat{y}_k(k)]; \quad (7)$$

$$\hat{y}_{k+1}(k+1) = A_{12}[f_{k+1} - a\hat{y}_k(k)] + A_{22}[g_{k+1} - b\hat{y}_k(k)], \quad (8)$$

где

$$A_{11} = \frac{a\Delta_k}{a\Delta_{k+1} - b^2\Delta_k}, \quad A_{22} = \frac{\Delta_{k+1}}{a\Delta_{k+1} - b^2\Delta_k}, \quad A_{12} = \frac{-b\Delta_k}{a\Delta_{k+1} - b^2\Delta_k}; \quad (9)$$

$$d_i(k) = (-1)^{i+k-1} b^{k-i-1} \Delta_i / \Delta_k, \quad i = \overline{0, k-1}; \quad (10)$$

$$\Delta_k = 2a\Delta_{k-1} - b^2\Delta_{k-2}; \quad \Delta_0 = 1; \quad \Delta_1 = a. \quad (11)$$

Рассмотрим статистические характеристики оценок параметров. Так как принятая модель линейная по параметрам y_k и обработка производится методом наименьших квадратов, то построенные оценки являются несмещенными и имеют минимальную дисперсию в классе линейных несмещенных оценок [2]. При этом ковариационная матрица оценок $\hat{y}_i(k)$ на k -м шаге

$$V_k = \sigma^2 \begin{bmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & 2a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & 2a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{bmatrix}^{-1}. \quad (12)$$

Дисперсии отдельных элементов будут определяться диагональными элементами этой матрицы. Можно показать, что текущая дисперсия оценки $\hat{y}_i(k-1)$, вычисленная на $(k-1)$ -м шаге, будет равна

$$\sigma_{i-1}^2 = \frac{(\alpha^{i-1} + \beta^{i-1})(\alpha^{k-i} + \beta^{k-i})}{(\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})} \sigma^2, \quad i = \overline{1, k}, \quad (13)$$

где

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \beta = a - \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (14)$$

Общая дисперсия оценок параметров сплайна на $(k-1)$ -м шаге

$$\text{Sp}V_{k-1} = \left[k \frac{\alpha^{k-1} + \beta^{k-1}}{(\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})} + 2 \frac{\alpha^k - \beta^k}{(\alpha - \beta)^2(\alpha^{k-1} - \beta^{k-1})} \right] \sigma^2. \quad (15)$$

Для сравнения рассмотрим случай, когда на каждом участке коэффициенты соответствующей прямой оцениваются без учета сшивания с другими участками, т. е. на k -м участке y_{k-1} и y_k определяются из условия

$$\sum_{i=0}^m \left[z_{ik} - \frac{i \hat{y}_k + (m-i) \hat{y}_{k-1}}{m} \right]^2 = \min.$$

Несложно показать, что при этом также получаются несмещенные оценки параметров и суммарная дисперсия \hat{y}_{k-1} и \hat{y}_k

$$\sigma^2 (\hat{y}_{k-1}) + \sigma^2 (\hat{y}_k) = 2a\sigma^2 / (a^2 - b^2),$$

а суммарная дисперсия оценок за k шагов

$$\epsilon_k^2 = k\sigma^2 [(4(\alpha + \beta))/(\alpha - \beta)^2].$$

Рассмотрим поведение отношения $\text{Sp}V_k/\epsilon_k^2$ при $k \rightarrow \infty$. Учитывая, что $\beta < \alpha$ и при $k \rightarrow \infty$ $(\beta/\alpha)^k \rightarrow 0$, получим

$$\text{Sp}V_k/\epsilon_k^2 \rightarrow (\alpha - \beta)/4(\alpha + \beta)^2,$$

что с учетом соотношений (4) дает при $k \rightarrow \infty$

$$\frac{\text{Sp}V_k}{\epsilon_k^2} = \frac{1}{4} \sqrt{1 - \frac{(m-1)^2}{(2m+1)^2}}. \quad (16)$$

Таким образом, учет предыстории наблюдаемого процесса позволяет значительно улучшить точность оценки параметров.

Вернемся к соотношениям, определяющим рекуррентный алгоритм оценки параметров сплайна. Из соотношений (6)–(10) следует, что изменение оценок $\hat{y}_i(k)$ при появлении новых групп измерений определяется величинами $d_i(k)$, явные выражения для которых имеют вид

$$d_i(k) = (-1)^{i+k-1} (\alpha\beta)^{(k-1-i)/2} (\alpha^i + \beta^i) / (\alpha^k + \beta^k). \quad (17)$$

Учитывая, что $\beta < \alpha$, получаем, что с ростом k при i , растущих медленнее, чем k , коэффициенты $d_i(k)$ стремятся к нулю. Таким образом, по

метра y_k будем определять из условия (для некоторого целого $q \geq 1$)

$$\sum_{j=k}^{k+q-1} \sum_{i=0}^m \left[z_{ij} - \frac{i \hat{y}_j + (m-i) \hat{y}_{j-1}}{m} \right]^2 = \min. \quad (18)$$

Таким образом, при обработке группы наблюдений с номером $k+q-1$ получается окончательное значение для оценки \hat{y}_k и вычисляются текущие значения для оценок $\hat{y}_{k+1}, \dots, \hat{y}_{k+q-1}$. Всякая оценка y_k строится по q группам измерений. С помощью (18) можно получить оценки всех параметров сплайна, кроме \hat{y}_0 . Величину q можно было бы определить как память алгоритма.

Минимизируя (18), получаем систему нормальных уравнений для оценок $\hat{y}_k, \dots, \hat{y}_{k+q-1}$:

$$\begin{aligned} b\hat{y}_{p-1} + 2a\hat{y}_p + b\hat{y}_{p+1} &= g_p + f_{p+1}, \quad p = \overline{k, k+q-2}; \\ b\hat{y}_{k+q-2} + a\hat{y}_{k+q-1} &= g_{k+q-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

где a, b, f_i, g_i определяются соотношениями (4) и (5). В системе уравнений (19) величина y_{k-1} известна из предыдущей итерации. Будем в дальнейшем интересоваться только оценкой \hat{y}_k . Матрица системы уравнений (19) имеет вид

$$A_q = \begin{bmatrix} -2a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & 2a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & 2a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Пусть $D = [d_{ij}]$ — матрица, обратная к A_q . Решая систему (19), для оценки \hat{y}_k получаем уравнение

$$\hat{y}_k = -d_{11} b \hat{y}_{k-1} + z_k, \quad (21)$$

где

$$z_k = \sum_{j=1}^q d_{1j} (g_{k-1+j} + f_{k+j}) \quad (22)$$

и $f_{k+q} = 0$. Уравнение (21) — разностное неоднородное уравнение первого порядка, решение которого имеет вид [3]

$$\hat{y}_k = \lambda^k \hat{y}_0 + \lambda^k \sum_{j=1}^k \lambda^{-j} z_j, \quad (23)$$

где

$$\lambda = -bd_{11}. \quad (24)$$

Из уравнения (23) следует, что устойчивость решения к неизвестному начальному значению \hat{y}_0 определяется значением λ . При $|\lambda| < 1$ первый член в (23) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, при $|\lambda| \geq 1$ решение неустойчиво. Учитывая, что d_{11} — это элемент матрицы D , обратной к A_q , можно показать:

$$|\lambda| = b[(\alpha^{q-1} + \beta^{q-1})/(\alpha^q + \beta^q)] < b/a < 1, \quad (25)$$

здесь α и β определяются соотношениями (14), и, следовательно, алгоритм устойчив.

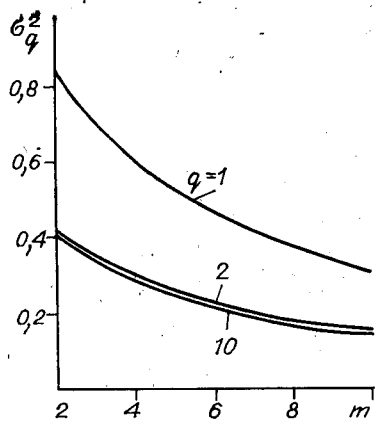


Рис. 1

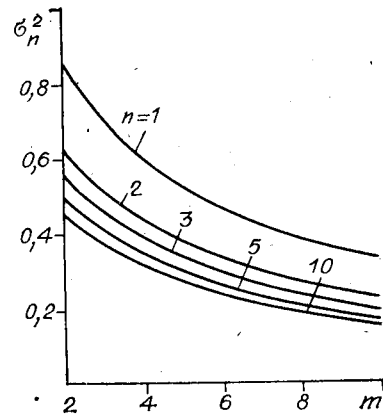


Рис. 2

Теорема 1. При $k \rightarrow \infty$ оценки \hat{y}_k параметров y_k являются асимптотически несмещенными и имеют для данного q дисперсии

$$\sigma_q^2(\hat{y}_k) = \sigma^2 d_{11}(q) \frac{1}{1 - \lambda^{2q}} \quad (26)$$

где $d_{11}(q) = (\alpha^{q-1} + \beta^{q-1}) / (\alpha^q + \beta^q)$ и λ определяются соотношением (24).

Доказательство теоремы 1 дано в приложении. Зависимость σ_q^2 от q и m приведена на рис. 1. Как видно из графиков, увеличение q с 1 до 2 уменьшает дисперсию оценки более чем в 2 раза, а дальнейшее увеличение q с 2 до 10 практически не дает никакого выигрыша. Это объясняется, по-видимому, тем, что значения ординат y_k в узлах сплайна t_k влияют на всю функцию значительно лишь на двух соседних участках и слабо влияют на сплайн-функцию на всех остальных участках.

3. Объединение в группы. Разобьем оцениваемые коэффициенты сплайна y_i на группы по n коэффициентов каждая и оценки коэффициентов $y_{kn+1}, \dots, y_{kn+n}$, принадлежащие $(k+1)$ -й группе, будем определять из условия

$$\sum_{r=kn+1}^{kn+n} \sum_{i=0}^m \left[z_{ir} - \frac{i\hat{y}_r + (m-i)\hat{y}_{r-1}}{m} \right]^2 = \min, \quad (27)$$

причем \hat{y}_{kn} известно из оценивания коэффициентов предыдущей k -й группы. Минимизируя (27), получаем систему нормальных уравнений n -го порядка

$$\begin{aligned} b\hat{y}_{p-1} + 2a\hat{y}_p + b\hat{y}_{p+1} &= g_p + f_{p+1}, \quad p = \overline{kn+1, kn+n-1}; \\ b\hat{y}_{(k+1)n-1} + a\hat{y}_{kn+n} &= g_{(k+1)n}. \end{aligned} \quad (28)$$

Введем следующие матрицы:

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= \begin{bmatrix} y_{kn+1} \\ y_{kn+2} \\ \dots \\ y_{kn+n} \end{bmatrix}, \quad \hat{Y}_{k+1} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{kn+1} \\ \hat{y}_{kn+2} \\ \dots \\ \hat{y}_{kn+n} \end{bmatrix}, \quad S_{k+1} = \begin{bmatrix} g_{kn+1} + f_{kn+2} \\ \dots \\ g_{(k+1)n-1} + f_{(k+1)n} \\ g_{(k+1)n} \end{bmatrix}, \\ A_n &= \begin{bmatrix} 2a & b & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & 2a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & 2a & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a \end{bmatrix}, \quad C = -b \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & d_{11} \\ 0 & \dots & 0 & d_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & d_{n-1,1} \\ 0 & \dots & 0 & d_{n1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $D = [d_{ij}]$ — матрица, обратная матрице A_n . Тогда система (28), раз-

решенная относительно \widehat{Y}_{k+1} , имеет вид

$$\widehat{Y}_{k+1} = C\widehat{Y}_k + DS_{k+1}. \quad (29)$$

Уравнение (29) — разностное матричное уравнение первого порядка, решение которого принимает вид [3]

$$\widehat{Y}_k = C^k \widehat{Y}_0 + \sum_{p=1}^k C^{k-p} DS_p.$$

Снова решение зависит от неизвестного вектора начальных оценок, устойчивость к возмущениям которого определяется поведением матрицы C . Так как

$$C^k = (-bd_{n1})^{k-1} C,$$

то устойчивость к изменению начальных условий будет определяться поведением величины bd_{n1} . Нетрудно показать, что

$$|bd_{n1}| = \frac{2b^n}{\alpha^n + \beta^n} < \left[\frac{b}{a} \right]^n < \frac{1}{2^n}.$$

Таким образом, алгоритм является устойчивым, причем влияние начальных условий сказывается тем меньше, чем больше величина группы.

Теорема 2. При $k \rightarrow \infty$ оценки \widehat{Y}_k асимптотически несмещенные с ковариационной матрицей

$$V = D + \frac{1}{1 - (bd_{n1})^2} CDC^T.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Несложный расчет показывает, что

$$\text{Sp } V = \frac{n(\alpha - \beta)(\alpha^n + \beta^n) + (\alpha + \beta)(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha - \beta)^2(\alpha^n - \beta^n)} \sigma^2, \quad (30)$$

где α и β снова определяются соотношениями (4) и (14). Зависимость средней дисперсии на одну оценку $\sigma_n^2 = \text{Sp } V/n\sigma^2$ для разных n и m приведена на рис. 2. Видно, что объединение в группы дает определенный выигрыш перед алгоритмом без объединения ($n=1$). При этом величина группы должна быть не слишком большой, так как случай $n=10$, например, практически не лучше случая $n=5$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. 1. Покажем, что оценки \widehat{y}_k являются асимптотически несмещенными. Усредняя соотношение (23), имеем

$$M\{\widehat{y}_k\} = M\{\widehat{y}_0\} \lambda^k + \lambda^k \sum_{j=1}^k \lambda^{-j} M\{z_j\}. \quad (\text{П1})$$

Далее из (4), (5), (23)

$$M\{z_p\} = \sum_{j=1}^{q-1} d_{1j} (by_{p-2+j} + 2ay_{p-1+j} + by_{p+j}) + d_{1q} (ay_{p-1+q} + by_{p-2+q}).$$

Величины d_{1j} — это элементы первой строки матрицы D , обратной к матрице A_q (20). Из условия $DA_q = I$ получаем соотношения

$$\begin{aligned} 2ad_{11} + bd_{12} &= 1; \\ bd_{1,j-1} + 2ad_{1j} + bd_{1,j+1} &= 0, \quad j = 2, q-1; \\ bd_{1,q-1} + ad_{1q} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

откуда

$$M\{z_p\} = y_p + d_{11} b y_{p-1} = y_p - \lambda y_{p-1},$$

что вместе с (П1)

$$M\{\widehat{y}_k\} = y_k + \lambda^k (M\{\widehat{y}_0\} - y_0).$$

Таким образом, при $k \rightarrow \infty$ оценки \widehat{y}_k асимптотически несмещенные, причем смещение убывает тем быстрее, чем меньше λ .

2. Определим дисперсии оценок параметров сплайна. Обозначим

$$U_p = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m i n_{i,p}; \quad V_p = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m (m-i) n_{i,p}. \quad (\text{П3})$$

Тогда

$$z_p - \bar{z}_p = \sum_{j=1}^q d_{1j} U_{p-1+j} + \sum_{j=1}^q d_{1j} V_{p+j} \quad (\text{П4})$$

и при значениях $k \gg 1$, при которых можно пренебречь смещением $M\{\widehat{y}_k\} = y_k$,

$$\widehat{y}_k - y_k = \lambda^k \sum_{p=1}^k \lambda^{-p} \left[\sum_{j=1}^q d_{1j} U_{p-1+j} + \sum_{j=1}^{q-1} d_{1j} V_{p+j} \right]. \quad (\text{П5})$$

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по q . При $q = 1$ имеем

$$\widehat{y}_k - y_k = d_{11} \sum_{p=1}^k \lambda^{(k-p)} U_p,$$

где $d_{11} = 1/a$ и U_p — независимые величины с нулевым средним и $\overline{U_p^2} = a\sigma^2$. Поэтому

$$M\{(\widehat{y}_k - y_k)^2\} = \sigma^2 d_{11}^2 \sum_{p=0}^{k-1} \lambda^{2p}.$$

При $k \rightarrow \infty$ $\sum_{p=0}^{k-1} \lambda^{2p} = 1/(1 - \lambda^2)$ и дисперсия оценки не зависит от k .

Поэтому

$$\sigma_1^2(\widehat{y}_k) = \sigma^2 d_{11}^2 / (1 - \lambda^2)$$

и дисперсия определяется отношением (26).

Переобозначим теперь $d_{1j} = d_j(q)$ ($j = 1, q$) и введем

$$\varphi(q) = \sum_{p=1}^k \lambda^{-p} \left[\sum_{j=1}^q d_j(q) U_{p-1+j} + \sum_{j=1}^{q-1} d_j(q) V_{p+j} \right].$$

Пусть $\Delta_q = \det A_q$. Вычисляя элементы обратной матрицы D к матрице A_q , получим

$$d_i(q) = (-1)^{i+1} b^{i-1} \Delta_{q-i} / \Delta_q, \quad i = \overline{1, q},$$

и

$$d_i(q+1) = (-1)^{i+1} b^{i-1} \Delta_{q+1-i} / \Delta_{q+1}, \quad i = \overline{1, q+1},$$

откуда

$$d_i(q+1) = C(q) d_{i-1}(q), \quad i = \overline{2, q+1},$$

где

$$C(q) = -b \Delta_q / \Delta_{q+1} \quad (\text{П6})$$

не зависит от i , а определитель Δ_q удовлетворяет рекуррентному соотношению $\Delta_q = 2a \Delta_{q-1} - b^2 \Delta_{q-2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(q+1) &= d_1(q+1) \sum_{p=1}^k \lambda^{-p} [U_p + V_{p+1}] + \\ &+ C(q) \sum_{p=1}^k \lambda^{-p} \left[\sum_{i=1}^q d_i(q) U_{p+i} + \sum_{i=1}^{q-1} d_i(q) V_{p+i+1} \right]. \end{aligned}$$

Второй член, входящий $\varphi(q+1)$, отличается от $\varphi(q)$ лишь тем, что входящие в него величины U_{p+i} , V_{p+i+1} сдвинуты по сравнению с U_{p+i-1} и V_{p+i} на единицу в индексе. Но статистические характеристики таких величин от сдвига не зависят в силу стационарности этих процессов. Поэтому, имея в виду статистические характеристики, можно записать, что

$$\varphi(q+1) = G(q)\varphi(q) + d_1(q+1) \sum_{p=1}^k \lambda^{-p} [U_p + V_{p+1}]. \quad (\text{П7})$$

Возводя (П7) в квадрат и усредняя, получим

$$\overline{\varphi(q+1)^2} = C(q)^2 \overline{\varphi(q)^2} + 2d_1(q+1)^2 [a - b^2 d_1(q)] \sum_{p=1}^k \lambda^{-2p}.$$

Поэтому для значения параметра $q+1$ имеем с учетом (П6)

$$\sigma_{q+1}^2(\hat{y}_k) = d_1(q+1)^2 [2a - b^2 d_1(q)] \sum_{p=0}^{k-1} \lambda^{2p}.$$

Наконец,

$$d_1(q+1)^2 [2a - b^2 d_1(q)] = \frac{\Delta_q^2}{\Delta_{q+1}^2} \left[2a - b^2 \frac{\Delta_{q-1}}{\Delta_q} \right] = d_1(q+1)$$

и

$$\sigma_{q+1}^2(\hat{y}_k) = d_1(q+1) \sum_{p=0}^{k-1} \lambda^{2p}. \quad (\text{П8})$$

При $k \rightarrow \infty$ из (П8) окончательно получаем (26). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения.— М.: Наука, 1984.
2. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ.— М.: Мир, 1980.
3. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей.— М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 12 апреля 1985 г.

УДК 621.317.3 : 550.837.81.08

В. А. МАРИНЕНКО, М. А. МАРИНЕНКО, П. И. ТИШИН

(Алма-Ата)

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ГЕОЭЛЕКТРОРАЗВЕДОЧНЫХ СИГНАЛОВ

Возрастающие требования к точности и помехоустойчивости геоэлектроразведочной аппаратуры заставляют искать новые, более эффективные алгоритмы обработки измеряемых сигналов. В то же время развитие микропроцессорной техники позволяет реализовать в полевых переносных приборах достаточно сложные функции.