4. **Николаев Г. Н., Раутиан С. Г., Родионов Г. Д., Сапрыкин Э. Г.** Экспериментальное обнаружение влияния анизотропных столкновений на поглощение света в неоне.— Новосибирск, 1985.— (Препринт/АН СССР, Сиб. отд-ние, ИАиЭ; 283).
5. **Чайка М. П.** Поглощение света парами со скрытым выстраиванием.— Опт. и спектр., 1971, т. 31, вып. 5.
6. **Им Тхек-де, Сапрыкин Э. Г., Шалагин А. М.** Некоторые аномалии поглощения световой волны средой, помещенной в магнитное поле.— Опт. и спектр., 1973, т. 35, вып. 2.
7. **Каллас Х., Чайка М.** Выстраивание возбужденных состояний неона в разряде постоянного тока.— Опт. и спектр., 1969, т. 27, вып. 4.
8. **Павлов А. В., Полищук В. А., Чайка М. П.** Аномалии фарадеевского вращения в разряде в Ne в слабых магнитных полях.— Опт. и спектр., 1979, т. 47, вып. 1.
9. **Павлов А. В., Полищук В. А., Чайка М. П.** Дихроизм в разряде постоянного тока в Ne.— Опт. и спектр., 1980, т. 49, вып. 5.
10. **Чайка М. П.** Интерференция вырожденных атомных состояний.— Л.: ЛГУ, 1975.
11. **Чайка М. П., Котликов Е. Н., Тодоров Г. Ц., Атаджанов М. Р.** Ложные сигналы выстраивания в магнитных полях.— Опт. и спектр., 1981, т. 51, вып. 1.
12. **Родионов Г. Д., Сапрыкин Э. Г.** Метод формирования разностного резонанса с помощью поляризационной призмы.— Автометрия, 1985, № 6.
13. **Дьяконов М. И.** К теории резонансного рассеяния света на газе при наличии магнитного поля.— ЖЭТФ, 1964, т. 47, вып. 6.

Поступила в редакцию 8 июля 1985 г.

УДК 519.224

Я. А. БЕДРОВ

(Ленинград)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ОТВЕТОВ ИСПЫТУЕМОГО ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

Введение. Распространенным методом в практике психофизиологических исследований сенсорных систем человека является получение гистограмм ответов испытуемого при решении задачи распознавания некоторого набора стимулов. Один из вариантов этого метода будет следующий [1]. До начала эксперимента испытуемого знакомят с набором стимулов и сообщают названия каждого из них. В ходе эксперимента эти стимулы предъявляются ему в случайном порядке в условиях, затрудняющих их безошибочное распознавание (кратковременная экспозиция, зашумление). После каждого предъявления испытуемый должен ответить, какой из известных ему стимулов был предъявлен.

Результат такого эксперимента — набор из n (по числу стимулов) гистограмм ответов испытуемого. Существенной особенностью этой методики будет следующее обстоятельство. В силу затрудненности распознавания и запрещения отвечать: «не знаю» — испытуемый иногда отвечает «наугад». Вследствие этого оцениваемое с помощью гистограммы распределение ответов испытуемого — взвешенная сумма двух распределений: распределения ответов, обусловленных предъявляемым стимулом, и распределение ответов «наугад», которое от стимула не зависит и, следовательно, является одним и тем же для всех предъявляемых стимулов.

Такое представление о структуре получаемых в результате экспериментов гистограмм ответов делают естественной постановку вопроса о возможности исключения содержащейся в них составляющей, порожденной ответами «наугад». Ниже рассматривается математическая модель, описывающая распределение ответов испытуемого, получаемые в результате такого эксперимента, и ставится вопрос о ее структурной идентифицируемости [2]. Показано, что данная модель структурно неидентифицируема. В связи с этим рассматривается возможность использования априорной информации для приближенной идентификации неизвестных параметров.

При определении этой априорной информации исходим из следующих предположений, используемых физиологами при планировании подобных экспериментов. Очевидно, что как вероятность правильных ответов при решении задачи распознавания, так и вероятность ответов «наугад» определяются интенсивностью мешающих факторов (например, кратковременностью экспозиции), и можно ожидать, что вероятность ответов «наугад» не будет меняться в зависимости от того, какой стимул предъявлен.

Что касается вероятности правильного распознавания, то обычно экспериментатор выбирает время экспозиции таким, чтобы частота правильных ответов не сильно отличалась от единицы. Ясно, что последнее может иметь место только в том случае, если вероятность правильного распознавания каждого стимула достаточно высока.

Использование этой априорной информации позволяет осуществить последовательную приближенную идентификацию всех неизвестных параметров. Вначале выполняется идентификация вероятности и распределения ответов «наугад». Решение этой задачи сводится к определению значения некоторого параметра, доставляющего минимум квадратичному функционалу и удовлетворяющего системе неравенств. На основании этого значения параметра вычисляются приближенные значения вероятности и распределения ответов «наугад». Наконец, с помощью этих оценок находятся приближенные значения распределений ответов, обусловленных стимулами.

Для иллюстрации влияния приближенного характера априорной информации на конечный результат приведены результаты применения метода к различным модельным примерам.

Постановка задачи и метод решения. Пусть распределение P_i ответов испытуемого при предъявлении i-го стимула описывается следующей моделью:

$$P_i = X_i(1-k) + Vk, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где X_i — n-мерный вектор, задающий распределение ответов, обусловленных i-м стимулом; V — n-мерный вектор, задающий распределение ответов «наугад»; $0 < k < 1$ — вероятность того, что при предъявлении любого стимула испытуемый отвечает «наугад»; n — число стимулов.

Обозначим через e_i — n-мерный вектор, задающий распределение ответов, обусловленных i-м стимулом, в случае, когда вероятность его правильного распознавания равна 1. Введем следующие дополнительные предположения:

$$X_i \simeq e_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Требуется на основании заданных распределений $\{P_i\}_1^n$ и априорной информации (2) получить оценки неизвестных распределений $\{X_i\}_1^n$, V и вероятности k.

Обозначим через $V(j)$ и $P_i(j)$ j-е компоненты векторов V и P_i соответственно. Вначале покажем, что в общем случае, когда

$$P_i(j) > 0, \quad i, \ j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

рассматриваемая модель не является идентифицируемой в смысле [2], так как уравнение (1) имеет бесконечное число решений, удовлетворяющих всем ограничениям, наложенным на элементы распределений $\{X_i\}_1^n$, V и вероятность k.

Выберем любое распределение V, удовлетворяющее условиям

$$V(i) > 0; \quad V \neq P_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

При каждом $i = 1, \ldots, n$ рассмотрим решения

$$z_i(1), \ldots, z_i(n)$$

уравнений

$$P_i(j) - V(j) z_i(j) = 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

В силу (3)

$$z_i(j) > 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

Выберем

$$k = \min_{i,j} \{z_i(j)\}_1^n.$$

Очевидно, что при любом i

$$P_i(j) - V(j) k \geqslant 0, \; j = 1, \ldots n. \qquad (5)$$

Так как в силу (4) среди неравенств (5) есть нестрогие, то, складывая их почленно, получим $k < 1$.

Если теперь положить

$$X_i = (P_i - Vk)/(1-k), \; i = 1, \ldots, n,$$

то выбранные распределения $\{X_i\}_1^n$, V и вероятность k будут удовлетворять модели (1) и всем ограничениям, наложенным на ее элементы. Рассматриваемая модель не позволяет по заданным $\{P_i\}_1^n$ находить значения неизвестных $\{X_i\}_1^n$, V и k и, следовательно, неидентифицируема.

Это обстоятельство заставляет нас исследовать возможность использования априорной информации относительно неизвестных распределений $\{X_i\}_1^n$ для получения приближенного решения задачи идентификации. Один из возможных способов использования этой информации для приближенного решения поставленной задачи — выбор в качестве оценок неизвестных V и k значений V^*, k^*, доставляющих минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \| e_i - P_i/(1-k) + Vk/(1-k) \|^2$$

и удовлетворяющих системе ограничений вида

$$0 < k < 1; \; V(i) \geqslant 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} V(i) = 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\| \cdot \|^2$ — евклидова норма вектора.

В этой постановке решение задачи сводится к нахождению минимума нелинейной функции $n+1$ аргумента с учетом наложенных ограничений. Трудности, связанные с ее численным решением, делают более привлекательной другую постановку этой задачи, позволяющую разделить переменные и заменить решение минимизационной задачи размерности $n+1$ решением двух минимизационных задач единичной размерности.

Чтобы показать возможность разделения переменных в модели (1), рассмотрим задачу ее идентификации в случае, когда распределения $\{X_i\}_1^n$ известны. Запишем систему уравнений (1) в виде

$$V = P_i/k - X_i(1-k)/k, \; i = 1, \ldots, n. \qquad (6)$$

Обозначим правые части этих выражений $V_1, \ldots, V_n$ и рассмотрим очевидные тождества

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} V_i - V_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Подставляя в эти тождества вместо $\{V_i\}_1^n$ соответствующие им выражения, получим систему линейных уравнений вида

$$Mz = a, \qquad (7)$$

где

$$z=\frac{1}{k};\quad M=\left|\begin{array}{c}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(P_i-X_i)-(P_1-X_1)\\ \vdots\\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(P_i-X_i)-(P_n-X_n)\end{array}\right|;\quad a=\left|\begin{array}{c}X_1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\\ \vdots\\ X_n-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\end{array}\right|.$$

Следовательно, значение переменного z может быть найдено как решение методом наименьших квадратов переопределенной системы (7), т. е.

$$z=M^{\mathrm{T}}a/M^{\mathrm{T}}M$$

и соответственно

$$k=M^{\mathrm{T}}M/M^{\mathrm{T}}a.$$

Теперь воспользуемся этим методом для приближенного определения значения k в случае, когда распределения $\{X_i\}_1^n$ неизвестны. Заменим в матрицах M и a неизвестные распределения $\{X_i\}_1^n$ близкими к ним, в силу предположения (2), распределениями $\{e_i\}_1^n$ соответственно. Обозначим получившиеся при этом векторы через $\tilde{M}$ и $\tilde{a}$. Принимая во внимание (6), выберем в качестве оценки неизвестного z решение по методу наименьших квадратов системы

$$\tilde{M}z=\tilde{a},$$

удовлетворяющее системе линейных ограничений вида

$$1\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(P_i(j)-e_i(j))z+e_i(j)\}\geqslant 0,\quad j=1,\ \ldots,\ n. \tag{8}$$

В силу определения векторов $\{e_i\}_1^n$ из (8) следует, что

$$1\geqslant\frac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}P_i(j)-1\right)z+1\right)\geqslant 0,\quad j=1,\ \ldots,\ n,$$

откуда

$$\left(\sum_{i=1}^{n}P_i(j)-1\right)z\geqslant-1 \tag{9}$$

и

$$n-1\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}P_i(j)-1\right)z,\quad j=1,\ \ldots,\ n. \tag{10}$$

Из (9) и (10) найдем следующие ограничения на неизвестное z:

если $\sum_{i=1}^{n}P_i(j)>1$, то

$$(n-1)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}P_i(j)-1\right)\geqslant z\geqslant 1\Big/\left(1-\sum_{i=1}^{n}P_i(j)\right);$$

если $\sum_{i=1}^{n}P_i(j)<1$, то

$$1\Big/\left(1-\sum_{i=1}^{n}P_i(j)\right)\geqslant z\geqslant(n-1)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}P_i(j)-1\right),\quad j=1,\ \ldots,\ n.$$

Так как по условиям задачи $z>0$, то окончательно получим для неизвестного z систему ограничений

если $\sum_{i=1}^{n}P_i(j)>1$, то

$$(n-1)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}P_i(j)-1\right)\geqslant z>0;$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^{n} P_i(j) < 1, \text{ то}$$

$$1\Big/\left(1-\sum_{i=1}^{n} P_i(j)\right) \geqslant z > 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^{n} P_i(j) = 1, \text{ то } \infty > z > 0.$$

Обозначим удовлетворяющую этим условиям оценку неизвестного z через $\tilde{z}$. Тогда соответствующая ей оценка параметра k будет иметь вид

$$\tilde{k} = 1/\tilde{z}.$$

В качестве оценки неизвестного V выберем вектор

$$\tilde{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(P_i/\tilde{k} - e_i(1-\tilde{k})/\tilde{k}),$$

а в качестве неизвестных распределений $\{X_i\}_1^n$ — векторы

$$\tilde{X}_i = P_i/\tilde{k} - \tilde{V}(1-\tilde{k})/\tilde{k}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Модельные исследования. Для определения эффективности рассмотренного метода идентификации было проведено исследование как абсолютной (по сравнению с точными значениями), так и относительной (по сравнению с оценками, даваемыми распределениями $\{P_i\}_1^n$) точности оценивания неизвестных распределений $\{X_i\}_1^n$.

В качестве меры абсолютной точности оценок выбиралась величина

$$D_1 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_i(j) - X_i(j))^2,$$

а в качестве меры относительной точности — величина

$$D_2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{(\tilde{X}_i(j) - X_i(j))^2/(P_i(j) - X_i(j))^2\}.$$

Для получения различных вариантов модельных распределений $\{P_i\}_1^n$ распределения $\{X_i\}_1^n$ задавались в форме

$$X_i = |X_i(1), \ldots, X_i(i-1), \Delta, X_i(i+1), \ldots, X_i(4)|^T,$$

где $0{,}6 \leqslant \Delta < 1$ — вероятность правильного распознавания, а $X_i(j)$, i, $j = 1, \ldots, n$ — положительные случайные числа, удовлетворяющие условиям

$$X_i(j) \leqslant 1-\Delta; \; i, j = 1, \ldots, 4;$$

$$X_i(1) + \ldots + X_i(i-1) + X_i(i+1) + \ldots + X_i(4) = 1-\Delta.$$

Распределение V выбиралось в одной из трех форм:

$$V_1 = (0{,}25;\ 0{,}25;\ 0{,}25;\ 0{,}25)^T;$$

$$V_2 = (0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}1)^T;$$

$$V_3 = (0{,}1;\ 0{,}7;\ 0{,}1;\ 0{,}1)^T.$$

Значения величин D_1 и D_2, полученные при разных сочетаниях параметров Δ и k и вида вектора V, приведены в табл. 1 и 2 соответственно.

Результаты модельных исследований показывают, что в тех случаях, когда вероятность правильного распознавания стимулов находится в

Таблица 1

V	Δ=0,9		Δ=0,8		Δ=0,7		Δ=0,6	
	k=0,3	k=0,5	k=0,3	k=0,5	k=0,3	k=0,5	k=0,3	k=0,5
V_1	0,006	0,004	0,143	0,058	1,437	0,554	0,073	0,054
V_2	0,172	0,122	0,054	0,040	0,536	0,136	0,436	0,480
V_3	0,205	0,142	0,108	0,085	0,415	0,146	0,568	0,561

Таблица 2

V	Δ=0,9		Δ=0,8		Δ=0,7		Δ=0,6	
	k=0,3	k=0,5	k=0,3	k=0,5	k=0,3	k=0,5	k=0.3	k=0,5
V_1	$8\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-4}$	$17\cdot10^{-4}$	$13\cdot10^{-4}$	$93\cdot10^{-4}$	$98\cdot10^{-4}$	$35\cdot10^{-4}$	$47\cdot10^{-4}$
V_2	$31\cdot10^{-4}$	$54\cdot10^{-4}$	$10\cdot10^{-4}$	$15\cdot10^{-4}$	$48\cdot10^{-4}$	$34\cdot10^{-4}$	$66\cdot10^{-4}$	$62\cdot10^{-4}$
V_3	$43\cdot10^{-4}$	$86\cdot10^{-4}$	$21\cdot10^{-4}$	$48\cdot10^{-4}$	$55\cdot10^{-4}$	$51\cdot10^{-4}$	$56\cdot10^{-4}$	$124\cdot10^{-4}$

пределах 1—0,6, предлагаемый метод идентификации может дать бо́льшую точность, чем метод, использующий оценки вида $X_i = P_i$, $i = 1, \ldots, n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леушина Л. И. Зрительное пространственное восприятие.— Л.: Наука, 1978.
2. Bellman R., Astrom K. J. On structural identifiability.— Mathematical Biesciences, 1970, v. 7, N 314, p. 329—339.

Поступила в редакцию 26 июня 1984 г.

УДК 612.014.42.82 : 578.1

М. Н. ЦИЦЕРОШИН

(Ленинград)

АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ВЗАИМОСВЯЗИ КОЛЕБАНИЙ БИОПОТЕНЦИАЛОВ МОЗГА В ТРЕХМЕРНОМ ФАКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Изучение системной деятельности мозга требует одновременного анализа взаимоотношений биоэлектрической активности от большого числа различных зон коры. Автоматический анализ оценок статистической взаимосвязи электроэнцефалограмм (ЭЭГ) зарекомендовал себя эффективным методом исследования нейрофизиологических механизмов [1—3]. Однако при большом числе отведений n количество оцениваемых коэффициентов корреляции ЭЭГ (КК ЭЭГ) достигает, согласно формуле $n(n-1)/2$, десятков [2], а то и сотен значений [3]. Содержательная интерпретация таких больших корреляционных матриц в адекватных нейрофизиологических терминах крайне затруднительна, и исследователям приходится искать различные методы обобщения или группировки КК ЭЭГ при сохранении всей исходной информации. Наиболее предпочтительным способом компрессии информации, содержащейся в корреляционных матрицах ЭЭГ, следует считать зародившийся в среде психологов и подробно разработанный математиками [4—6] факторный анализ (ФА). Имевшиеся попытки применения ФА к изучению ЭЭГ [7—