

Поступила в редакцию 21 марта 1983 г.

УДК 535.42.535.31

М. П. АНИСИМОВ, А. М. СГОННОВ

(Кемерово)

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СПЕКТР ПРОТЯЖЕННОГО КРУГЛОГО ОТВЕРСТИЯ

Одной из задач контрольно-измерительной техники является контроль и измерение геометрических параметров протяженных отверстий (фильтры, волокна) по их пространственным спектрам (дифракционным картинам Фраунгофера). Преимущество спектральных методов заключается в том, что они благодаря инвариантности спектра к пространственным смещениям объекта позволяют проводить контроль и измерение параметров в динамике. В связи с этим важно выяснить влияние на спектр отверстия его протяженности вдоль оптической оси системы. В некоторой степени указанная задача решена для щелевой диафрагмы с объемным краем в [1], где предложен модифицированный оптико-геометрический (МОГ) метод расчета дифракции Фраунгофера на объемных телах. В данной работе рассматривается дифракция Фраунгофера на протяженном круглом отверстии.

Согласно модифицированному оптико-геометрическому приближению спектр протяженного объекта вычисляется следующим образом [1]:

$$\Phi_{\text{МОГ}}(x, y) = \mathcal{F} \left\{ f(\xi, \eta) g \left(\xi + \frac{hx}{2F}, \eta + \frac{hy}{2F} \right) \right\}, \quad (1)$$

где x, y — координаты в частотной плоскости; $f(\xi, \eta), g(\xi', \eta')$ — бинарные функции пропускания передней и задней граней объекта соответственно; h — протяженность объекта вдоль оптической оси системы; F — фокусное расстояние Фурье-объектива; \mathcal{F} — оператор преобразования Фурье.

Для круглого отверстия диаметром D (рис. 1)

$$f(\xi, \eta) = f(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \leq D/2; \\ 0, & \rho > D/2, \end{cases} \quad (2)$$

$$g(\xi', \eta') = g(\rho') = \begin{cases} 1, & \rho' \leq D/2; \\ 0, & \rho' > D/2, \end{cases} \quad (3)$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$; $\rho' = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$; (ξ', η') — декартова система координат, смещенная относительно системы (ξ, η) на $\xi_0 = -\frac{hx}{2F}$, $\eta_0 = -\frac{hy}{2F}$.

Как видно из рис. 1,

$$f(\xi, \eta) g \left(\xi + \frac{hx}{2F}, \eta + \frac{hy}{2F} \right) = t \left(\xi + \frac{hx}{4F}, \eta + \frac{hy}{4F} \right), \quad (4)$$

тогда

$$\Phi_{\text{МОГ}}(x, y) = \mathcal{F} \left\{ t \left(\xi + \frac{hx}{4F}, \eta + \frac{hy}{4F} \right) \right\} = \exp \left[j \left(\frac{kx^2}{4F^2} + \frac{ky^2}{4F^2} \right) \right] \mathcal{F} \{ t(\xi, \eta) \}, \quad (5)$$

где $k = 2\pi/\lambda$.

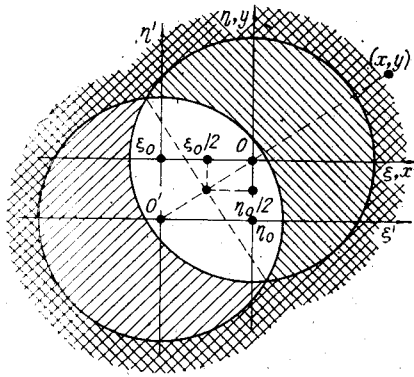


Рис. 1

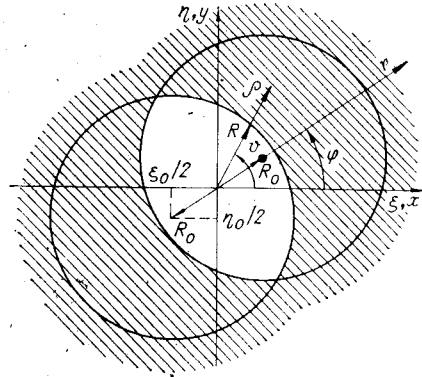


Рис. 2

В полярных координатах ρ, ϑ [2] уравнение контура (рис. 2), в пределах которого $t(\xi, \eta) = t(\rho, \vartheta) = 1$, имеет следующий вид:

$$R^2 \pm 2R_0 R \cos(\vartheta - \varphi) + R_0^2 = D^2/4, \quad (6)$$

где согласно рис. 1 и 2

$$R_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2} = \frac{h}{4F} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{hr}{4F}; \quad (7)$$

r, φ — полярные координаты в частотной плоскости; (\pm) соответствует $\left(\begin{array}{l} -\pi/2 \leq \vartheta - \varphi \leq \pi/2 \\ \pi/2 \leq \vartheta - \varphi \leq 3\pi/2 \end{array} \right)$.

Решая уравнение (6), находим

$$R(\alpha) = \sqrt{\frac{D^2}{4} - R_0^2 \sin^2(\alpha) \mp R_0 \cos \alpha}, \quad (8)$$

здесь (\mp) соответствует $\left(\begin{array}{l} -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2 \\ \pi/2 \leq \alpha \leq 3\pi/2 \end{array} \right)$; $\alpha = \vartheta - \varphi$.

Тогда

$$\mathcal{F}\{t(\rho, \vartheta)\} = \Phi(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \exp\left(-j \frac{kr}{F} \rho \cos \alpha\right) \rho d\rho d\alpha. \quad (9)$$

Вычисление интеграла в правой части выражения (9) представляет собой довольно сложную задачу. С целью ее упрощения необходимо вновь обратиться к уравнению (6), записав его в следующем виде:

$$(R + R_0)^2 [1 - m] = \frac{D^2}{4}, \quad -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2, \quad (10)$$

где

$$m = \frac{4R_0 R}{(R + R_0)^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (11)$$

Подставляя в (11) значение R , выведенное формулой (8), получаем

$$m(\alpha) = \frac{4R_0 R(\alpha) \sin^2(\alpha/2)}{D^2/4 + 4R_0 R(\alpha) \sin^2(\alpha/2)}. \quad (12)$$

Так как $dm(\alpha)/d(\alpha) = K(\alpha) \sin \alpha$, где $K(\alpha) > 0$, то $m(\alpha)$ принимает минимальное значение, равное нулю, при $\alpha = 0$ и максимальное m_{\max} на границах диапазона изменения α , т. е. при $\alpha = \pm\pi/2$.

Отсюда вытекает, что

$$m(\alpha) \leq m_{\max} = \frac{4p \sqrt{1 - 4p^2}}{1 + 4p \sqrt{1 - 4p^2}} \leq \frac{1}{3}, \quad (13)$$

где $p = R_0/D$.

Допуская, что при $m_{\max} \leq 0,2$ величину $m(\alpha)$ можно считать пренебрежимо малой по сравнению с единицей, и учитывая (7), определяем область изменения r :

$$r \leq \frac{DF}{4h}, \quad (14)$$

в которой будут справедливы полученные ниже приближения.

При выполнении условия (14) из уравнения (10) следует, что

$$R = \frac{D}{2} - R_0. \quad (15)$$

Используя величину R из формулы (15) в качестве верхнего предела интегрирования в выражении (9), проводя интегрирование и подставляя полученное выражение в (5), находим

$$\Phi_{\text{мог}}(r) = \begin{cases} A_0 \left(1 - \frac{hr}{2DF}\right) \frac{2J_1 \left[\frac{\pi D r}{\lambda F} \left(1 - \frac{hr}{2DF}\right)\right]}{\frac{\pi D}{\lambda F} r} \exp\left(j \frac{\pi h r^2}{2\lambda F^2}\right), & r \leq \frac{r_0}{4}; \\ 0, & r > r_0; \end{cases} \quad (16)$$

где $r_0 = DF/h$ — «частота» отсечки; $A_0 = \pi D^2/4$.

Выражение (16) с достаточно хорошим приближением описывает спектр протяженного круглого отверстия. В предельном случае $h=0$ оно переходит в уже известное выражение

$$\Phi_0(r) = 2A_0 J_1\left(\frac{\pi D}{\lambda F} r\right) \left/ \left(\frac{\pi D}{\lambda F} r\right), \quad (17)$$

описывающее спектр плоского круглого отверстия.

Из сравнения выражений (16) и (17) следует, что наличие «объемности» приводит к появлению фазовой и изменению амплитудной компонент спектра и уменьшению частоты осцилляций амплитудной компоненты с увеличением r .

Спектральные методы контроля и измерения основаны на регистрации и анализе энергетического спектра объектов, т. е. величины $|\Phi(r)|^2 = \Phi(r)\Phi^*(r)$. Следовательно, изменения $\Phi(r)$, вызванные влиянием конечной протяженности объектов, приводят к изменениям как величины интенсивности света в фиксированных точках энергетического спектра, так и положения экстремумов в этом спектре. Пренебрежение «объемностью» отверстия при пользовании формулой (17) приводит к погрешности в определении его диаметра. Формула (16), учитывающая протяженность отверстия, позволяет существенно уменьшить отмеченную погрешность и дает возможность контроля и измерения самой протяженности, расширяя функциональные возможности спектральных методов бесконтактного и высокопроизводительного контроля и измерения геометрических параметров реальных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коронкевич В. П., Кривенко Б. В., Михляев С. В., Чугуй Ю. В. Оптико-геометрический метод расчета дифракции Фраунгофера на объемных телах // Автотметрия. — 1980. — № 2.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 13 ноября 1985 г.