

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шереметьев А. Г. Статистическая теория лазерной связи.— М.: Связь, 1974.
2. Перина Я. Когерентность света.— М.: Мир, 1974.
3. Глаубер Р. Оптическая когерентность и статистика фотонов//Квантовая оптика и квантовая радиофизика.— М.: Мир, 1966.
4. Левин Б. Р. Георгетические основы статистической радиотехники.— М.: Сов. радио, 1969.
5. Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С. Статистика отсчетов когерентного сигнала на фоне шума//Укр. физ. журн.— 1983.— Т. 28, № 12.

Поступила в редакцию 14 августа 1984 г.

УДК 621.391 : 681.3.01

В. Н. ХУДИК  
(Новосибирск)

### ВЛИЯНИЕ ИСКАЖЕНИЙ НА ИТЕРАЦИОННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ В СИСТЕМЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Оптические аналоговые вычислительные машины (ОАВМ), принцип работы которых основан на итерационных алгоритмах, обладают значительно большими функциональными возможностями, чем пассивные оптические системы [1]. Выбор конкретного алгоритма определяется характером решаемой задачи. При реставрации изображений ввиду относительной простоты целесообразно в ОАВМ использовать алгоритм ван Циттера. Его реализация осуществляется в гибридной оптико-электронной системе (ГОЭС) с обратной связью, содержащей блок ввода изображений, интегратор, блок операторных преобразований, блок контроля, причем в электронно-цифровой части системы — интеграторе — производится хранение информации и арифметические операции (вычитание, сложение, умножение), в оптико-электронной части — блоке операторных преобразований — наиболее трудоемкие интегральные преобразования.

Такие системы, предназначенные для реставрации изображений [2, 3], позволяют отказаться от построения инверсного фильтра и обладают в то же время определенной гибкостью, так как имеется возможность менять число итераций и некоторые параметры алгоритма. Однако надо иметь в виду, что точность вычислений ГОЭС, как и всякой аналоговой вычислительной машины, значительно ниже точности ЭВМ, так как в аналоговой системе присутствуют аппаратные шумы и может происходить накопление систематических искажений изображения при его циркуляции по петле обратной связи.

Таким образом, в связи с применением алгоритма ван Циттера в ОАВМ представляется важным изучение работы этого алгоритма при воздействии различных искажающих факторов. В такой постановке эта задача лишь отчасти пересекается с задачей восстановления итерационными алгоритмами при наличии определенных ограничений на сигнал [4].

В [5] было исследовано влияние проекционного сдвига и расфокусировки в петле обратной связи ГОЭС на динамику восстановления изображения. В данной работе рассмотрим воздействие следующих искажающих факторов: 1) систематические модуляционные искажения в поле изображения; 2) нелинейность характеристик базовых элементов петли обратной связи; 3) пороговая нелинейность электронно-цифровой части системы (причем остановимся на случаях, характерных для систем [2, 3]).

Считая для простоты задачу одномерной, рассмотрим интегральное уравнение

$$\int h(x-x') S(x') dx' = f(x), \quad (1)$$

или в символическом виде  $h(x) \otimes S(x) = f(x)$ , где  $\otimes$  — операция свертки. Относительно функции рассеяния точки (ФРТ)  $h(x)$  будем предполагать, что соответствующая ей передаточная функция  $H(\omega) = \int h(x) e^{-i\omega x} dx$  положительна при всех  $\omega$  и выполняется условие нормировки:  $\max_{\omega} H(\omega) = 1$ .

Всюду ниже, если противное не оговорено, считаем, что размытое изображение  $f(x)$  задано точно и, таким образом, существует единственное изображение  $S(x)$ , удовлетворяющее уравнению (1). Это изображение ищем с помощью алгоритма ван Циттерта:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= f(x); \\ S_{n+1}(x) &= S_n(x) + \alpha [f(x) - h(x) \otimes S_n(x)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

в который последовательно будет введен ряд искажающих воздействий, присутствующих в реальной ГОЭС. Оценку алгоритма (2) при различных искажениях в ГОЭС удобно производить сравнением результатов восстановления некоторой эталонной задачи. (Целесообразность такого подхода особенно очевидна при наличии нелинейных искажений, когда возможности оценки другими способами ограничены.) Типичная реставрационная задача в оптике — восстановление границ объектов, при переходе через которые скачком меняется интенсивность. Моделируя такую ситуацию, в качестве исходного сигнала (т. е. искомой функции  $S(x)$  в уравнении (1)) возьмем ступенчатую функцию

$$S(x) = \sum a_i \eta(x - x_i),$$

где  $\eta(x)$  — элементарная ступенчатая функция:  $\eta(x) = 0$  при  $x < 0$ ,  $\eta(x) = 1$  при  $x \geq 0$ .

Модуляционные искажения в поле изображения являются систематическим искажающим воздействием, которое можно описать, умножая изображение  $S(x)$  на искажающую функцию  $\varphi(x)$ . (Здесь предполагаем, что модуляционные искажения возникают в петле обратной связи ГОЭС до свертки изображения  $S(x)$  с функцией рассеяния точки  $h(x)$ .) Функция  $\varphi(x)$  ограничена и положительна, при малых модуляционных искажениях она близка к единице.

С учетом модуляционных помех алгоритм ван Циттерта принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= f(x); \\ S_{n+1}(x) &= S_n(x) + \alpha \left[ f(x) - \int h(x - x') \varphi(x') S_n(x') dx' \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Заменой переменных

$$\begin{aligned} y_n(x) &= \sqrt{\varphi(x)} S_n(x); \quad f_1(x) = \sqrt{\varphi(x)} f(x); \\ h_1(x, x') &= h(x - x') \sqrt{\varphi(x) \varphi(x')} \end{aligned} \quad (4)$$

алгоритм (3) приводится к обычной форме записи алгоритма ван Циттерта с инвариантной относительно линейного сдвига ФРТ:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= f_1(x); \\ y_{n+1}(x) &= y_n(x) + \alpha \left[ f_1(x) - \int h_1(x, x') y_n(x') dx' \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

При четной нормированной ФРТ функция  $h_1(x, x')$  — ядро положительно определенного симметричного оператора и алгоритм (5), а вместе с ним и (3), сходится [6], когда параметр  $\alpha$  лежит в интервале  $0 < \alpha < 2/\|h_1\|$ . Норма  $\|h_1\|$  есть минимальное число при любой интегрируемой с квадратом функции  $y(x)$ , удовлетворяющее неравенству

$$\iint h_1(x, x') y(x) y(x') dx dx' / \int y^2(x) dx \leq \|h_1\|.$$

Для  $h_1(x, x')$ , вычисляемой по формуле (4),  $\|h_1\| \leq \|h\| \max \varphi(x) = \max \varphi(x)$  ( $\|h\| = 1$ , поскольку выполнено условие нормировки  $\max H(\omega) = 1$ ). Поэтому алгоритм (5) заведомо сходится при  $0 < \alpha < 2/\max \varphi(x)$ .

В пределе невязка  $f - h \otimes (\varphi S_\infty)$  обращается в нуль, что, учитывая (1), позволяет выразить предельное изображение, определяемое алгоритмом (3), через исходное:  $S_\infty(x) = S(x)/\varphi(x)$ .

В простейшем случае искажающая функция  $\varphi(x)$  при наличии, например, интерференции в цепи обратной связи ГОЭС определяется формулой  $\varphi(x) = 1 + \kappa \sin(\Omega x + \beta)$ . Здесь  $\kappa$  — глубина интерференционной модуляции ( $\kappa \ll 1$ ),  $\Omega$  и  $\beta$  — соответственно частота и фаза модуляции, а предельное изображение равно  $S_\infty(x) \simeq S(x)(1 - \kappa \sin(\Omega x + \beta))$ , т. е. результатом бесконечного числа итераций в этом случае будет исходное изображение, промодулированное в противофазе интерференционной модуляции в цепи обратной связи.

Выясним теперь, как влияет искажающая функция  $\varphi(x) = 1 + \kappa \sin(\Omega x + \beta)$  на восстановление изображения при достаточно большом, но конечном числе итераций ( $n \geq 10$ ). Будем предполагать, что ФРТ  $h(x)$  такая, что итерационный процесс (3) без интерференции в цепи обратной связи (т. е. с  $\varphi(x) \equiv 1$ ) характеризуется на каждой итерации  $n$  шириной  $\Omega_n$  полосы восстанавливаемых частот, которая определяется из уравнения  $H(\Omega_n) = (n\alpha)^{-1}$ . ФРТ, обладающие таким свойством, описаны в [5], к ним относится, в частности, гауссоида. При большой частоте модуляции  $\Omega \gg \Omega_n$  (т. е. при  $H(\Omega) \ll H(\Omega_n)$ ) интерференцией можно вообще пренебречь. Это следует из того, что на высоких частотах алгоритм ван Циттерта работает как линейный усилитель и суммарное воздействие интерференционной модуляции за  $n$  итераций пропорционально величине

$$\alpha n H(\Omega) \kappa = \kappa H(\Omega) / H(\Omega_n) \ll \kappa.$$

В этом случае  $S_n(x) \simeq \tilde{S}_n(x)$ , где  $\tilde{S}_n(x)$  — восстановленное за  $n$  итераций изображение с  $\varphi \equiv 1$ . При малой частоте модуляции, когда  $\Omega \ll \Omega_n$ , справедливо следующее соотношение:

$$S_n(x) = \tilde{S}_n(x) / \varphi(x) \simeq \tilde{S}_n(x) (1 - \kappa \sin(\Omega x + \beta)).$$

Ясно, что при промежуточных значениях частоты модуляции  $\Omega \sim \Omega_n$  отличие  $S_n(x)$  от  $\tilde{S}_n(x)$  также пропорционально  $\kappa$ .

На рис. 4 показано численное восстановление ступеньки, размытой

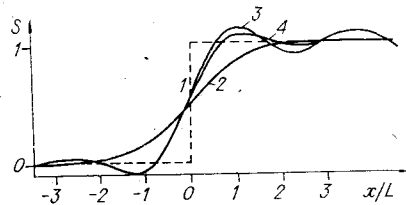
гауссовой ФРТ  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} e^{-\frac{x^2}{L^2}}$ , при наличии интерференционной модуляции  $\varphi(x) = 1 + \kappa \sin(\Omega x + \pi)$  с глубиной модуляции  $\kappa = 0,1$  и частотой  $\Omega = \pi/L$  за 10 итераций. Приведенный график функции имеет хорошо выраженную модуляционную структуру, хотя ширина полосы восстанавливаемых частот  $\Omega_{10} = 2\sqrt{\ln(\alpha 10)}/L \approx 3,3/L$  (параметр  $\alpha = 1,5$ ) в этом случае лишь ненамного превосходит частоту модуляции  $\Omega = \pi/L$ .

Если в вышеприведенном примере взять в 2 раза большую частоту модуляции  $\Omega = 2\pi/L$  (теперь  $\Omega > \Omega_{10}$ ), то даже при глубине модуляции  $\kappa = 0,5$  результат восстановления за 10 итераций практически такой же, как при восстановлении в отсутствие интерференции (в этом случае  $H(\Omega)/H(\Omega_{10}) \simeq 0,7 \times 10^{-3}$ ).

Итак, можно сделать следующий вывод: наличие интерференционной модуляции в цепи обратной связи ГОЭС до свертки или вообще не сказывается на результатах восстановления (если частота модуляции велика  $\Omega \gg \Omega_n$ ), или же (при частоте модуляции  $\Omega \ll \Omega_n$ ) приводит к искажению восстановленного изображения на величину, пропорциональную глубине модуляции. С ростом числа итераций это искажение стабилизируется и сводится к модуляции в противофазе восстановленного изображения.

Рис. 1. Восстановление изображения при наличии интерференционной модуляции в цепи обратной связи:

кривая 1 — исходное изображение, 2 — размытое, 3 — результат восстановления за 10 итераций при наличии интерференционной модуляции, 4 — результат восстановления за то же число итераций в отсутствие модуляции



Модуляционные искажения в поле изображения, возникающие в цепи обратной связи ГОЭС после свертки, описываются введением искажающей функции  $\varphi_1(x)$ . Здесь следует различать два случая: первый — при записи в память электронно-цифровой части ГОЭС размытое изображение  $f(x)$  подвержено воздействию этой же модуляции, т. е. записывается фактически  $\varphi_1(x)f(x)$ ; второй — когда записывается собственно  $f(x)$ .

В первом случае алгоритм восстановления принимает вид.

$$S_0(x) = \varphi_1(x)f(x);$$

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + \alpha \varphi_1(x)[f(x) - h \otimes S_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Анализ этого итерационного алгоритма, аналогичный вышеприведенному, показывает, что он сходится при  $0 < \alpha < 2/\max \varphi_1(x)$ , а  $S_\infty$  равно истинному изображению  $S$ .

Во втором случае алгоритм восстановления получается из (6) заменой  $f \rightarrow f/\varphi_1$ . При  $\varphi_1(x) = 1 + \kappa \sin(\Omega x + \beta)$ , пока число итераций невелико ( $\Omega_n \ll \Omega$ ), амплитуда модуляции растет примерно пропорционально  $n$ . В дальнейшем (при  $\Omega_n \geq \Omega$ ) рост замедляется, но, вообще говоря, не прекращается (а это означает, что  $S_n$  теперь не стремится к какой-либо функции), так как уравнение  $h \otimes S_\infty = f/\varphi_1$  может не иметь решения.

Нелинейные искажения, вносимые базовыми элементами системы, можно учесть двумя способами: 1) путем корректировки изображения на каждой итерации в электронно-цифровой части системы, в результате которой алгоритм восстановления остается линейным; 2) восстановлением изображения на основе «искаженного» нелинейного алгоритма.

Алгоритм ван Циттерта при наличии нелинейных искажений в ГОЭС, как будет видно из дальнейшего, можно привести к виду

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + \alpha r_n [f(x) - h(x) \otimes S_n(x)], \quad (7)$$

где  $r_n$  — неотрицательная функция  $x$ ,  $f(x)$ ,  $S_n(x)$ :  $r_n = r_n(x, f(x), S_n(x))$ . Алгоритм (7) есть, по существу, градиентный метод минимизации функционала

$$I(S) = \int \int h(x-x') S(x) S(x') dx dx' - 2 \int f(x) S(x) dx, \quad (8)$$

и его сходимость при определенных предположениях относительно  $r_n$  может быть во всяком случае доказана для дискретной задачи (когда пространственная переменная принимает конечное число дискретных значений, а интегральное уравнение (1) заменяется на систему линейных уравнений).

Нелинейные искажения, происходящие в цепи обратной связи ГОЭС до свертки изображения  $S$  с ФРТ  $h$ , например вносимые ЭЛТ, можно адекватно описать посредством введения функции нелинейных искажений  $\varphi[S]$ . Будем предполагать, что функция  $\varphi$  имеет ограниченную положительную производную

$$m \leq \frac{d}{dS} \varphi[S] \leq M, \quad M \geq m > 0.$$

«Искаженный» алгоритм ван Циттерта запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{S}_0(x) &= f(x); \\ S_0(x) &= \varphi[\bar{S}_0(x)]; \\ \bar{S}_{n+1}(x) &= \bar{S}_n(x) + \alpha [f(x) - h \otimes S_n(x)]; \\ S_{n+1}(x) &= \varphi[\bar{S}_{n+1}(x)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $S_n$  — изображение до нелинейного искажения,  $S_n$  — после.

Этот алгоритм приводится к форме (7), если учесть, что

$$\begin{aligned} S_{n+1}(x) &= \varphi(\varphi^{-1}[S_n(x)] + \alpha[f(x) - h(x) \otimes S_n(x)]) = \\ &= S_n(x) + \alpha\varphi'[\sigma_n(x)][f(x) - h(x) \otimes S_n(x)], \end{aligned} \quad (10)$$

где по теореме о среднем  $\sigma_n$  лежит между  $\varphi^{-1}[S_n]$  и  $\varphi^{-1}[S_n] + \alpha[f - h \otimes S_n]$ .

На качественном уровне выявим то новое, что вносит в процесс восстановления функция нелинейных искажений  $\varphi[S]$ . Для этого рассмотрим частный случай, когда диапазон изменения восстанавливаемого изображения  $S_n(x) = S_c + \Delta S_n(x)$  мал:  $\frac{d\varphi}{dS} \gg \left| \frac{d^2\varphi}{dS^2} \right| |\Delta S_n| \simeq \left| \frac{d^2\varphi}{dS^2} \right| \left( \frac{d\varphi}{dS} \right)^{-1} |\Delta S_n|$  и в (10)  $\sigma(x)$  можно заменить на постоянное значение  $\bar{S}_c$ . Алгоритм восстановления становится линейным:

$$\Delta S_0(x) = \Delta f;$$

$$\Delta S_{n+1}(x) = \Delta S_n + \alpha\varphi'[\bar{S}_c][\Delta f - h \otimes \Delta S_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

— и его скорость сходимости при данной ФРТ определяется параметром  $\alpha_{\text{эф}} = \alpha\varphi'[\bar{S}_c]$ .

Большим значениям этого параметра соответствует более быстрая сходимость (при условии, что  $0 < \alpha_{\text{эф}} < 2$ ). Поэтому, возвращаясь к общему случаю, получим, что значительное изменение производной  $\varphi'[S]$  в рабочем диапазоне интенсивности  $S$  приводит к неравномерности восстановления изображения алгоритмом (9): оно замедляется на тех участках, где величина производной  $\varphi'[S]$  мала. Эту неравномерность восстановления можно количественно охарактеризовать коэффициентом  $\mu$ , равным  $\mu = \max \varphi'[S] / \min \varphi'[S]$ .

Нелинейные искажения, происходящие в цепи обратной связи ГОЭС после свертки, например вносимые видекодом, описываются введением функции нелинейных искажений  $\Psi[S]$ , относительно которой также предполагаем, что

$$m_1 \leq \Psi'[S] \leq M_1; \quad M_1 \geq m_1 > 0.$$

Считая, что при записи в память электронно-цифровой части размытое изображение  $f(x)$  подвержено этому нелинейному искажению, алгоритм восстановления теперь запишем в виде

$$S_0(x) = \Psi[f(x)]; \quad (11)$$

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + \alpha\{\Psi[f(x)] - \Psi[h(x) \otimes S_n(x)]\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Приведение к виду (7) производится с помощью разложения

$$\Psi[f] - \Psi[h \otimes S_n] = \Psi'[\sigma_n][f - h \otimes S_n],$$

где  $\sigma_n$  лежит между  $f$  и  $h \otimes S_n$ . Точно так же, как и в случае алгоритма (9), показывается, что значительное изменение производной функции  $\Psi[S]$  в рабочем диапазоне сигнала приводит к неравномерности восстановления изображения алгоритмом (11). Рис. 2 иллюстрирует восстановление изображения алгоритмом (11) с модельной функцией  $\Psi[S] = 1 - \exp(-3S)$  при  $S > 0$ ,  $\Psi[S] = 0$  при  $S \leq 0$  (диапазон исходного изображения  $[0, 1; 1]$  и  $S_n(x)$  положительно во всех точках на каждой итерации). Производная этой функции максимальна при  $S \rightarrow +0$ , что обуславливает более быстрое восстановление при малых значениях интенсивности.

В случае когда размытое изображение  $f(x)$  при записи в память ГОЭС не подвержено воздействию нелинейного искажения, происходящего в цепи обратной связи после свертки, алгоритм восстановления получается из (11) с помощью замены  $\Psi[f(x)] \rightarrow f(x)$ . Тогда в поле восстанавливаемого изображения происходит накопление искажений, которые, вообще говоря, могут неограниченно расти с увеличением числа итераций.

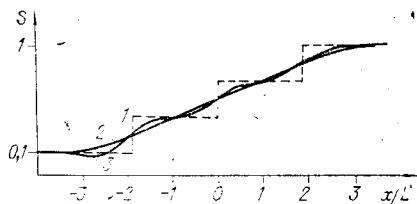


Рис. 2. Восстановление изображения при наличии нелинейных искажений в цепи обратной связи: кривая 1 — исходное изображение, 2 — размытое, 3 — результат восстановления за 10 итераций

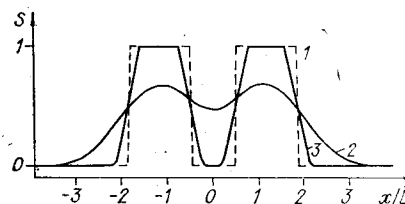


Рис. 3. Восстановление изображения при наличии пороговых ограничений: кривая 1 — исходное изображение, 2 — размытое, 3 — результат восстановления за 10 итераций

Для описания нелинейных искажений, вносимых электронно-цифровой частью системы, функцию нелинейных искажений  $\Phi[S]$  в (9) можно положить равной функции пороговых ограничений  $\Theta[S]$ :

$$\Phi[S] = \Theta[S] \equiv \begin{cases} 0 & \text{при } S < 0; \\ S & \text{при } 0 \leq S \leq 1; \\ 1 & \text{при } S > 1. \end{cases} \quad (12)$$

Предположим, что интенсивности исходного изображения и размытого  $f(x)$  изменяются в диапазоне  $[0; 1]$ . При  $\Phi[S]$ , определяемой формулой (12), интенсивность изображения на каждой итерации будет автоматически лежать в диапазоне  $[0; 1]$ . Это означает, что уже в саму структуру алгоритма (9), (12) заложена априорная информация об исходном изображении.

Оценим скорость сходимости алгоритма ван Циттерта при наличии пороговых ограничений в случае, когда в качестве исходного восстанавливаемого изображения взята «ступенька»  $S(x) = \eta(x)$ , размытая гауссовой ФРТ:  $h(x) = (1/\sqrt{\pi}L) \exp(-x^2/L^2)$ . Численные расчеты показывают, что фронт восстанавливаемого изображения  $S_n(x)$  в отличие от случая, когда восстановление «ступеньки» производится алгоритмом ван Циттерта без пороговых ограничений (кривая 4, рис. 1), не имеет боковых осцилляций и близок к линейной функции. Принимая во внимание это обстоятельство, вычислим невязку  $f - h \otimes S_n$ . Полагая

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -l_n/2; \\ 0,5 + x/l_n & \text{при } |x| \leq l_n/2; \\ 1 & \text{при } x > l_n/2 \end{cases}$$

(здесь  $l_n$  — ширина фронта на  $n$ -й итерации) и обозначая  $g_n(x) \equiv S_n(x) - \eta(x)$ , получим для невязки

$$f - h \otimes S_n = \int_0^{l_n/2} g_n(-x') [h(x+x') - h(x-x')] dx' \simeq \frac{|h''(0)|}{24} l_n^2 x.$$

Здесь учтено, что вблизи начала координат для ФРТ справедливо разложение  $h(x) = h(0) - (1/2)|h''(0)|x^2 + \dots$ . Теперь легко находится  $(n+1)$ -я итерация. При  $|x| \leq l_{n+1}/2$  имеем

$$\frac{1}{2} + \frac{x}{l_{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{x}{l_n} + \alpha \frac{|h''(0)|}{24} l_n^2 x,$$

что определяет рекуррентную связь между  $l_{n+1}$  и  $l_n$ :  $l_{n+1}^{-1} = l_n^{-1} + \alpha |h''(0)| l_n^2/24$ . Отсюда при больших  $n$  ширина фронта  $l_n$  находится в явном виде:  $l_n = (8\alpha |h''(0)| n)^{-1/3}$ . Для гауссовой ФРТ  $l_n = \frac{(\sqrt{\pi})^{1/3}}{(16\alpha n)^{1/3}} L = \frac{0,48}{(\alpha n)^{1/3}} L$ .

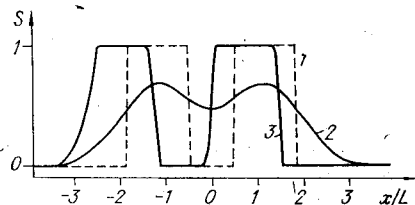


Рис. 4. Восстановление изображения при одновременном воздействии пороговых ограничений и проекционного сдвига: кривая 1 — исходное изображение, 2 — размытое, 3 — результат восстановления за 10 итераций

При решении этой же задачи алгоритмом ван Циттерта без пороговых ограничений сужение фронта происходит гораздо медленнее:  $l_n \propto L/\sqrt{\ln(\alpha n)}$ . Хотя алгоритм ван Циттерта при наличии пороговых ограничений является нелинейным, восстановление произвольного бинарного изображения этим алгоритмом сходно с восстановлением одной ступеньки (рис. 3).

Алгоритм ван Циттерта при наличии пороговых ограничений сводится к виду (7), если положить

$$r_n = \begin{cases} -S_n(x) (\alpha N_n(x))^{-1}, & \text{если } S_n(x) + \alpha N_n(x) < 0; \\ 1, & \text{если } 0 \leq S_n(x) + \alpha N_n(x) \leq 1; \\ [1 - S_n(x)] (\alpha N_n(x))^{-1}, & \text{если } S_n(x) + \alpha N_n(x) > 1, \end{cases}$$

здесь  $N_n(x) = f(x) - h(x) \otimes S_n(x)$ . Предельное изображение  $S_\infty(x)$ , определяемое этим алгоритмом, минимизирует функционал (8) на классе функций, принимающих значения от нуля до единицы (функция  $S_\infty(x)$  не совпадает с исходной  $S(x)$ , когда на размытое изображение  $f(x)$  наложен шум). Заметим, что то же самое предельное изображение определяется алгоритмом Джанссона [7], который совпадает с алгоритмом (7) при  $r_n = 1/2 - |S_n(x) - 1/2|$ . Это связано с тем, что предельное изображение мало чувствительно к конкретному виду  $r_n$ ; главное здесь то, что у обоих этих алгоритмов изображение на каждой итерации заключено между нулем и единицей. Разное же определение  $r_n$  у алгоритма Джанссона и алгоритма ван Циттерта при наличии пороговых ограничений обуславливает существенно различную динамику приближения к предельному изображению  $S_\infty(x)$ .

Алгоритм (9), (12) так же, как и алгоритм Джанссона, весьма устойчив к изменению параметров ФРТ  $h(x)$  в тех случаях, когда исходное изображение близко к бинарному. Так, на рис. 4 представлено восстановление алгоритмом ван Циттерта при наличии пороговых ограничений ступенчатого изображения, размытого гауссовой ФРТ  $h(x) = (1/\sqrt{\pi}L) \exp(-x^2/L^2)$  в присутствии в цепи обратной связи проекционного сдвига, величина которого  $d = L$  (т. е. при восстановлении в (9) вместо  $h(x)$  была использована  $h(x - d)$ ). Аналогичное восстановление алгоритмом ван Циттерта (без пороговых ограничений) приводит к появлению осцилляций, размах которых в несколько десятков раз превышает интенсивность исходного изображения.

Итак, при наличии пороговых ограничений алгоритм ван Циттерта трансформируется в разновидность алгоритма Джанссона. В случае когда истинное изображение близко к границам диапазона интенсивностей, повышаются устойчивость алгоритма к искажениям ФРТ  $h(x)$  и скорость сходимости. Если же истинное изображение сосредоточено вдали от границ диапазона интенсивностей, то наличие пороговых ограничений вообще не играет никакой роли при решении задачи восстановления.

В заключение приведем основные результаты работы:

систематические модуляционные искажения поля изображения, возникающие в цепи обратной связи ГОЭС до свертки, не накапливаются в процессе итерирования и остаются пропорциональными глубине модуляции. Если же эти искажения возникают после свертки, то их эволюция в процессе итерирования зависит от способа записи размытого изображения;

нелинейные искажения, вносимые базовыми элементами ГОЭС, приводят главным образом к неравномерности восстановления по полю изображения; восстановление деталей изображения происходит за большее число итераций на участках с теми значениями интенсивности, где производная функции нелинейных искажений мала;

пороговые ограничения, вносимые электронно-цифровой частью системы, повышают устойчивость и скорость сходимости алгоритма ван Циттерта, если интенсивность восстанавливаемого изображения находится вблизи пороговых значений рабочего диапазона системы (но не выходит за пределы этого диапазона), и не влияют на процесс восстановления в противном случае.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов.— М.: Сов. радио, 1979.
2. Matsuoka K., Shigematsu T., Ichioka Y. e. a. Iterative image restoration by means of optical-digital hybrid system//Appl. Opt.— 1982.— V. 21, N 24.— P. 4493—4499.
3. Афанасьева О. А., Борзов С. М., Гибин И. С. и др. Восстановление изображений в итеративной оптико-электронной системе с обратной связью//Автометрия.— 1986.— № 2.
4. Шафер Р. У., Мерсеро Р. М., Ричардс М. А. Интерференционные алгоритмы восстановления сигналов при наличии ограничений//ТИИЭР.— 1981.— Т. 69, № 4.
5. Разумова И. И., Худик В. Н. Прикладные вопросы реализации алгоритма ван Циттерта в оптико-электронной системе с обратной связью//Оптическая обработка информации/Под ред. С. Б. Гуревича.— Л.: Наука, 1985.
6. Kawata S., Ichioka Y. Resolution enhancement of spectra//JOSA.— 1980.— V. 70, N 7.— P. 762—772.
7. Jansson P. A., Hunt R. H., Plyler E. K. Iterative image restoration by means of optical-digital hybrid system//JOSA.— 1970.— V. 60.— P. 596.

Поступила в редакцию 27 августа 1985 г.

УДК 616.07

В. Н. МОИСЕЕВ, И. Н. ТРОИЦКИЙ, Н. Д. УСТИНОВ

(Москва)

### ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА Ч. II. АНАЛИЗ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТОЧНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Элементы информационной матрицы Фишера для томографического изображения. Пусть функция  $f(x, y)$ , описывающая анализируемое сечение, зависит от некоторого числа  $M$  неизвестных параметров  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ , так что  $f(x, y) = f(x, y, \lambda)$ . Тогда и проекции (1) [1], и восстановленное изображение (2) [1] также зависят от тех же параметров ( $R(s, \varphi) = R(s, \varphi, \lambda)$ ;  $f_\alpha(x, y) = f_\alpha(x, y, \lambda)$ ). Рассмотрим вопрос о том, с какой максимальной точностью данные неизвестные параметры могут быть измерены по восстановленному томографическому изображению.

В соответствии с неравенством Крамера — Рао минимальный эллипсоид рассеяния для эффективных оценок определяется информационной матрицей Фишера [2], элементы которой равны

$$J_{lm} = - \frac{\partial^2 \ln \Phi [f_\alpha(x, y) | f(x, y, \lambda)]}{\partial \lambda_l \partial \lambda_m} \quad (1)$$

Как отмечалось в [1],  $\Phi [f_\alpha(x, y) | f(x, y, \lambda)] = F [f_\alpha(x, y) - f_\alpha(x, y, \lambda)]$ , где функционал  $F(\cdot)$  определяется выражением (24) или (31) [1]. Продифференцировав  $\ln \Phi(\cdot)$  по  $\lambda_l$  и  $\lambda_m$  и усреднив полученный результат,