В обоих случаях возможность получения второго импульсного отклика достигнута за счет перераспределения степеней свободы кодирования, т. е. за счет уменьшения вдвое дифракционной эффективности фильтра с единственным импульсным откликом.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lee W. H.** Sampled Fourier-transform hologram generated by computer // Appl. Opt.— 1970.— V. 9, N 3.— P. 639.
2. **Burckhardt C. B.** Simplification of Lee's method of generating holograms by computer // Appl. Opt.— 1970.— V. 9, N 8.— P. 1949.

Поступило в редакцию 4 апреля 1983 г.

УДК 621.391.883

В. Б. КИТАЕВ, Е. И. СЕРГЕЕВ, И. Р. ШАЙНЯК

(Горький)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА СИНХРОННОГО НАКОПЛЕНИЯ

Выделение периодического сигнала известного периода из его аддитивной смеси с шумом методом синхронного накопления давно и с успехом используется в разных отраслях техники [1]. Статистические характеристики получаемых оценок хорошо исследованы, однако вопрос оптимальности самого алгоритма в литературе практически не рассматривался. Настоящая работа посвящена сравнению оценок синхронного накопления с оценками максимального правдоподобия (ОМП) при разных априорных сведениях о сигнале.

Рассмотрим аддитивную смесь $x(t) = S(t) + \eta(t)$ на интервале времени $(-T, T)$; $S(t)$ — периодический сигнал с периодом $T_0 = T/N$; $\eta(t)$ — случайный стационарный процесс с нулевым средним. Известно, что оценка синхронного накопления — это распространение на непрерывные процессы оценки среднего арифметического:

$$\widehat{S}_{\text{СН}}(t) = \frac{1}{2N} \sum_{l=-N}^{N} x(t + lT_0) \qquad (1)$$

(здесь и далее рассматриваются оценки на интервале времени $[0, T_0]$). Вопрос устойчивости оценок (1) определяется их близостью к оценкам, оптимальным в некотором смысле, например ОМП.

ОМП $\widehat{S}_{\text{МП}}(t)$ обеспечивает максимум функционала отношения правдоподобия $L\{x(t)\}$ [2], т. е. нахождение ее является вариационной задачей. Поскольку ОМП ищется на классе периодических функций, задача решается прямым методом Ритца, базисные функции — гармонические функции разложения в ряд Фурье:

$$\widehat{S}_{\text{МП}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{c}_k e^{ik\omega_0 t}, \qquad (2)$$

где

$$\widehat{c}_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \widehat{S}_{\text{МП}}(t)\, e^{ik\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = 2\pi/T_0.$$

Коэффициенты $\widehat{c}_k$ находятся из условия $\frac{\partial}{\partial c_k} L\{x(t)\} = 0$.

Чтобы записать $L\{x(t)\}$, необходимо знание закона распределения шумовой компоненты $\eta(t)$. В большинстве практических задач можно использовать тот факт (являющийся прямым следствием центральной предельной теоремы), что случайный процесс нормализуется при прохождении через линейную систему интегрирующего типа [3] *. Однако при этом возрастает время корреляции $\tau_{\text{кор}}$ процесса $\eta(t)$, и пренебрегать коррелированностью шума нельзя.

---

* В ряде работ (например, [4]) утверждается, будто выполнение условий центральной предельной теоремы еще не обеспечивает робастность оценок среднего арифметического. Суть, однако, в том, что при выполнении этих условий распределение становится близким к нормальному не только в смысле близости кривых распределений, но и вследствие стремления к нулю высших кумулянтов [5], что и обеспечивает устойчивость оценок среднего арифметического.

Для нормального стационарного шума $\eta(t)$ с функцией корреляции $B(t-u)$ известно выражение логарифма функционала отношения правдоподобия [2]

$$\ln L\{x(t)\} = \int_{-T}^{T} V(t)\left[x(t) - \frac{1}{2}S(t)\right]dt,$$

где $V(t)$ — решение неоднородного линейного интегрального уравнения Винера — Хопфа:

$$\int_{-T}^{T} B(t-u)\,V(u)\,du = S(t),\ |t| \leqslant T. \tag{3}$$

Система уравнений максимального правдоподобия для оценок коэффициентов Фурье имеет вид

$$\int_{-T}^{T} \frac{\partial}{\partial \widehat{c}_k} V(t, \widehat{\mathbf{c}})\,[x(t) - \widehat{S}(t, \widehat{\mathbf{c}})]\,dt = 0.$$

Пусть $\eta(t)$ — белый шум с корреляционной функцией $B(t-u) = N_0\,\delta(t-u)$. В этом случае из уравнения (3) следует очевидное решение:

$$V(t, \mathbf{c}) = \frac{1}{N_0}S(t, \mathbf{c}) = \frac{1}{N_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t},$$

а ОМП (2) будут равны

$$\widehat{c}_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,e^{-ik\omega_0};$$

$$\widehat{S}_{\text{МП}}(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\tau)\,e^{ik\omega_0(t-\tau)}d\tau.$$

Учитывая, что стоящая под интегралом сумма является разложением в ряд Фурье последовательности δ-функций с множителем T_0, получим совпадение ОМП с оценкой (1).

На практике широко распространены случайные марковские процессы $\eta(t)$ с корреляционной функцией $B(t-u) = \sigma^2\exp(-\alpha|t-u|)$, $\alpha = 1/\tau_{\text{кор}}$. Найдем ОМП $S(t)$ для шума данного типа. Будем полагать $S(t)$ дважды дифференцируемой на интервале $(0, T_0)$ функцией. Решение уравнения (3) запишется следующим образом [6, 7]:

$$V(t) = \frac{\alpha}{2\sigma^2}\left[S(t) - \frac{S''(t)}{\alpha}\right] + \frac{1}{\sigma^2}\left[S(-T) - \frac{1}{\alpha}S'(-T)\right]\delta(t+T) + \\ + \frac{1}{\sigma^2}\left[S(T) + \frac{1}{\alpha}S'(T)\right]\delta(t-T). \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение максимального правдоподобия и учитывая тождества

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1+ik\omega_0/\alpha}{1+k^2\omega_0^2/\alpha^2}\,e^{ik\omega_0 t} = \frac{\alpha T_0}{2\,\mathrm{sh}\,(\alpha T_0/2)}\,e^{\alpha(t-T_0/2)},\quad 0 \leqslant t \leqslant T_0;$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1-ik\omega_0/\alpha}{1+k^2\omega_0^2/\alpha^2}\,e^{ik\omega_0 t} = \frac{\alpha T_0}{2\,\mathrm{sh}\,(\alpha T_0/2)}\,e^{-\alpha(t-T_0/2)},\quad 0 \leqslant t \leqslant T_0,$$

получим окончательное выражение для ОМП полезного сигнала

$$\widehat{S}_{\text{МП}}(t) = \frac{1}{2N}\sum_{l=-N}^{N} x(t+lT_0) + \frac{1}{4N}[x(-T) - \widehat{S}_{\text{МП}}(T_0)]\,\frac{e^{\alpha(t-T_0/2)}}{\mathrm{sh}\,(\alpha T_0/2)} + \\ + \frac{1}{4N}[x(T) - \widehat{S}_{\text{МП}}(T_0)]\,\frac{e^{-\alpha(t-T_0/2)}}{\mathrm{sh}\,(\alpha T_0/2)},\quad 0 \leqslant t \leqslant T_0;$$

$$\widehat{S}_{\text{МП}}(T_0) = \left[1 + \frac{1}{2N}\frac{\mathrm{ch}\,(\alpha T_0/2)}{\mathrm{sh}\,(\alpha T_0/2)}\right]^{-1}\left\{\frac{1}{2N}\sum_{l=-N}^{N} x(lT_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4N}\left[1 + \frac{\mathrm{ch}\,(\alpha T_0/2)}{\mathrm{sh}\,(\alpha T_0/2)}\right][x(-T) + x(T)]\right\}. \tag{5}$$

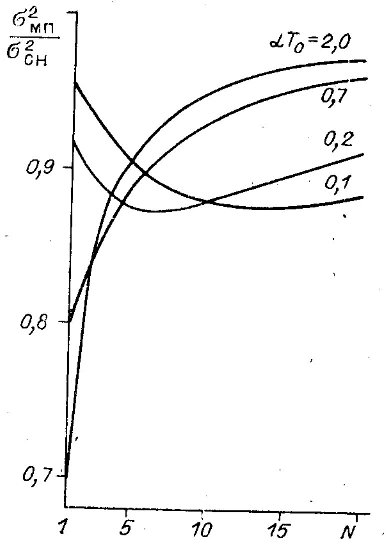

Рис. 1. Зависимость отношения дисперсии ОМП к дисперсии оценки синхронного накопления $\sigma^2_{МП}/\sigma^2_{СН}$ от числа циклов накопления

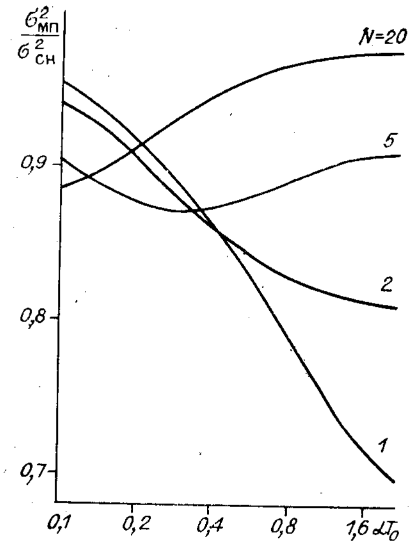

Рис. 2. Зависимость отношения дисперсии ОМП к дисперсии оценки синхронного накопления $\sigma^2_{МП}/\sigma^2_{СН}$ от времени корреляции аддитивного шума

Из (5) видно, что оценка синхронного накопления является составной частью ОМП, которая стремится к оценке синхронного накопления при $\tau_{кор} \to 0$ и $\tau_{кор} \to \infty$. Нетрудно показать, что ОМП будет несмещенной, ее дисперсия в работе не приводится вследствие громоздкости выражения. Графики зависимостей отношения дисперсии ОМП к дисперсии оценки синхронного накопления от N и αT_0 приведены на рис. 1, 2. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что при любых $\tau_{кор}$ метод синхронного накопления дает оценку, практически совпадающую с ОМП уже при $N \geqslant 3$.

Оценки $\widehat{S}_{МП}(t)$ получены в предположении отсутствия дополнительной информации о периодическом сигнале. Если же такая информация существует, ее необходимо использовать для получения ОМП. Так, при условии ограниченности по ширине спектра периодического сигнала суммирование в формуле (2) следует осуществлять в конечных пределах. Фильтр, практически реализующий оценку синхронного накопления при наличии априорной информации о выделяемом сигнале, описан в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Макс Ж.** Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях.— М.: Мир, 1983, т. 1.
2. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники.— М.: Сов. радио, 1975, т. 2.
3. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника.— М.: Радио и связь, 1982.
4. **Цыпкин Я. З., Поляк Б. Т.** Огрубленный метод максимального правдоподобия // Динамика систем. Математические методы теории колебаний: Межвуз. сб. Вып. 12.— Горький: ГГУ, 1977.
5. **Малахов А. Н.** Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований.— М.: Сов. радио, 1978.
6. **Давенпорт В. Б., Рут В. Л.** Введение в теорию случайных сигналов и шумов.— М.: ИЛ, 1960.
7. **Амиантов И. Н.** Избранные вопросы статистической теории связи.— М.: Сов. радио, 1971.
8. **Китаев В. Б., Мальцев А. А., Сергеев Е. И.** Временной метод выделения периодического сигнала в задачах виброакустической диагностики // Дефектоскопия.— 1980.— № 4.

Поступило в редакцию 4 февраля 1985 г.