Подставим (П3) в (П1) и проинтегрируем по t_2. Тогда

$$\tau_\alpha^0(x_1-x_2,\,y_1-y_2)=\int_0^\pi d\varphi_1\int_0^\pi d\varphi_2\int_{-\infty}^{\infty}dt_1 w_\alpha(t_1)\,w_\alpha\left(-t_1\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}\right)|t_1|^2\frac{|\cos\varphi_1|}{|\cos\varphi_2|}\times$$

$$\times\exp\left\{-2\pi i\left[(x_1\cos\varphi_1+y_1\sin\varphi_1)t_1-t_1(x_2\cos\varphi_2+y_2\sin\varphi_2)\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}\right]\right\}\times$$

$$\times\delta\left(t_1\sin\varphi_1-t_1\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}\sin\varphi_2\right). \qquad (\text{П}4)$$

Оставшаяся δ-функция эквивалентна $\delta(\varphi_2-\varphi_1)/|t_1|$. Интегрируя (П4) по φ_2 и учитывая, что $w_\alpha(t)=w_\alpha(-t)$, получаем

$$\tau_\alpha^0(x_1-x_2,\,y_1-y_2)=\int_0^\pi d\varphi\int_{-\infty}^{\infty}dt w_\alpha^2(t)\,|t|\exp\{i2\pi t\,[(x_1-x_2)\cos\varphi+(y_1-y_2)\sin\varphi]\}. \qquad (\text{П}5)$$

Для подынтегральной функции область интегрирования $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $-\infty\leqslant t\leqslant\infty$ эквивалентна области $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant t\leqslant\infty$. С учетом этого замечания равенство (П5) тождественно равенству (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Моисеев В. Н., Троицкий И. Н., Устинов Н. Д.** Потенциальная точность томографического процесса. Ч. I. Анализ флуктуационных характеристик аддитивного фона в восстановленном изображении. Функционал плотности вероятностей//Автометрия.— 1986.— № 1.
2. **Уилкс С.** Математическая статистика.— М.: Наука, 1967.
3. **Луитт Р. М.** Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований//ТИИЭР.— 1983.— Т. 71, № 3.
4. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 22 ноября 1984 г.

УДК 621.391

И. Н. ЯВОРСКИЙ

(Львов)

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ОЦЕНОК ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРИОДИЧЕСКИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Вероятностные модели в виде периодически коррелированных случайных процессов (ПКСП) отражают характерные особенности весьма широкого круга сигналов и явлений с ритмической структурой, обладающих определенной повторяемостью свойств во времени (пространстве) [1—4]. Это обусловливает практическую важность разработки методов оценивания вероятностных характеристик этого класса процессов, изучение статистических свойств возможных оценок. Один из методов определения оценок моментных функций ПКСП основан на усреднении отсчетов, которые берутся через интервалы времени, кратные периоду коррелированности процесса [3]. При этом оценки характеристик представляют собой ряд дискретных значений на периоде их изменения. Промежуточные значения оценок находятся по полученным дискретам методом интерполяции. Анализу вероятностных свойств интерполяционных формул для оценок математического ожидания и корреляционной функции ПКСП и посвящена данная работа.

Математическое ожидание и корреляционная функция ПКСП есть периодические функции времени

$$m(t)=E\xi(t)=m(t+T),\ b(t,u)=E\overset{\circ}{\xi}(t+u)\overset{\circ}{\xi}(t)=b(t+T,u),$$

поэтому вполне естественно их изменение во времени представлять на всем периоде. В этом случае удобно применять тригонометрическую интерполяцию. Предположим, что дискретные значения характеристик получены для моментов времени $t_n=n\Delta t$, $\Delta t=T/(2N+1)$, $n=\overline{0,2N}$. Тригонометрический полином для оценки математического ожидания тогда будет иметь вид

$$\widehat{m}(t)=\sum_{n=0}^{2N}\widehat{m}(n\Delta t)\varphi_n(t), \tag{1}$$

где $$\varphi_n(t)=\sin\left[\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)\right]\left[(2N+1)\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-n\Delta t)\right]\right]^{-1},$$

а оценка $\widehat{m}(n\Delta t)$ находится по формуле

$$\widehat{m}(n\Delta t)=\frac{1}{M}\sum_{p=0}^{M-1}\xi(n\Delta t+pT). \tag{2}$$

Принимая во внимание несмещенность статистики (2) для математического ожидания оценки (1), получаем

$$E\widehat{m}(t)=\sum_{q=-N}^{N}e^{iq\frac{2\pi}{T}t}\sum_{r=-\infty}^{\infty}m_{q+r(2N+1)}, \tag{3}$$

где $m_{q+r(2N+1)}$ — фурье-компоненты математического ожидания. Из выражения (3) следует, что оценка (1) смещенная. Величина смещения определяется шагом дискретизации процесса, амплитудой и количеством компонент, которые содержит математическое ожидание процесса. Предположим, что число таких компонент конечно и равно N_1. В этом случае смещения можно избежать, если величину N выбирать таким образом, чтобы первые же номера $q\pm(2N+1)$ соответствовали тем компонентам, которые в представлении математического ожидания уже равны нулю: $|q\pm(2N+1)|\geqslant N_1+1$. Это требование приводит к следующему условию для интервала дискретизации ПКСП: $\Delta t\leqslant T/(2N_1+1)$.

Для дисперсии оценки (1) находим

$$D[\widehat{m}(t)]=\frac{1}{M}\sum_{p=-M+1}^{M-1}\left(1-\frac{|p|}{M}\right)\sum_{m,n=0}^{2N}b(n\Delta t,(m-n)\Delta t+pT)\varphi_n(t)\varphi_m(t).$$

Величину ее, как видно, задают значения дисперсии оценки математического ожидания в узловых точках. При увеличении числа обрабатываемых периодов M и выполнении условия

$$\lim_{|u|\to\infty}b(t,u)=0 \tag{4}$$

дисперсия в узловых точках стремится к нулю. Тогда безгранично уменьшается и дисперсия промежуточных значений оценки математического ожидания.

Перейдем к рассмотрению оценок корреляционной функции. Изменение их во времени аналогично формуле (1) также будем представлять в виде

$$\widehat{b}(t,u)=\sum_{n=0}^{2N}\widehat{b}(n\Delta t,u)\varphi_n(t). \tag{5}$$

Для определения промежуточных значений по сдвигу u воспользуемся линейной интерполяцией

Статистики, которые могут быть сформированы для определения корреляционной функции ПКСП на основании отсчетов через интервалы времени, кратные периоду коррелированности:

$$\widehat{b}(n\Delta t, j\Delta u) = \frac{1}{M}\sum_{p=0}^{M-1}[\xi(n\Delta t + pT) - \widehat{m}(n\Delta t + pt)][\xi(n\Delta t + j\Delta u + pT) - \\ - \widehat{m}(n\Delta t + j\Delta u + pT)]; \tag{7}$$

$$\widehat{b}(n\Delta t, j\Delta u) = \frac{1}{M}\sum_{p=0}^{M-1}\xi(n\Delta t + pT)\,\xi(n\Delta t + j\Delta u + pT) - \widehat{m}(n\Delta t)\widehat{m}(n\Delta t + j\Delta u); \tag{8}$$

$$\widehat{b}(n\Delta t, j\Delta u) = \frac{1}{M}\sum_{p=0}^{M-1}[\xi(n\Delta t + pT)\,\xi(n\Delta t + j\Delta u + pT) - \\ - \widehat{m}(n\Delta t + pT)\,\widehat{m}(n\Delta t + j\Delta u + pT)], \tag{9}$$

имеют при конечном M ненулевые ошибки смещения. При этом

$$E\widehat{b}(n\Delta t, j\Delta u) = \left(1 - \frac{1}{M}\right)b(n\Delta t, j\Delta u) - \frac{1}{M}\sum_{p=-M+1}^{M-1}\frac{|p|}{M}b(n\Delta t, j\Delta u + pT) \tag{10}$$

для оценки (7), а для оценок (8), (9)

$$E\widehat{b}(n\Delta t, j\Delta u) = b(n\Delta t, j\Delta u) - \frac{1}{M}\sum_{p=-M+1}^{M-1}\left(1 - \frac{|p|}{M}\right)b(n\Delta t, j\Delta u + pT). \tag{11}$$

Используя формулы (10), (11) и представление

$$b(n\Delta t, j\Delta u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}B_k(j\Delta u)\,e^{ik\frac{2\pi}{2N+1}n},$$

получаем

$$E\widehat{b}(t, u) = \sum_{q=-N}^{N}e^{iq\frac{2\pi}{T}t}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[(1-\lambda)\,\mathscr{E}^{(i)}_{q+r(2N+1)}(j\Delta u) - \lambda\mathscr{E}^{(i)}_{q+r(2N+1)}[(j+1)\Delta u]\right], \tag{12}$$

где для статистики (7) ($i = 1$)

$$\mathscr{E}^{(1)}_{q+r(2N+1)}(j\Delta u) = \left(1 - \frac{1}{M}\right)B_{q+r(2N+1)}(j\Delta u) - \\ - \frac{1}{M}\sum_{p=-M+1}^{M-1}\frac{|p|}{M}B_{q+r(2N+1)}(j\Delta u + pT),$$

а для статистики (8) и (9) ($i = 2$)

$$\mathscr{E}^{(2)}_{q+r(2N+1)}(j\Delta u) = B_{q+r(2N+1)}(j\Delta u) - \\ - \frac{1}{M}\sum_{p=-M+1}^{M-1}\left(1 - \frac{|p|}{M}\right)B_{q+r(2N+1)}(j\Delta u + pT).$$

Видно, что смещение оценок корреляционной функции, возникающее в узловых точках из-за конечной длины обрабатываемой реализации, приводит к увеличению смещения промежуточных значений, связанного с дискретизацией как по времени, так и по сдвигу. Если предположить, что корреляционные компоненты $B_k(j\Delta u)$ с номерами $|k| \geqslant N_2$ тождественно равны нулю, то смещения из-за временной дискретизации не происходит при $\Delta t \leqslant 1/(2N_2+1)$. Формула (12) тогда принимает вид

$$E\hat{b}(t, u) = (1-\lambda)\mathscr{E}^{(i)}(t, j\Delta u) + \lambda\mathscr{E}^{(i)}[t, (j+1)\Delta u],$$

где

$$\mathscr{E}^{(i)}(t, j\Delta u) = \sum_{q=-N_2}^{N_2} \mathscr{E}_q^{(i)}(j\Delta u)\, e^{iq\frac{2\pi}{T}t}.$$

Наибольшее по модулю значение смещения имеем при $\lambda = 1/2$:

$$|\varepsilon^{(i)}| = \frac{1}{8} \sup_{\vartheta \in [j\Delta u, (j+1)\Delta u]} \ddot{\mathscr{E}}^{(i)}(t, \vartheta)\, \Delta u^2.$$

Если выполняется условие (4), то при $M \to \infty$ $\mathscr{E}^{(i)}(t, j\Delta u) \to b(t, j\Delta u)$.

Найдем дисперсии оценки (5), (6) для различных статистик корреляционной функции, ПКСП при этом будем предполагать гауссовым. Имеем

$$D[\hat{b}(t, u)] = \sum_{m,n=0}^{2N} [(1-\lambda)^2 G(m\Delta t, n\Delta t, j\Delta u, j\Delta u) +$$
$$+ 2\lambda(1-\lambda) G(m\Delta t, n\Delta t, j\Delta u, (j+1)\Delta u) +$$
$$+ \lambda^2 G(m\Delta t, n\Delta t, (j+1)\Delta u, (j+1)\Delta u)]\, \varphi_m(t)\, \varphi_n(t). \quad (13)$$

Здесь $G(t_1, t_2, u_1, u_2)$ — корреляционная функция оценок:

$$G(t_1, t_2, u_1, u_2) = E\hat{b}(t_1, u_1)\hat{b}(t_2, u_2) - E\hat{b}(t_1, u_1)E\hat{b}(t_2, u_2).$$

Введем для удобства функцию

$$G_{pqkl}(t_1, t_2, u_1, u_2) = b(t_1, t_2 - t_1 + (k-p)T)\, b(t_1 + u_1, t_2 - t_1 + u_2 - u_1 +$$
$$+ (l-q)T) + b(t_1, t_2 - t_1 + u_2 + (l-p)T)\, b(t_2, t_1 - t_2 + u_1 + (q-k)T).$$

Как легко убедиться, эта функция обладает свойством

$$G_{pqkl} = G_{p-n, q-n, k-n, l-n}. \quad (14)$$

Здесь для краткости в обозначениях опущены переменные. В дальнейшем для функции $G_{pqkl}(t_1, t_2, u_1, u_2)$ будем применять аналогичную запись. Используя соотношение (14), после громоздких, но не вызывающих принципиальных затруднений преобразований получаем:

а) для статистики (7)

$$G(t_1, t_2, u_1 u_2) = \frac{1}{M} \sum_{p=-M+1}^{M-1} \left(1 - \frac{|p|}{M}\right) \left[G_{00pp} - \frac{1}{M} \sum_{q=0}^{M-1} [G_{0,0,p,q+p} + \right.$$
$$+ G_{0,0,q+p,p} + G_{p,p+q,0,0} + G_{p+q,p,0,0}] + \frac{1}{M^2} \sum_{q,k=0}^{M-1} [G_{ppqk} + G_{0,k,p,p+q} + \quad (15)$$
$$+ G_{0,k,q+p,p} + G_{k,0,p,p+q} + G_{k,0,p+q,p} + G_{qkpp}] - \frac{1}{M^3} \sum_{q,k,l=0}^{M-1} \left[G_{0,l,p+k,p+q} + \right.$$
$$\left.\left. + G_{q,0,k+p,p+l} + G_{q,l,p,p+k} + G_{k,l,p+q,p} + \frac{1}{M^4} \sum_{q,k=0}^{M-1} \sum_{l,r=0}^{M-1} G_{k,l,p+q,p+r} \right]\right];$$

б) для статистики (8)

$$G(t_1, t_2, u_1, u_2) = \frac{1}{M} \sum_{p=-M+1}^{M-1} \left(1 - \frac{|p|}{M}\right) G_{00pp} - \frac{1}{M^3} \sum_{p,q,l=0}^{M-1} [G_{ppql} + G_{qlpp}] + \frac{1}{M^4} \sum_{p,q=0}^{M-1} \sum_{l,r=0}^{M-1} G_{k,l,p+q,p+r}; \quad (16)$$

в) для статистики (9)

$$G(t_1, t_2, u_1, u_2) = \frac{1}{M} \sum_{p=-M+1}^{M-1} \left(1 - \frac{|p|}{M}\right) \left[G_{00pp} - \frac{1}{M^2} \sum_{k,q=0}^{M-1} \left[G_{ppkq} + G_{kqpp} + \frac{1}{M^4} \sum_{q,k=0}^{M-1} \sum_{l,r=0}^{M-1} G_{k,l,p+q,p+r} \right] + F_p(t_1, t_2, u_1, u_2) \right]. \quad (17)$$

В выражении (17) обозначено:

$$F_p(t_1, t_2, u_1, u_2) = m(t_1) m(t_2) f_p(t_1 + u_1, t_2 + u_2) + m(t_1 + u_1) m(t_2) f_p(t_1, t_2 + u_2) + m(t_1) m(t_2 + u_2) f_p(t_1 + u_1, t_2) + m(t_1 + u_1) m(t_2 + u_2) f_p(t_1, t_2);$$

$$f_p(t_1, t_2) = b(t_1, t_2 - t_1 + pT) - \frac{1}{M} \sum_{q=0}^{M-1} [b(t_1, t_2 - t_1 + (p+q)T) + b(t_1, t_2 - t_1 + (p-q)T)] + \frac{1}{M} \sum_{q=0}^{M-1} [b(t_1, t_2 - t_1 + pT + (k-q)T)].$$

Видно, что корреляционная функция оценки (9) зависит от величины математического ожидания ПКСП. Это дает определенные преимущества способам оценивания (7) и (8) перед (9). Сравнение корреляционных функций (15) и (16) показывает, что различие между ними для больших M будет незначительным. При выполнении предельного соотношения (4) для всех статистик $G(t_1, t_2, u_1, u_2) \to 0$ при $M \to \infty$.

Подстановкой соотношений (15)—(17) в выражение (13) находим дисперсию оценки промежуточных значений корреляционной функции ПКСП при различных способах ее определения. Анализ таких выражений показывает, что определяющую роль для ее величины имеет дисперсия определения оценок в узлах интерполяции. Если последняя очень мала (обрабатывается реализация большой длительности), то незначительной будет и дисперсия интерполяции. Смещения, как было показано выше, таким свойством не обладают. Они не равны нулю даже при нулевых значениях смещений оценок в узловых точках. Поэтому их величины окончательно определяются интервалами дискретизации как по времени, так и по сдвигу.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рытов С. М.** Введение в статистическую радиофизику.— М.: Наука, 1976, ч. 1.
2. **Жуковский Е. Е., Киселева Т. Л., Мандельштам С. М.** Статистический анализ случайных процессов.— Л.: Гидрометеоиздат, 1976.
3. **Драган Я. П., Яворский И. Н.** Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы.— Киев: Наук. думка, 1982.
4. **Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н.** Применение методов теории периодически коррелированных случайных процессов для вероятностного анализа океанологических временных рядов//Вероятностный анализ и моделирование океанологических процессов.— Л.: Гидрометеоиздат, 1984.
5. **Мирский Г. Я.** Аппаратурное определение характеристик случайных процессов.— М.— Л.: Энергия, 1967.
6. **Волгин В. В., Каримов Р. К.** Оценка корреляционных функций в промышленных системах управления.— М.: Энергия, 1979.

7. **Пиржуков И. Я.** Выбор основных параметров дискретного метода измерения корреляционной функции случайных процессов и полей//Методы представления и аппаратурный анализ случайных процессов и полей: IV Всесоюз. симп. Секц. III. Л.: ВНИИЭП, 1971.

Поступила в редакцию 21 марта 1983 г.

УДК 535.42.535.31

М. П. АНИСИМОВ, А. М. СГОННОВ

(Кемерово)

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СПЕКТР ПРОТЯЖЕННОГО КРУГЛОГО ОТВЕРСТИЯ

Одной из задач контрольно-измерительной техники является контроль и измерение геометрических параметров протяженных отверстий (фильтры, волоки) по их пространственным спектрам (дифракционным картинам Фраунгофера). Преимущество спектральных методов заключается в том, что они благодаря инвариантности спектра к пространственным смещениям объекта позволяют проводить контроль и измерение параметров в динамике. В связи с этим важно выяснить влияние на спектр отверстия его протяженности вдоль оптической оси системы. В некоторой степени указанная задача решена для щелевой диафрагмы с объемным краем в [1], где предложен модифицированный оптико-геометрический (МОГ) метод расчета дифракции Фраунгофера на объемных телах. В данной работе рассматривается дифракция Фраунгофера на протяженном круглом отверстии.

Согласно модифицированному оптико-геометрическому приближению спектр протяженного объекта вычисляется следующим образом [1]:

$$\Phi_{\text{МОГ}}(x, y) = \mathcal{F}\left\{f(\xi,\eta)\, g\left(\xi + \frac{hx}{2F},\ \eta + \frac{hy}{2F}\right)\right\}, \qquad (1)$$

где x, y — координаты в частотной плоскости; $f(\xi, \eta)$, $g(\xi', \eta')$ — бинарные функции пропускания передней и задней граней объекта соответственно; h — протяженность объекта вдоль оптической оси системы; F — фокусное расстояние фурье-объектива; $\mathcal{F}$ — оператор преобразования Фурье.

Для круглого отверстия диаметром D (рис. 1)

$$f(\xi, \eta) = f(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \leqslant D/2; \\ 0, & \rho > D/2, \end{cases} \qquad (2)$$

$$g(\xi', \eta') = g(\rho') = \begin{cases} 1, & \rho' \leqslant D/2; \\ 0, & \rho' > D/2, \end{cases} \qquad (3)$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$; $\rho' = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$; (ξ', η') — декартова система координат, смещенная относительно системы (ξ, η) на $\xi_0 = -\frac{hx}{2F}$, $\eta_0 = -\frac{hy}{2F}$.

Как видно из рис. 1,

$$f(\xi, \eta)\, g\left(\xi + \frac{hx}{2F},\ \eta + \frac{hy}{2F}\right) = t\left(\xi + \frac{hx}{4F},\ \eta + \frac{hy}{4F}\right), \qquad (4)$$

тогда

$$\Phi_{\text{МОГ}}(x, y) = \mathcal{F}\left\{t\left(\xi + \frac{hx}{4F},\ \eta + \frac{xy}{4F}\right)\right\} = \exp\left[j\left(\frac{khx^2}{4F^2} + \frac{khy^2}{4F^2}\right)\right]\mathcal{F}\{t(\xi, \eta)\}, \qquad (5)$$

где $k = 2\pi/\lambda$.