УДК 616.07

И. Н. ТРОИЦКИЙ

(Москва)

О СРАВНЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ РАСПОЗНАВАНИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ОБРАЗОВ В ПРОСТРАНСТВЕ РАДОНА

В работе современного томографа можно выделить три основных этапа: на первом — регистрируются различные проекции анализируемого объекта, которые в совокупности составляют его образ в пространстве Радона, на втором — восстанавливается изображение из полученного радоновского образа, на третьем — анализируется томографическое изображение с целью принятия по нему каких-то решений. Таким образом, если на первом этапе получается вся исходная информация, то второй и третий этапы фактически относятся к процессу обработки полученной на первом этапе информации.

На практике всегда регистрация проекций сопровождается появлением шумов. Поэтому для поиска оптимальных операций по обработке этой информации необходимо привлекать методы теории статистических решений. Так как, согласно общим положениям этой теории, никакая обработка первичных данных не может увеличить содержащуюся в них информацию, то естественно при поиске оптимальных решений ориентироваться непосредственно на радоновские образы.

Однако при изучении сложных объектов всегда осуществляется восстановление изображения и анализируется именно томографическое изображение, а не образ в пространстве Радона. Обусловливается это тем, что для решения данной задачи обычно привлекается человек, обладающий определенными профессиональными знаниями, которые были получены им в результате изучения соответствующих эталонных изображений. Ярким примером подобной ситуации является проведение медицинской диагностики по томографическим изображениям головного мозга. Хотя образ в пространстве Радона имеет ту же размерность, что и восстанавливаемое изображение, и форма представления в нем информации, так же как и в изображении, носит «графический» характер, однако этот образ непривычен для человека. В результате его анализ по сравнению с анализом изображения оказывается для оператора несоизмеримо более сложной задачей. Поэтому в современном томографе как один из главных этапов и присутствует процесс восстановления изображения.

В то же время в ряде практически важных ситуаций задачи, которые ставятся в процессе анализа томографической информации, оказываются такими, которые могут быть успешно решены современными вычислительными средствами без привлечения человека-оператора, например: многие задачи неразрушающего контроля, задачи статистического анализа внутренней структуры плазменных образований, задачи повторной медицинской диагностики, когда требуется установить сам факт наличия изменений в новом томографическом снимке по сравнению со старым, и другие. Тогда естественно поставить вопрос: следует ли в этих условиях восстанавливать изображения или же целесообразнее осуществить требуемый анализ по исходному радоновскому образу?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо, во-первых, сравнить эффективность принятия тех или иных решений (с одной стороны, по образу в пространстве Радона, а с другой — по восстановленному из него изображению) и, во-вторых, оценить для обоих случаев требуемые затраты вычислительных средств. Результаты исследований, излагаемые в настоящей работе, относятся только к первой части поставленного вопроса и ограничиваются решением одной конкретной задачи —

сравнением вероятностей распознавания для упрощенного корреляционного алгоритма и для случая двуальтернативной гипотезы.

Обозначения и исходные соотношения. Ниже будут использоваться те же исходные соотношения и обозначения, которые были введены и

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty} f(s \cos \varphi - p \sin \varphi, s \sin \varphi + p \cos \varphi)\, dp. \tag{1}$$

Восстановленное томографическое изображение описывается функцией

$$f_\alpha(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} R(s, \varphi)\, q_\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s)\, ds, \tag{2}$$

где

$$q_\alpha(\xi) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} w_\alpha(t) |t| \exp(2\pi i \xi t)\, dt, \tag{3}$$

а $w_\alpha(t)$ — некоторая функция ($w_\alpha(t) = w_\alpha(|t|)$), зависящая от параметра регуляризации α.

Подстановкой (1) в (2) убеждаемся, что

$$f_\alpha(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, y_1)\, \tau_\alpha(x - x_1, y - y_1)\, dx_1 dy_1, \tag{4}$$

где

$$\tau_\alpha(x - x_1, y - y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q_\alpha[(x - x_1) \cos \varphi + (y - y_1) \sin \varphi]\, d\varphi. \tag{5}$$

Будем предполагать, что регистрация проекций сопровождается появлением нормального аддитивного шума $n(s, \varphi)$, так что получаемый радоновский образ $R_{\text{п}}(s, \varphi)$ связан с $R(s, \varphi)$ равенством

$$R_{\text{п}}(s, \varphi) = R(s, \varphi) + n(s, \varphi). \tag{6}$$

Тогда согласно (2) восстанавливаемое в этих условиях изображение $f_{\text{в}}(x, y)$ связано с $f_\alpha(x, y)$ равенством

$$f_{\text{в}}(x, y) = f_\alpha(x, y) + n_\alpha(x, y), \tag{7}$$

где

$$n_\alpha(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} n(x, y)\, q_\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s)\, ds. \tag{8}$$

Будем также предполагать, что шум имеет нулевое среднее значение и δ-коррелирован по обеим координатам s и φ, т. е.

$$\overline{n(s, \varphi)} = 0; \quad \overline{n(s_1, \varphi_1) n(s_2, \varphi_2)} = N_0 \delta(s_1 - s_2, \varphi_1 - \varphi_2). \tag{9}$$

Формулировка задачи. Пусть анализируемый объект описывается функцией $f_1(x, y)$ либо $f_2(x, y)$. Требуется по зарегистрированной в процессе томографического эксперимента информации принять решение, какой из этих функций описывается данный объект. В качестве алгоритма распознавания используется корреляционный алгоритм [2] или, как его еще называют, алгоритм сравнения с эталоном [3].

Согласно этому алгоритму, вычисляются интегралы от произведений полученной функции на всевозможные эталонные функции и решение принимается в пользу той эталонной функции, для которой произведение максимально. В более общем случае может требоваться превышение одного произведения над другим на некоторую величину c. Применим этот алгоритм к двум изучаемым ситуациям.

Ситуация 1. Решение принимается непосредственно по зарегистрированному радоновскому образу $R_п(s, \varphi)$. Тогда, согласно сформулированному алгоритму, считается, что объект описывается функцией $f_1(x, y)$, если выполняется неравенство

$$z_п = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{0}^{\pi} R_п(s, \varphi) R_р(s, \varphi) d\varphi > c_п, \tag{10}$$

где $c_п$ — порог сравнения; $R_р(s, \varphi) = R_1(s, \varphi) - R_2(s, \varphi)$, а $R_k(s, \varphi)$ $(k = 1, 2)$ определяется формулой (1) для $f(x,y) = f_k(x, y)$. В противном случае решение принимается в пользу функции $f_2(x, y)$.

Ситуация 2. Решение берется по восстановленному изображению $f_в(x, y)$. Тогда считается, что объект описывается функцией $f_1(x, y)$, если

$$z_и = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_в(x, y) f_{ар}(x, y)\, dxdy > c_и, \tag{11}$$

где $f_{ар}(x, y) = f_{а1}(x, y) - f_{а2}(x, y)$; $f_{аk}(x, y)$ $(k = 1, 2)$ задается формулой (4) для $f(x_1, y_1) = f_k(x_1, y_1)$. В противном случае решение принимается в пользу функции $f_2(x, y)$.

В силу предположения о нормальности шума и справедливости равенств (6) — (8) величины $z_п$ и $z_и$ распределены по нормальному закону. Поэтому для оценки эффективности приведенных алгоритмов достаточно найти средние значения и дисперсии этих величин. Будем считать, что требуется обеспечить равенство вероятностей: $P(i/i)$ $(i = 1, 2)$ принять гипотезу об описании объекта функцией $f_i(x, y)$, когда справедлива i-я гипотеза.

Данное условие позволяет исключить величину порога, после чего получаем

$$\text{для ситуации 1 } P_п = P_п(1/1) = P_п(2/2) = F(\gamma_п); \tag{12}$$

$$\text{для ситуации 2 } P_и = P_и(1/1) = P_и(2/2) = F(\gamma_и), \tag{13}$$

где $F(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\gamma} \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right) dy$; $\gamma_п = \frac{\bar{z}_{п1} - \bar{z}_{п2}}{2\sigma_п}$; $\gamma_и = \frac{\bar{z}_{и1} - \bar{z}_{и2}}{2\sigma_и}$;

$\bar{z}_{пk}$, $\bar{z}_{иk}$ $(k = 1, 2)$ — средние значения величин $z_п$ и $z_и$ при условии справедливости k-гипотезы; $\sigma_п^2$ и $\sigma_и^2$ — дисперсии этих величин, которые, как будет показано ниже, не зависят от конкретной гипотезы.

Задача состоит в получении и количественном сравнении между собой вероятностей $P_п$ и $P_и$.

Расчет величин $\gamma_п$ и $\gamma_и$. Усредняя $z_п$ с учетом (6) и (9) вначале в предположении справедливости первой гипотезы, а затем в предположении второй и составляя разность полученных величин, имеем

$$\bar{z}_{п1} - \bar{z}_{п2} = \int_{0}^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} R_p^2(s, \varphi)\, ds. \tag{14}$$

Аналогичные операции с величиной $z_и$ приводят к равенству

$$\bar{z}_{и1} - \bar{z}_{и2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{ар}^2(x, y)\, dxdy. \tag{15}$$

Принимая во внимание (1) и сделав замену переменных $x = s\cos\varphi - p\sin\varphi$, $y = p\cos\varphi + s\sin\varphi$, убеждаемся в справедливости соотношения

$$\widehat{R}_p(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_p(s, \varphi) e^{i2\pi st} ds = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_p(x, y) e^{i2\pi t(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} dxdy. \quad (16)$$

Тогда равенство (14) может быть записано в виде

$$\bar{z}_{п1} - \bar{z}_{п2} = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} R_p^2(s, \varphi)\, ds = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{R}_p(t, \varphi)|^2 dt = \int_0^{\infty} \Phi(t)\, dt, \quad (17)$$

где

$$\Phi(t) = \int_0^{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_p(x, y) e^{i2\pi t(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} dxdy \right|^2 d\varphi; \quad (18)$$

$$f_p(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y).$$

Воспользуемся равенством (8) из работы [4]. Тогда с учетом (5) соотношение (15) приводится к виду

$$\bar{z}_{и1} - \bar{z}_{и2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 f_p(x_1, y_1) f_p(x_2, y_2) \tau_\alpha^0 (x_1 - x_2,$$

$$y_1 - y_2) = 2\int_0^{\infty} t w_\alpha^2(t) \Phi(t)\, dt, \quad (19)$$

где $\Phi(t)$ определяется прежним равенством (18).

Дисперсия $\sigma_п^2$ находится возведением в квадрат и усреднением разности $z_п$ и того среднего значения $\bar{z}_п$, которое соответствует данной гипотезе и для которой осуществляется усреднение. В результате имеем

$$\sigma_п^2 = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 \int_0^{\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} d\varphi_2 \overline{n(s_1, \varphi_1) n(s_2, \varphi_2)} R_p(s_1, \varphi_1) R_p(s_2, \varphi_2) =$$

$$= N_0 \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^{\pi} d\varphi R_p^2(s, \varphi) = N_0 \int_0^{\infty} \Phi(t)\, dt, \quad (20)$$

где при переходе ко второму равенству было использовано (9), а к третьему — (17).

Аналогично для дисперсии $\sigma_и^2$ получаем

$$\sigma_и^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 K(x_1, y_1; x_2, y_2) f_{\alpha p}(x_1, y_1) f_{\alpha p}(x_2, y_2), \quad (21)$$

где $K(x_1, y_1; x_2, y_2) = \overline{n_\alpha(x_1, y_1) n_\alpha(x_2, y_2)}$.

Общее выражение для $K(x_1, y_1; x_2, y_2)$ было найдено в [1]. Интересующая нас функция корреляции находится из (12) [1], если в этом равенстве положить $g(\omega) = 0$ и $\omega/2\pi = t$, так что

$$K(x_1, y_1; x_2, y_2) = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\pi} d\varphi t^2 w_\alpha^2(t) \exp\{i2\pi t[(x_1 - x_2)\cos\varphi +$$

$$+ (y_1 - y_2)\sin\varphi]\}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21) и учитывая (4) и (5), получаем

$$\sigma_и^2 = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_0^{\pi} d\varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_0^{\pi} d\varphi_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \int_{-\infty}^{\infty} dy_3 \int_{-\infty}^{\infty} dx_4 \int_{-\infty}^{\infty} dy_4 \times$$

$$\times f_p(x_3, y_3) f_p(x_4, y_4) t^2 w_\alpha^2(t) |t_1| |t_2| w_\alpha(t_1) w_\alpha(t_2) \exp[-i2\pi t_1 (x_3 \cos\varphi_1 + y_3 \sin\varphi_1) - i2\pi t_2 (x_4 \cos\varphi_2 + y_4 \sin\varphi_2)] \delta(t\cos\varphi + t_1\cos\varphi_1) \delta(t\sin\varphi + t_1 \sin\varphi_1) \delta(t\cos\varphi - t_2\cos\varphi_2) \delta(t\sin\varphi - t_2\sin\varphi_2) = 2N_0 \int_0^\infty t^2 w_\alpha^4(t) \Phi(t)\, dt. \qquad (23)$$

Выведенные равенства позволяют представить выражения для $\gamma_п$ и $\gamma_и$ через одну и ту же функцию $\Phi(t)$, так что

$$\gamma_п = \frac{\bar{z}_{п1} - \bar{z}_{п2}}{2\sigma_п} \doteq \sqrt{\frac{1}{2N_0}\int_0^\infty \Phi(t)\, dt}; \qquad (24)$$

$$\gamma_и = \frac{\bar{z}_{и1} - \bar{z}_{и2}}{2\sigma_и} = \frac{\int_0^\infty t w_\alpha^2(t) \Phi(t)\, dt}{\sqrt{2N_0 \int_0^\infty t^2 w_\alpha^4(t) \Phi(t)\, dt}}. \qquad (25)$$

Сравнивая между собой (24) и (25), убеждаемся, что всегда

$$\gamma_п \geqslant \gamma_и. \qquad (26)$$

Действительно, согласно (24) и (25) неравенство (26) эквивалентно неравенству

$$\int_0^\infty t w_\alpha^2(t) \Phi(t)\, dt \leqslant \sqrt{\int_0^\infty t^2 w_\alpha^4(t)\Phi(t)\, dt}\sqrt{\int_0^\infty \Phi(t)\, dt}; \qquad (27)$$

которое, в свою очередь, приводит к неравенству Коши — Шварца [5] для двух функций $\varkappa_1(t) = t w_\alpha^2(t)\sqrt{\Phi(t)}$ и $\varkappa_2(t) = \sqrt{\Phi(t)}$.

Так как функция $F(\gamma)$, через которую определяются вероятности $P_п$ и $P_и$, является монотонно возрастающей, то неравенство (26) означает, что вероятность распознавания $P_п$ по радоновскому образу всегда больше (или равна) вероятности распознавания $P_и$ по томографическому изображению. Подчеркнем, что доказанное утверждение не зависит от мощности шума и конкретного вида распознаваемого объекта и является частным выражением сформулированного во введении более общего утверждения: никакое преобразование первичных данных не может увеличить содержащуюся в них информацию.

Пример. Для того чтобы количественно оценить, насколько отличаются между собой вероятности $P_п$ и $P_и$, приведем результаты расчета величин $\gamma_п$ и $\gamma_и$ для случая, когда

$$f_1(x, y) = f_2(x, y) + \lambda_1 \exp[-\lambda_2^2(x^2 + y^2)]; \quad w_\alpha(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 t^2\right).$$

Тогда

$$f_p(x, y) = \lambda_1 \exp[-\lambda_2^2(x^2 + y^2)]. \qquad (28)$$

По формуле (1) находим радоновский образ $R_p(s, \varphi) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\pi} e^{-\lambda_2^2 s^2}$, а по формуле (2) убеждаемся, что вид $f_{\alpha p}(x, y)$ совпадает с $f_p(x, y)$, но при

$$\lambda_\alpha^2 = \left[\frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{2\alpha^2}{(2\pi)^2}\right]^{-1}. \qquad (29)$$

Физический смысл, который можно усмотреть в приведенных выражениях, состоит в следующем: различие в распознаваемых функциях $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ сосредоточено в окрестности $x = 0$, $y = 0$; в радоновских образах это различие сосредоточено в окрестности прямой $s = 0$, в восстановленных изображениях — опять около точки $x = 0$, $y = 0$, но область «сосредоточения» увеличилась (вместо λ_2^2 имеем $\lambda_2^2\left[1+2\alpha^2\lambda_2^2/(2\pi)^2\right]^{-1}$). Следовательно, поставленную задачу можно интерпретировать так: какое из различий — «расплывшееся точечное» или «линейное» — выявляется легче. При этом данные различия обнаруживаются из разных входных сигналов с отличающимися друг от друга статистическими свойствами.

Подставляя (28) в (18), имеем $\Phi(t)=\pi^3\dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_2^4}e^{-\pi^2t^2/\lambda_2^2}$. Для этой функции выражения (24) и (25) принимают вид

$$\gamma_{\text{п}}=\pi^{5/4}2^{-5/4}N_0^{-1/2}\lambda_1\lambda_2^{-3/2}=\frac{1}{2}\sqrt{q_0};\tag{30}$$

$$\gamma_{\text{и}}=\frac{\pi^{5/4}}{\sqrt{2N_0}}\frac{\lambda_1}{\lambda_2^{3/2}}\frac{(2\lambda_2^2\alpha^2+2\pi^2)^{3/4}}{\lambda_2^2\alpha^2+2\pi^2}=\sqrt{2q_0}\frac{(\lambda_2^2\alpha^2+\pi^2)^{3/4}}{\lambda_2^2\alpha^2+2\pi^2},\tag{31}$$

где q_0 — отношение сигнал — шум, определяемое равенством (14) в работе [4].

Величина $\gamma_{\text{и}}$ зависит от регуляризирующего параметра α. Легко убедиться, что оптимальное значение α, при котором $\gamma_{\text{и}}$ достигает максимального значения, равно $\alpha_0=\pi\sqrt{2}/\lambda_2$. Заметим, что это как раз то значение α, при котором $\lambda_\alpha^2=\lambda_2^2/2$. Подставляя α_0 в (31), находим $\gamma_{\text{и}}=0{,}91\gamma_{\text{п}}$. Из этого равенства и соотношения (30), в частности, следует, что если ориентироваться на восстановленные изображения, то для обеспечения той вероятности распознавания, которая достигается при использовании радоновских образов, необходимо отношение сигнал — шум q_0 при оптимальном выборе $\alpha=\alpha_0$ увеличить в 1,21 раза.

Предположим, что отношение сигнал — шум таково, что обеспечивается вероятность распознавания $P_{\text{п}}=0{,}9$. Тогда $\gamma_{\text{п}}=1{,}28$; $\gamma_{\text{и}}=0{,}91\gamma_{\text{п}}=1{,}16$, а это соответствует вероятности $P_{\text{и}}=0{,}877$. Если же томограф настроен не на $\alpha=\alpha_0$, а, например, на $\alpha=2\alpha_0$, то для того же значения $P_{\text{п}}=0{,}9$ вероятность распознавания по томографическим изображениям падает до уровня $P_{\text{и}}=0{,}855$.

Ситуация, рассмотренная в настоящем примере, относится к числу наиболее простых. Однако уже и здесь виден определенный выигрыш как в требуемой величине отношения сигнал — шум, так и в величине вероятности распознавания для случая, когда решение принимается не по изображениям, а по радоновским образам. С усложнением ситуации этот выигрыш может стать более значительным.

Вспомним теперь о вопросе, поставленном в начале работы. Ответ на него для рассмотренного случая однозначен. Во-первых, эффективность распознавания по корреляционному алгоритму больше, если ориентироваться на образ в пространстве Радона. Во-вторых, вычислительные затраты по реализации корреляционного алгоритма примерно одинаковы как для радоновских образов, так и для томографических изображений, однако при работе с радоновскими образами не требуется этап восстановления. Суммируя изложенное, приходим к заключению — для изученной ситуации целесообразнее работать непосредственно с радоновскими образами. Сформулированный вывод, очевидно, распространяется и на более общую многоальтернативную ситуацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Моисеев В. Н., Троицкий И. Н., Устинов Н. Д.** Потенциальная точность томографического процесса. Ч. I // Автометрия.— 1986.— № 1.
2. **Василенко Г. И.** Голографическое опознавание образов.— М.: Сов. радио, 1977.
3. **Дуда Р., Харт П.** Распознавание образов и анализ сцен.— М.: Мир, 1976.
4. **Моисеев В. Н., Троицкий И. Н., Устинов Н. Д.** Потенциальная точность томографического процесса. Ч. II // Автометрия.— 1987.— № 1.
5. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике.— М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 22 июня 1985 г.