

11. Сапарин Г. В., Обыден С. К., Четверикова И. Ф. и др. Об аномальной кинетике катодолюминесценции в GaN:Zn // Вестн. МГУ. Сер. физика — астрономия.— 1983.— Т. 24, № 3.
12. Церов А. П., Рау Э. И., Спивак Г. В., Чубаренко В. А. Эксперименты по нестандартным методам и особым типам контраста в РЭМ // Изв. АН СССР. Сер. физ.— 1983.— Т. 47, № 6.
13. Broers A., Pomerantz M. Rapid writing of fine lines in Langmuir-Blodgett films using electron beams // Thin Solid Films.— 1983.— V. 99.— P. 323.
14. Möllenstedt G., Schief R., Speidel R. Fernsehgesteuerte Elektronenstrahl — Mikroaufzeichnung // Optik.— 1968.— Bd 27.— S. 488.
15. Müller K. H. Elektronen-Mikroschreiber mit geschwindigkeitsgesteuerter Strahlführung // Optik.— 1971.— Bd 33.— S. 296.
16. Speidel R. Microrecording by electron beams in scanning systems // Proc. 5-th Europ. Congress on Electron Microscopy.— Manchester, 1972.
17. Рау Э. И., Савин Д. О., Спивак Г. В. Микрозапись и воспроизведение информации электронно-зондовыми сканирующими системами // Изв. АН СССР. Сер. физ.— 1984.— Т. 48, № 2.
18. Хейденрайх. Основы просвечивающей электронной микроскопии.— М.: Мир, 1966.
19. Christy R. W. Formation of thin polymer films by electron bombardment // J. Appl. Phys.— 1960.— V. 31.— P. 1680.
20. Жданов Г. С. Кинетика роста полимерной пленки на поверхности, облучаемой тонким электронным зондом // Физика и химия обработки материалов.— 1975.— № 5.
21. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.
22. Fourie J. T. A theory of surface-originating contamination and a method for its elimination // SEM 79/II.— P. 87.
23. Макаревич В. С., Мейке А. В., Рубинов В. М. Тепловое воздействие электронного пучка на тонкую полупроводниковую пленку на подложке // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1982.— № 1.

Поступила в редакцию 25 августа 1985 г.

УДК 616.07

И. Н. ТРОИЦКИЙ

(Москва)

ТОМОГРАФИРОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Постановка задачи. На практике часто встречаются такие ситуации, когда методы томографии привлекаются для анализа случайных полей. Тогда восстанавливаемая функция является некоторой конкретной реализацией данного случайного процесса. Для такой ситуации задача томографии состоит в том, чтобы по проекциям, регистрация которых в общем случае сопровождается наличием шумового фона, восстановить изображение, которое бы в среднем по некоторому выбранному критерию качества минимально отличалось от конкретной реализации наблюдаемого случайного поля. Данная работа ограничивается рассмотрением статистически однородных случайных полей, а в качестве критерия выбирается среднеквадратичное отклонение восстановленного изображения от истинной реализации.

Обозначения и исходные соотношения. При введении необходимых обозначений будем ориентироваться на те, которые были введены и подробно пояснены в [1]: $f(x, y)$ — функция, описывающая некоторую реализацию в сечении случайного поля плоскостью $\{x, y\}$; $K_f(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ — корреляционная функция поля $f(x, y)$; $G_f(\omega_1, \omega_2)$ — пространственный спектр поля $f(x, y)$; $R(s, \varphi)$ — проекция сечения $f(x, y)$ на ось s , которая по отношению к оси x повернута на угол φ ; $n(s, \varphi)$ — реализация шума, аддитивная по отношению к $R(s, \varphi)$; $n(s, \varphi)$, $R(s, \varphi)$ статистически не связаны между собой; $K_n(s_1 - s_2, \varphi_1 - \varphi_2)$ — корреляционная функция шума $n(s, \varphi)$; $g(\omega)$ — спектральная плотность шума по координате s ; $n_s(x, y)$ — реализация шума в плоскости $\{x, y\}$, соответ-

вующая $n(s, \varphi)$; $f_n(x, y)$ — восстанавливаемая функция; $R_p(s, \varphi)$ — зарегистрированная проекция, учитывающая наличие шума $n(s, \varphi)$; $S(x, y)$ — суммарное изображение [2] для проекций $R(s, \varphi)$; $S_p(x, y)$ — суммарное изображение для проекций $R_p(s, \varphi)$.

Будем предполагать, что средние значения $\overline{f(x, y)}$ и $\overline{n(s, \varphi)}$ равны нулю, а корреляционные свойства шума аналогичны [1], т. е.

$$K_n(s_1 - s_2, \varphi_1 - \varphi_2) = k(s_1 - s_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1)$$

Функции $K_f(x, y)$, $G_f(\omega_1, \omega_2)$ и $k(s)$, $g(\omega)$ связаны между собой равенствами [3]

$$K_f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_f(\omega_1, \omega_2) e^{i2\pi(x\omega_1 + y\omega_2)} d\omega_1 d\omega_2; \quad (2)$$

$$k(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i2\pi\omega s} d\omega, \quad (3)$$

а функции $f(x, y)$, $S(x, y)$, $R(s, \varphi)$ — соотношениями

$$\begin{aligned} R(s, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - p \sin \varphi, s \sin \varphi + p \cos \varphi) dp = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x, y) \exp \{ -i2\pi\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + i2\pi\omega s \}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \times \\ &\times f(x_1, y_1) \exp \{ i2\pi\omega [(x - x_1) \cos \varphi + (y - y_1) \sin \varphi] \}. \end{aligned} \quad (5)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением двух алгоритмов восстановления: первый основан на фильтрации суммарного изображения, а второй — на фильтрации самих проекций [2]. Оба алгоритма при отсутствии шума являются следствием классического равенства Радона, устанавливающего, как по проекциям $R(s, \varphi)$ может быть найдена функция $f(x, y)$.

При восстановлении по первому алгоритму вначале в соответствии с равенством (5) образуется суммарное изображение, а затем это изображение подвергается фильтрации. Если частотная характеристика фильтра

$$Q_\gamma(\omega_1, \omega_2) = \pi \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \quad (6)$$

то при отсутствии шума восстанавливается искомая функция, так что

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(x_1, y_1) \gamma(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1, \quad (7)$$

где

$$\gamma(\xi, \eta) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} e^{i2\pi(\omega_1 \xi + \omega_2 \eta)} d\omega_1 d\omega_2. \quad (8)$$

Во втором алгоритме фильтруются сами проекции, и при этом фильтрация осуществляется только по координате s . Если частотная характеристика такого фильтра равна $|\omega|$, то при отсутствии шума искомая функция определяется равенством

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} ds R(s, \varphi) q(s' - s), \quad (9)$$

где

$$s' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad g(t) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{-i2\pi\omega t} d\omega. \quad (10)$$

На практике томографический процесс всегда сопровождается наличием некоторого шума. В этих условиях рассматриваемые алгоритмы должны быть регуляризованы [4]. Фактически регуляризация требует изменения вида фильтров γ и q . Наша задача — организовать процесс восстановления таким образом, чтобы для сформулированных выше условий шумы регистрации сглаживались оптимальным винеровским фильтром, и получающиеся при этом результаты сопоставить с традиционной регуляризацией.

Винеровская фильтрация в алгоритме, основанном на фильтрации суммарного изображения. Наличие шума $n(s, \varphi)$ приводит к тому, что регистрируемая проекция $R_p(s, \varphi)$ является суммой истинной проекции $R(s, \varphi)$ и шума

$$R_p(s, \varphi) = R(s, \varphi) + n(s, \varphi). \quad (11)$$

Если по такой зарегистрированной проекции сформировать суммарное изображение $S_p(x, y)$ (т. е. формально подставить в (5) $R_p(s, \varphi)$ вместо $R(s, \varphi)$), то оно также окажется суммой истинного суммарного изображения $S(x, y)$ и шумового $S_n(x, y)$:

$$S_p(x, y) = S(x, y) + S_n(x, y), \quad (12)$$

где

$$S_n(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi n(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi. \quad (13)$$

В результате, воспользовавшись равенством (7) и подставив в него $S_p(x, y)$ вместо $S(x, y)$, имеем

$$f_b(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_p(x_1, y_1) \gamma(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1 = f(x, y) + n_b(x, y), \quad (14)$$

где

$$n_b(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(x_1, y_1) \gamma(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1. \quad (15)$$

Сформулированные в предыдущем разделе предположения и введенные соотношения позволяют найти корреляционные функции суммарного изображения $S(x, y)$, его шумовой составляющей $S_n(x, y)$ и шума в плоскости восстановления $n_b(x, y)$. Соответствующие математические выкладки приведены в приложении 1. Из полученных выражений (П6), (П9), (П11) следует, что данные корреляционные функции зависят от разности соответствующих переменных. Следовательно, случайные функции $S(x, y)$, $S_n(x, y)$ и $n_b(x, y)$ описывают однородные (в широком смысле) случайные поля. Поэтому по отношению как к восстановленной функции $f_b(x, y)$ (14), так и к регистрируемому суммарному изображению $S_p(x, y)$ (12) можно поставить задачу об отыскании линейного фильтра, который обеспечивал бы наилучшую (в смысле среднеквадратичного отклонения) оценку: в первом случае $f(x, y)$ по функции $f_b(x, y)$; во втором — $S(x, y)$ по $S_p(x, y)$.

Рассмотрим вначале первый случай. Обозначим искомую оценку функции $f(x, y)$ через $\hat{f}(x, y)$, а переходную характеристику оптимального фильтра — через $\chi_0(\xi, \eta)$. Тогда для

$$\hat{f}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_b(x_1, y_1) \chi_0(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1 \quad (16)$$

должно выполняться условие

$$|\hat{f}(x, y) - f(x, y)|^2 = \min_{\chi(\cdot)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_b(x_1, y_1) \chi(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1 - f(x, y) \right]^2. \quad (17)$$

Решение сформулированной задачи хорошо известно и приводит к винеровскому фильтру [5], спектральная характеристика которого для данного случая равна

$$Q_{\chi_0}(\omega_1, \omega_2) = \frac{G_f(\omega_1, \omega_2)}{G_f(\omega_1, \omega_2) + G_n(\omega_1, \omega_2)}, \quad (18)$$

где $G_f(\omega_1, \omega_2)$ и $G_n(\omega_1, \omega_2)$ — спектральные плотности соответственно $f(x, y)$ и $n_s(x, y)$. Первая плотность задается исходной постановкой задачи, а вторая найдена в приложении 1 и определяется равенством (П12).

Подставляя в (16) первое равенство выражения (14), находим

$$\hat{f}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_p(x_1, y_1) \tau(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1, \quad (19)$$

где

$$\tau(x - x_1, y - y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_0(x - x_2, y - y_2) \gamma(x_2 - x_1, y_2 - y_1) dx_2 dy_2. \quad (20)$$

Таким образом, при наличии шумов регистрации для обеспечения критерия (17) следует предусмотреть введение винеровской фильтрации, что приводит к необходимости осуществлять восстановление не по формуле (14), а по (19). Сравнивая эти формулы, видим, что введение дополнительной винеровской фильтрации не затрагивает основной структуры алгоритма восстановления, а приводит лишь к изменению вида фильтра, через который должно быть пропущено суммарное изображение. Согласно (6), (18), (20) и (П12) спектральная характеристика нового фильтра имеет вид

$$Q_{\tau}(\omega_1, \omega_2) = Q_{\gamma}(\omega_1, \omega_2) Q_{\chi_0}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\pi \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} G_f(\omega_1, \omega_2)}{G_f(\omega_1, \omega_2) + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} g(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})}. \quad (21)$$

При использовании такого фильтра среднеквадратичное отклонение восстановленного томографического изображения $\hat{f}(x, y)$ от истинного $f(x, y)$ равно

$$\Delta^2 = \overline{[f(x, y) - \hat{f}(x, y)]^2} = K_f(0, 0) - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_f^2(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2}{G_f(\omega_1, \omega_2) + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} g(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})}. \quad (22)$$

Обратимся теперь ко второму случаю, когда определяется оптимальная оценка $\hat{S}(x, y)$ путем пропускания $S_p(x, y)$ через фильтр с переходной характеристикой $\kappa_0(\xi, \eta)$. Формально это означает, что требуется найти такой фильтр κ_0 , чтобы для

$$\hat{S}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_p(x_1, y_1) \kappa_0(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1 \quad (23)$$

выполнялось условие

$$\overline{[\hat{S}(x, y) - S(x, y)]^2} = \min_{\kappa(\cdot)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_p(x_1, y_1) \kappa(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1 - S(x, y) \right]^2. \quad (24)$$

Решение этой задачи аналогично предыдущей обеспечивается винеровским фильтром со спектральной характеристикой

$$Q_{\kappa_0}(\omega_1, \omega_2) = \frac{G_s(\omega_1, \omega_2)}{G_s(\omega_1, \omega_2) + G_{sn}(\omega_1, \omega_2)}, \quad (25)$$

где $G_s(\omega_1, \omega_2)$ и $G_{sn}(\omega_1, \omega_2)$ — спектральные плотности соответственно $S(x, y)$ и $S_n(x, y)$. Вид этих функций был найден в приложении 1. Учитывая равенства (П7) и (П10), имеем

$$Q_{\kappa_0}(\omega_1, \omega_2) = \frac{G_f(\omega_1, \omega_2)}{G_f(\omega_1, \omega_2) + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} g(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})}. \quad (26)$$

Для того чтобы восстановить искомое изображение, необходимо согласно (7) пропустить $\hat{S}(x, y)$ через фильтр γ . Если, как и в предыдущем случае, обе фильтрации объединить вместе, то новый фильтр должен иметь спектральную характеристику $Q_{\kappa_0}(\omega_1, \omega_2) Q_\gamma(\omega_1, \omega_2)$. Привлекая равенства (6) и (26), убеждаемся, что она в точности совпадает с (21).

Таким образом, несмотря на то, что винеровская фильтрация полей $f_n(x, y)$ и $S_p(x, y)$ требует привлечения различных фильтров, тем не менее изменения, вносимые в обоих случаях в «суммарный» томографический процесс, оказываются абсолютно одинаковыми. Это обстоятельство связано с тем, что введение винеровской фильтрации не нарушает линейного характера всего томографического процесса. В то же время необходимо подчеркнуть, что изменения в самом фильтре носят весьма принципиальный характер. В частности, если фильтр γ зависел от $|\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, то заменивший его фильтр τ может зависеть от ω_1 и ω_2 произвольным образом.

Винеровская фильтрация в алгоритме, основанном на фильтрации проекций. В приложении 1 было найдено выражение (П4), определяющее вид корреляционной функции поля $R(s, \varphi)$. Согласно (П4) в общем случае данная корреляционная функция не является функцией разности $\varphi_1 - \varphi_2$. Поэтому, строго говоря, задача винеровской фильтрации по отношению к $R(s, \varphi)$ поставлена быть не может. Вместе с тем, ориентируясь на результаты предыдущих исследований и зная, как видоизменяется алгоритм восстановления по суммарному изображению, можно поставить задачу о нахождении эквивалентных изменений в алгоритме фильтрации проекций.

Формально это означает, что требуется найти такую функцию q_0 , которая, будучи использована в (9) вместо q , приведет к восстановлению функции $f(x, y)$, тождественной той, которая получается в алгоритме (7), когда в последнем вместо фильтра γ используется фильтр τ . Такая функция q_0 найдена в приложении 2 и определяется равенством (П22). Сравнивая q и q_0 , видим, что если фурье-спектр q не зависит от угла φ , то фурье-спектр q_0 является функцией этого угла. Физически это означает, что для достижения в данном алгоритме результатов, аналогичных предыдущему, когда в последнем привлекалась винеровская фильтрация, необходимо фильтровать $R(s, \varphi)$ перестраиваемым фильтром, спектральная характеристика которого при переходе от одного угла φ к другому изменялась бы по закону $Q_\tau(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi)$.

Однако традиционные методы регуляризации не подразумевают столь значительного усложнения исходной процедуры. Обычно [4] они ограничиваются введением некоторой функции $W(|\omega|)$ под знак интеграла (10). Принимая во внимание это обстоятельство, попытаемся поставить задачу таким образом, чтобы в результате ее решения прийти к подобному результату.

Согласно приложению 1 функция корреляции для $R_0(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi R(s, \varphi) d\varphi$ зависит от $s_1 - s_2$, так что функция $R_0(s)$ является ста-

тистически однородной. Ориентируясь на этот факт, предположим, что из зарегистрированной совокупности проекций $R(s, \varphi)$ сформирована некото-

рая усредненная проекция $R_p^0(s)$ по правилу $R_p^0(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi R_p(s, \varphi) d\varphi$.

Учитывая (11), имеем

$$R_p^0(s) = R_0(s) + n_0(s), \quad (27)$$

где $R_0(s)$ определяется (П13), а $n_0(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi n(s, \varphi) d\varphi$.

Согласно (2) $\overline{n_0(s_1)n_0(s_2)} = \frac{1}{\pi} k(s_1 - s_2)$, так что поле $n_0(s)$ является статистически однородным, а его спектральная плотность $g_0(\omega) = g(\omega)/\pi$. Поэтому построить оптимальную оценку функции $R_0(s)$ можно также с помощью винеровского фильтра, спектральная характеристика которого

$$Q_0(\omega) = G_0(\omega) / (G_0(\omega) + g_0(\omega)), \quad (28)$$

где $G_0(\omega)$ и $g_0(\omega)$ — спектральные плотности соответственно $R_0(s)$ и $n_0(s)$. Вид этих функций определен в приложении 1. Привлекая (П16) и (П17), получаем

$$Q_0(\omega) = \frac{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi G_f(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) d\varphi}{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi G_f(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) d\varphi + |\omega| g(\omega)}. \quad (29)$$

Теперь рассмотрим случай, когда функция $R_p^0(s)$ не формируется, и будем фильтровать найденным для этой функции винеровским фильтром саму исходную проекцию. Тогда после такой фильтрации имеем

$$\hat{R}(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R_p(s_1, \varphi) h(s - s_1) ds_1, \quad (30)$$

где $h(s - s_1)$ — переходная характеристика винеровского фильтра (29).

Подставляя $\hat{R}(s, \varphi)$ (30) в (9) вместо $R(s, \varphi)$ и интегрируя по s , получаем

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 R_p(s_1, \varphi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(s - s_1) q(s' - s) ds \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} ds R_p(s, \varphi) q_0(s' - s). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь

$$q_0(t) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| Q_0(\omega) \exp(-i2\pi\omega t) d\omega. \quad (32)$$

Из равенства (32) следует, что в результате проведенных исследований удалось модернизировать рассматриваемый алгоритм так, чтобы остаться в рамках традиционной регуляризации и при этом определить оптимальную регуляризирующую функцию, которая оказывается равной $W(|\omega|) = Q_0(\omega)$. Обсудим более подробно характер подобной оптимизации.

Прежде всего обратим внимание на то, что если случайное поле $f(x, y)$ не только статистически однородно, но и изотропно ($G_f(\omega_1, \omega_2) \rightarrow G_f(|\omega|)$), то (29) совпадает с (П22). Следовательно, в данном частном случае обеспечивается оптимальность, эквивалентная винеровской фильтрации поля $f_v(x, y)$. В общем случае качество восстановления в рассматриваемом алгоритме будет ниже. Физически это утверждение вытекает из самой постановки задачи, т. е. фактически мы отказались от фильтрации,

подстраиваемой под каждую отдельную (по углу φ) проекцию, а фильтруем все проекции одним и тем же фильтром. Оптимальность же выражается в том, что последнее осуществляется фильтром, оптимальным по отношению к некоторой усредненной проекции, получаемой интегрированием $R_p(s, \varphi)$ по всем значениям φ .

С математической точки зрения характер обсуждаемой оптимальности выявляется особенно рельефно, если решить задачу, сформулированную прежними равенствами (16) и (17), но при одном ограничении на функции χ : они должны быть такими, чтобы их спектр $Q_\chi(\omega_1, \omega_2)$ являлся функцией $|\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. Определив для такой оптимальной функции χ^0 переходную характеристику фильтра τ^0 , а затем по τ^0 функцию q^0 , можно убедиться, что последняя в точности совпадает с q_0 (32).

Изменение характера фильтрации приводит к изменению и среднеквадратичного отклонения восстановленной функции $\hat{f}(x, y)$ от истинной $f(x, y)$. В данном случае вместо (22) имеем

$$\Delta^2 = K_f(0, 0) - \pi \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \frac{\left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G_f(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) d\varphi \right]^2}{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G_f(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) d\varphi + |\omega| g(\omega)} d\omega. \quad (33)$$

Все проведенные исследования относились к случаю, когда регистрируются сами проекции $R(s, \varphi)$. Это наиболее типичная ситуация, однако встречаются и такие случаи, когда да регистрации удается над проекциями осуществить те или иные операции. Для определенности предположим, что регистрируются проекции, уже сглаженные фильтром q , т. е.

$$R_\Phi(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} R(s_1, \varphi) q(s - s_1) ds_1. \quad (34)$$

В результате шум $n(s, \varphi)$ добавляется не к $R(s, \varphi)$, а к $R_\Phi(s, \varphi)$, так что результат регистрации

$$R_{R\Phi}(s, \varphi) = R_\Phi(s, \varphi) + n(s, \varphi). \quad (35)$$

Далее согласно алгоритму (9) следует в (35) положить $s = x \cos \varphi + y \sin \varphi$ и эту функцию проинтегрировать по φ . После чего имеем

$$f_b(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} n(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi = f(x, y) + S_n(x, y), \quad (36)$$

где при переходе к последнему равенству было учтено (13).

Равенства (36) и (14) отличаются друг от друга тем, что присутствующие в них шумовые слагаемые описываются разными функциями. В результате винеровский фильтр β_0 для $f_b(x, y)$ отличается от χ_0 и его спектральная характеристика

$$Q_{\beta_0} = \frac{G_f(\omega_1, \omega_2)}{G_f(\omega_1, \omega_2) + G_{sn}(\omega_1, \omega_2)}, \quad (37)$$

где $G_{sn}(\omega_1, \omega_2)$ — спектральная плотность $S_n(x, y)$, которая определяется равенством (П10).

Тогда среднеквадратичная ошибка восстановления вместо (22) равна

$$\Delta^2 = K_f(0, 0) - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_f^2(\omega_1, \omega_2)}{G_f(\omega_1, \omega_2) + g(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})/\pi^2 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} d\omega_1 d\omega_2. \quad (38)$$

Пример. Рассмотрим простую ситуацию, на примере которой легко проиллюстрировать, как изменяется величина Δ^2 (22) в зависимости от

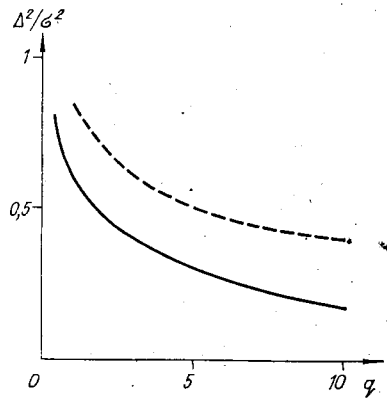


Рис. 1. Зависимость относительной точности восстановления от величины отношения сигнал — шум:

при использовании винеровской фильтрации (сплошная кривая) и регуляризирующей функции с оптимальным значением регуляризирующего параметра (штриховая)

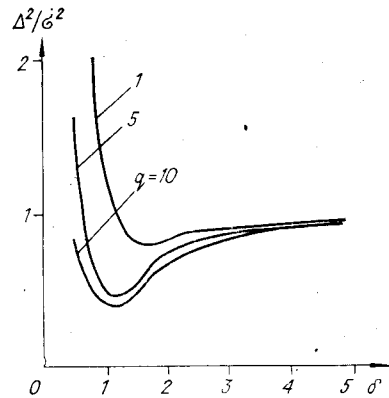


Рис. 2. Зависимость относительной точности восстановления от отношения

α/β при величинах сигнал — шум:

$q=1; 5; 10$

того, используется ли при восстановлении оптимальная винеровская фильтрация или же какая-то традиционная регуляризирующая функция.

Пусть $K_f(x, y) = \sigma^2 \exp[-(x^2 + y^2)/2b^2]$ и $k(s) = N_0 \delta(s)$. Тогда $g(\omega) = N_0$, $G_f(\omega_1, \omega_2) = G_0(\omega) = G^0 \exp(-\beta^2 \omega^2/2)$, где $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, $\beta^2 = 4\pi^2 b^2$, $G^0 = \sigma^2 \beta^2/2\pi$. В этом случае для безразмерной переменной $t = \beta\omega/\sqrt{2}$ равенство (22) принимает вид

$$\Delta^2 = \sigma^2 \left[1 - 2 \int_0^{\infty} \frac{t \exp(-2t^2)}{\exp(-t^2) + 8t/q(\beta) \sqrt{2\pi}} dt \right] \quad (39)$$

($q(\beta) = \sigma^2/\sigma_{\text{ш}}^2$, $\sigma_{\text{ш}}^2 = \pi^{3/2} N_0/2\beta^3$). Последняя величина согласно равенству (18) работы [1] есть дисперсия шума в плоскости восстановления; если шум в плоскости регистрации δ -коррелирован, его спектральная плотность равна N_0 , а восстановление осуществляется с регуляризирующей функцией $\exp(-\beta^2 \omega^2/2)$. С этой точки зрения величина $q(\beta)$ — отношение сигнал — шум. Характер изменения отношения Δ^2/σ^2 в зависимости от величины q показан на рис. 1 (сплошная кривая).

Теперь предположим, что все исходные предпосылки сохраняются, но восстановление осуществляется без учета винеровской фильтрации, а с привлечением регуляризирующей функции $W(\omega) = \exp(-\alpha^2 \omega^2/2)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \sigma^2 + 2\pi \int_0^{\infty} [\omega G_0(\omega) + \omega^2 g(\omega)] W_\alpha^2(\omega) d(\omega) - 4\pi \int_0^{\infty} \omega W_\alpha(\omega) G_0(\omega) d\omega = \\ &= \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{1+2\delta^2} - \frac{2}{1+\delta^2} + \frac{1}{\delta^3 q(\beta)} \right], \end{aligned} \quad (40)$$

где $q(\beta)$ определяется так же, как и в (39), а $\delta = \alpha/\beta$.

Из (40) видно, что для каждой величины q существует такое оптимальное значение δ , при котором Δ^2/σ^2 достигает минимума. Физически это означает, что оптимальное значение регуляризирующего параметра α зависит от радиуса корреляции флуктуаций анализируемого поля и мощности шума регистрации. Соответствующие зависимости представлены на рис. 2. Для найденных оптимальных значений δ на рис. 1 (штриховая кривая) показана зависимость Δ^2/σ^2 от величины q . Сравнение кривых рис. 1 дает количественное представление о том, как увеличивается величина Δ^2/σ^2 при отказе от винеровской фильтрации даже в том случае, когда параметр регуляризации выбирается оптимально. В частности, вид-

но, что с ростом отношения сигнал — шум это увеличение становится все более значительным.

Основные выводы. Введение винеровской фильтрации при томографировании однородных случайных полей позволяет обеспечить минимальное среднеквадратичное отклонение восстановленного изображения от наблюдавшейся реализации. При этом общая структура алгоритма восстановления не нарушается, а изменяется лишь вид промежуточного фильтра. Конкретный вид фильтра определяется тем, на каком этапе томографирования осуществляется регистрация промежуточной информации. В общем случае оптимальный фильтр должен перестраиваться при обработке проекций, соответствующих различным углам. При определенных ограничениях синтезирован субоптимальный фильтр, который оказывается одинаковым для всех проекций.

Приложение 1. Корреляционные функции и пространственные спектры случайных полей: $R(s, \varphi)$; $S(x, y)$; $S_n(x, y)$; $n_s(x, y)$; $R_o(s)$.

С учетом равенства (4) имеем

$$K_R(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) = \overline{R(s_1, \varphi_1) R(s_2, \varphi_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} \times \\ \times dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 K_f(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \exp \{ -i2\pi [\omega_1 (x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1 - s_1) + \\ + \omega_2 (x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2 - s_2)] \}. \quad (\text{П1})$$

Подставляя в (П1) равенство (1) и интегрируя по x_1, y_1, x_2, y_2 , получаем

$$K_R(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_3 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_4 G_f(\omega_3, \omega_4) \exp [i2\pi (\omega_1 s_1 + \\ + \omega_2 s_2)] \delta(\omega_1 \cos \varphi_1 - \omega_3) \delta(\omega_2 \cos \varphi_2 + \omega_3) \delta(\omega_1 \sin \varphi_1 - \omega_4) \delta(\omega_2 \sin \varphi_2 + \omega_4). \quad (\text{П2})$$

После интегрирования ω_3 и ω_4 приходим к равенству

$$K_R(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 G_f(\omega_1 \cos \varphi_1, \omega_1 \sin \varphi_1) \exp [i2\pi (\omega_1 s_1 + \\ + \omega_2 s_2)] \delta(\omega_1 \cos \varphi_1 + \omega_2 \cos \varphi_2) \delta(\omega_1 \sin \varphi_1 + \omega_2 \sin \varphi_2). \quad (\text{П3})$$

Так как произведение $\delta(\omega_1 \cos \varphi_1 + \omega_2 \cos \varphi_2) \delta(\omega_1 \sin \varphi_1 + \omega_2 \sin \varphi_2)$ эквивалентно $\delta(\omega_1 + \omega_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2) / |\omega_1|$, то окончательно получаем

$$K_R(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega|} G_f(\omega \cos \varphi_1, \omega \sin \varphi_1) e^{i2\pi \omega (s_1 - s_2)} d\omega \delta(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (\text{П4})$$

Перемножая функции $S(x_1, y_1)$ и $S(x_2, y_2)$, которые задаются соотношением (5), и усредняя получающееся при этом подынтегральное выражение, находим

$$K_s(x_1, y_1, x_2, y_2) = \overline{S(x_1, y_1) S(x_2, y_2)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 K_R(x_1 \cos \varphi_1 + \\ + y_1 \sin \varphi_1, \varphi_1; x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2, \varphi_2). \quad (\text{П5})$$

Подставляя (П4) в (П5) и интегрируя по φ_2 , имеем

$$K_s(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{|\omega|} \times \\ \times G_f(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) e^{i2\pi \omega [(x_1 - x_2) \cos \varphi + (y_1 - y_2) \sin \varphi]}. \quad (\text{П6})$$

Отсюда следует, что пространственный спектр случайного поля, образованного суммарным изображением информационного сигнала, равен

$$G_s(\omega_1, \omega_2) = G_f(\omega_1, \omega_2)/\pi^2(\omega_1^2 + \omega_2^2). \quad (\text{П7})$$

Аналогично после перемножения $S_n(x_1, y_1)$ и $S_n(x_2, y_2)$, которые определяются равенством (13), и усреднения находим

$$K_{sn}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \overline{S_n(x_1, y_1) S_n(x_2, y_2)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 K_n(x_1 \cos \varphi_1 - x_2 \cos \varphi_2 + y_1 \sin \varphi_1 - y_2 \sin \varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2). \quad (\text{П8})$$

Подставляя (2) в (П8), интегрируя по φ_2 и затем подставляя вместо $k(s)$ выражение (2), получаем

$$K_{sn}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^\infty d\omega \times \\ \times g(\omega) e^{i2\pi\omega[(x_1-x_2)\cos\varphi+(y_1-y_2)\sin\varphi]}. \quad (\text{П9})$$

Отсюда следует, что пространственный спектр случайного поля, образованного шумовой составляющей суммарного изображения, равен

$$G_{sn}(\omega_1, \omega_2) = g(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})/\pi^2 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \quad (\text{П10})$$

Учитывая соотношение (15), находим

$$K_n(x_1, y_1, x_2, y_2) = \overline{n_b(x_1, y_1) n_b(x_2, y_2)} = \int_{-\infty}^\infty dx_3 \int_{-\infty}^\infty dy_3 \int_{-\infty}^\infty dx_4 \int_{-\infty}^\infty dy_4 \times \\ \times K_{sn}(x_3, y_3, x_4, y_4) \gamma(x_1 - x_3, y_1 - y_3) \gamma(x_2 - x_4, y_2 - y_4). \quad (\text{П11})$$

Так как согласно (П9) K_{sn} является функцией разности координат $x_3 - x_4$ и $y_3 - y_4$, а согласно (П11) K_n — двойной последовательной сверткой функции K_{sn} с функцией γ , то и K_n также будет функцией разности координат $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, а соответствующий ей пространственный спектр

$$G_n(\omega_1, \omega_2) = G_{sn}(\omega_1, \omega_2) Q_j^2(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} g(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}), \quad (\text{П12})$$

где при переходе к последнему равенству были учтены (7) и (П10).

Из полученных выражений для корреляционных функций видно, что случайные поля, порождаемые функциями $S(x, y)$, $S_n(x, y)$ и $n_b(x, y)$, статистически однородные (в широком смысле), в то время как случайное поле проекций $R(s, \varphi)$ не является таковым. Однако подобным свойством обладает функция

$$R_0(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi R(s, \varphi) d\varphi. \quad (\text{П13})$$

Действительно,

$$K_0(s_1, s_2) = \overline{R_0(s_1) R_0(s_2)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\varphi_2 K_R(s_1, \varphi_1, s_2, \varphi_2). \quad (\text{П14})$$

Подставляя (П4) в (П14) и интегрируя по φ_2 , получаем

$$K_0(s_1, s_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|\omega|} \overline{G_f(\omega)} \exp[i2\pi\omega(s_1 - s_2)] d\omega, \quad (\text{П15})$$

где

$$\bar{G}_f(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G_f(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) d\varphi. \quad (\text{П16})$$

Откуда видно, что $K_0(s_1, s_2)$ есть функция разности $S_1 - S_2$, а спектральная плотность $G_0(\omega)$ случайного поля $R_0(s)$ равна

$$G_0(\omega) = \bar{G}_f(\omega) / \pi |\omega|. \quad (\text{П17})$$

Приложение 2. Определение функции q_0 по функции τ . Подставим (5) в (7) и сделаем замену переменных $x = s \cos \varphi - p \sin \varphi$, $y = s \sin \varphi + p \cos \varphi$, после чего имеем

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} ds R(s, \varphi) \int_{-\infty}^{\infty} dp \tau(s \cos \varphi - p \sin \varphi - x, p \cos \varphi + s \sin \varphi - y). \quad (\text{П18})$$

Обозначим через Q_{τ} фурье-образ функции τ , так что

$$\tau(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{\tau}(\omega_1, \omega_2) \exp[i2\pi(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)] d\omega_1 d\omega_2. \quad (\text{П19})$$

Подставим (П19) в (П18) и проинтегрируем по p . Тогда

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} ds R(s, \varphi) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 Q_{\tau}(\omega_1, \omega_2) \exp\{i2\pi[\omega_1(s \cos \varphi - x) + \omega_2(s \sin \varphi - y)]\} \delta(\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi). \quad (\text{П20})$$

Произведем замену переменных $\omega_1 = \omega \cos \theta$, $\omega_2 = \omega \sin \theta$, где $-\infty < \omega < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Тогда $\delta(\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi) = \delta(\omega \sin(\theta - \varphi)) = \delta(\theta - \varphi) / |\omega|$. Проинтегрировав с учетом этого равенства по θ , получаем

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} ds R(s, \varphi) \int_{-\infty}^{\infty} Q_{\tau}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) \exp[i2\pi\omega(s - x \cos \varphi - y \sin \varphi)] d\omega. \quad (\text{П21})$$

Сравнивая (П21) с (10), видим, что

$$q_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_{\tau}(\omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi) e^{i2\pi\omega t} d\omega. \quad (\text{П22})$$

Последнее равенство совместно с (П19) позволяет по функции τ определить функцию q_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев В. Н., Троицкий И. Н., Устинов Н. Д. Потенциальная точность томографического процесса // Автометрия. — 1986. — № 1.
2. Барретт Х. Х., Суинделл У. Аналоговые методы восстановления вида объекта при трансаксиальной томографии // ТИИЭР. — 1977. — № 1.
3. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978, ч. 2.
4. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. — М.: Мир, 1983.
5. Возенкрафт Дж., Джейкобс И. Теоретические основы техники связи. — М.: Мир, 1968.

Поступила в редакцию 3 февраля 1986 г.