В силу произвольности δ, π сходимость доказана. Из теоремы Слуцкого [11, 12] следует, что матрица $\mathbf{G}^{-1}$ сходится к $g^{-1}(\mathbf{b}_0)\lim\limits_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}[\mathbf{L}(y_i, \mathbf{b}_0)]\right\}^{-1}$ Применив лемму [13, с. 187], получаем, что распределение вектора $(\beta_\varphi-\mathbf{b}_0)\,(N\to\infty)$ p нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсионной матрицей

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}[\mathbf{L}(y_i,\mathbf{b}_0)]\right\}^{-1}\mathbf{M}_N(\mathbf{b}_0)\left\{\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}[\mathbf{L}(y_i,\mathbf{b}_0)]\right\}^{-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иванов А. В., Козлов О. М.** О свойствах оценок параметров регрессии для нелинейных объектов.— Кибернетика, 1980, № 5.
2. **Xuber P. J.** The behavior of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions.— Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., 1967, v. 1, p. 222—234.
3. **Цыбаков А. Б.** О методе минимизации эмпирического риска в задачах идентификации.— Автоматика и телемеханика, 1981, № 12.
4. **Цыпкин Я. З.** Адаптация и обучение в автоматических системах.— М.: Наука, 1968.
5. **Демиденко Е. З.** Линейный и нелинейный регрессионный анализ.— М.: Наука, 1981.
6. **Кацюба О. А., Хакимов Б. Б.** Алгоритм нелинейного параметрического оценивания в многомерных задачах статистической обработки.— Автометрия, 1984, № 2.
7. **Мудров В. И., Кушко В. Л.** Методы обработки измерений.— М.: Сов. радио, 1976.
8. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятности.— М.: Наука, 1969.
9. **Ширяев А. Н.** Вероятность.— М.: Наука, 1980.
10. **Шметтерер Л.** Введение в математическую статистику.— М.: Наука, 1976.
11. **Крамер Г.** Математические методы статистики.— М.: Мир, 1975.
12. **Elgerd O. I.** Control Systems Theory.— N. Y.: Mc-Craw-Hill, 1967.
13. **Дюге Д.** Теоретическая и прикладная статистика.— М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 5 августа 1985 г.

УДК 621.317 : 519.21

М. Г. ЗОТОВ

(Москва)

СПОСОБ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БУТОНА

Интегральное уравнение Винера следует из решения задачи оптимальной фильтрации в установившемся режиме. Оптимальный фильтр получается с не зависящими от времени параметрами. Теория Винера была развита и обобщена в работе Бутона, в которой предложен критерий минимума мгновенного значения средней квадратической ошибки для линейной системы с переменными параметрами при нестационарных входных сигналах. Результат Бутона заключается в получении интегрального уравнения. Однако общее решение этого уравнения было найдено Шинбротом, предложившим приближенный метод, позволяющий получить инженерное решение для широкого класса практически важных задач. Этот метод изложен в [1]. Там же приведены ссылки на оригинальные работы Бутона и Шинброта. Позже Калман предложил способ решения не только одномерного, но и многомерного интегрального уравнения Бутона. Решение получено в пространстве состояний. Однако, несмотря на успехи конструирования фильтров в пространстве состояний, выявились и некоторые недостатки [2, 3]:

невозможность иметь дело с физическими переменными на всех этапах синтеза и анализа;

наличие простых задач для систем с обратной связью, решение которых в пространстве состояний затруднительно. Такие примеры приведены в [2].

В этих условиях развитие альтернативных способов решения интегральных уравнений Бутона представляет определенный практический и теоретический интерес. В статье предлагается способ решения интегрального уравнения Бутона, который по своим возможностям стоит ближе к методу Шинброта, но позволяет снять свойственные методу Шинброта ограничения, правда, за счет некоторого усложнения алгоритма решения.

Для лучшего понимания предлагаемого способа решения интегрального уравнения Бутона применим его сначала для решения уравнения Винера — Хопфа.

Решение интегрального уравнения Винера — Хопфа. Интегральное уравнение Винера — Хопфа имеет вид [4, 5]

$$\int_0^\infty k(\tau) R_1(t-\tau)\,d\tau - R_2(t) = 0 \text{ при } t \geqslant 0_+. \tag{1}$$

Требуется, зная $R_1(t)$ и $R_2(t)$, найти $k(t)$. Функция $R_2(t)$ при $t<0_+$ неизвестна. Примем, что случайные процессы, которые необходимо отфильтровать, представляют собой белый шум, пропущенный через формирующий фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением. Тогда $R_1(t)$ и $R_2(t)$ будут описываться следующим образом:

$$R_i(t) = \begin{cases} R_{i1}(t) = \sum\limits_{k=1}^{p_i} c_{ik} e^{\alpha_{ik} t} + c_{i0}\delta(t),\ t \geqslant 0_+;\ \operatorname{Re}\alpha_{ik} < 0,\ c_{20} = 0; \\ R_{i2}(t) = \sum\limits_{k=1}^{q_i} d_{ik} e^{\beta_{ik} t},\ t \leqslant 0_-,\ \operatorname{Re}\beta_{ik} > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Не ограничивая общности, (2) записано при условии, что характеристическое уравнение формирующего фильтра не имеет кратных корней. Рассмотрим (1) подробнее. Соотношение (1) соответствует следующей схеме (рис. 1, *а*, *б*): на вход системы с импульсной переходной функцией $k(t)$ подается воздействие $R_1(t)$, приложенное к системе в бесконечно удаленный момент времени; выход на интервале от нуля до t равен $R_2(t)$. Можно записать дифференциальное уравнение, связывающее $R_1(t)$ и $R_2(t)$. Оно имеет вид [4]

$$a_n R_2^{(n)}(t) + \ldots + a_1 R_2'(t) + R_2(t) = b_m R_1^{(m)}(t) + \ldots + b_1 R_1'(t) + b_0 R_1(t),$$
$$t_+ \geqslant 0. \tag{3}$$

Таким образом, решаемая задача сводится к определению параметров $a_i(i=1-n)$ и $b_i(i=0-m)$ при заданных входе и выходе. Это обычная задача идентификации параметров объекта по входу и выходу. Однако имеются и особенности: количество мод (линейно независимых функций) в (2) меньше числа неизвестных параметров, функции $R_i(t)$ и их производные в нуле «имеют разрыв», выход, т. е. функция $R_2(t)$ на интервале $-\infty \div 0$ неизвестна. Приступим к решению задачи определения параметров $a_i(i=1-n)$, $b_i(i=0-m)$. Поскольку функция $R_i(t)$ разрывна, производные от нее определяются соотношениями [6]

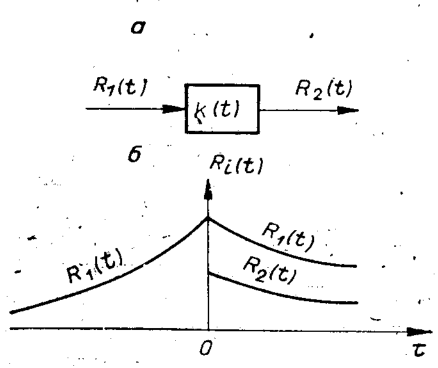

Рис. 1

$$R_i(t) = R_{i1}(t); \quad R_i'(t) = R_{i1}'(t) + [R_i(0_+) - R_i(0_-)]\,\delta(t);$$

$$R_i''(t) = R_{i1}''(t) + [R_i'(0_+) - R_i'(0_-)]\,\delta(t) + [R_i(0_+) - R_i(0_-)]\,\delta'(t) \text{ и т. д.}, \quad t \geqslant 0 \tag{4}$$

или, с учетом (2),

$$R_i(t) = R_{i1}(t), \; R_i'(t) = R_{i1}(t) + [R_{i1}(0) - R_{i2}(0)]\,\delta(t);$$

$$R_i''(t) = R_{i1}''(t) + [R_{i1}'(0) - R_{i2}(0)]\,\delta(t) + [R_{i1}(0) - R_{i2}(0)]\,\delta'(t) \text{ и т. д.}, \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

Используя (5), уравнение (3) запишем так:

$$a_n \{R_{21}^{(n)}(t) + [R_{21}^{(n-1)}(0) - R_{22}^{(n-1)}(0)]\,\delta(t) + \ldots + [R_{21}(0) - R_{22}(0)]\,\delta^{(n-1)}(t)\} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ a_1 \{R_{21}'(t) + [R_{21}(0) - R_{22}(0)]\,\delta(t)\} + R_{21}(t) =$$

$$= b_m \{R_{11}^{(m)}(t) + [R_{11}^{(m-1)}(0) - R_{12}^{(m-1)}(0)]\,\delta(t) + \ldots + [R_{11}(0) - R_{12}(0)]\,\delta^{(m-1)}(t)\} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ b_1 \{R_{11}'(t) + [R_{11}(0) - R_{12}(0)]\,\delta(t)\} + b_0 R_{11}(t). \tag{6}$$

Используя (2), перепишем (6) в следующем виде:

$$a_n \left\{ \sum_{k=1}^{p_2} c_{2k} \alpha_{2k}^n e^{\alpha_{2k} t} + [R_{21}^{(n-1)}(0) - R_{22}^{(n-1)}(0)]\,\delta(t) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + [R_{21}(0) - R_{22}(0)]\,\delta^{(n-1)}(t) \right\} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ a_1 \left\{ \sum_{k=1}^{p_2} c_{2k} \alpha_{2k} e^{\alpha_{2k} t} + [R_{21}(0) - R_{22}(0)]\,\delta(t) \right\} + \sum_{k=1}^{p_2} c_{2k} e^{\alpha_{2k} t} =$$

$$= b_m \left\{ \sum_{k=1}^{p_1} c_{1k} \alpha_{1k}^m e^{\alpha_{1k} t} + c_{10} \delta^{(m)}(t) + [R_{11}^{(m-1)}(0) - R_{12}^{(m-1)}(0)]\,\delta(t) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + [R_{11}(0) - R_{12}(0)]\,\delta^{(m-1)}(t) \right\} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ b_1 \left\{ \sum_{k=1}^{p_1} c_{1k} \alpha_{1k} e^{\alpha_{1k} t} + c_{10} \delta'(t) + \right.$$

$$\left. + [R_{11}(0) - R_{12}(0)]\,\delta(t) \right\} + b_0 \left\{ \sum_{k=1}^{p_1} c_{1k} e^{\alpha_k t} + c_{10} \delta(t) \right\}. \tag{7}$$

Известно [5], что если $c_{10} \neq 0$, то $n > m$. Таким образом, можно принять: при $c_{10} \neq 0$ $m = n - 1$; если $c_{10} = 0$, то $m = n$. Группируя в (7) члены при $e^{\alpha_{ik} t}$ и $\delta^{(i)}(t)$, получим систему линейных алгебраических уравнений, из которой можно найти a_i и b_i. Рассмотрим случай $c_{10} \neq 0$, $m = n - 1$. Количество неизвестных $2n$. Из (2) найдем число мод вида $e^{\alpha_{ik} t}$ (некоторые α_{1k} и α_{2k} совпадают) и обозначим это число r. Из (7) видно, что количество уравнений, которые можно образовать, группируя члены при $\delta^{(i)}(t)$ $(i = 0 - n - 1)$, равно n. Таким образом, количество уравнений — $r + n$. Количество уравнений будет равно числу неизвестных, если выполняется равенство $n = r$. Второй случай: $c_{10} = 0$, $m = n$, количество уравнений, получаемое из членов при $\delta^{(i)}(t)$ $(i = 0 - n - 1)$, равно n. Рассуждая аналогично, найдем $n = r - 1$.

В параметры a_i и b_i входят $R_{21}^{(i)}(0) - R_{22}^{(i)}(0)$ и $R_{11}^{(i)}(0) - R_{12}^{(i)}(0)$. Значения $R_{21}^{(i)}(0)$, $R_{11}^{(i)}(0)$ и $R_{12}^{(i)}(0)$ легко определяются из (2), а так как (1) выполняется только при $t \geqslant 0_+$, то $R_{22}^{(i)}(0)$ неизвестны. Таким образом, в найденные a_i и b_i входят неизвестные $R_{22}^{(i)}(0)$. Отметим, что в отдельных случаях (такой случай будет рассмотрен в примере 1) в силу специфики системы уравнений можно определить некоторые значения параметров $R_{22}^{(i)}(0)$, но тогда такое же число параметров a_i и b_i останется неизвестным. Перейдем к определению оставшихся параметров. Для этого рассмотрим дифференциальное уравнение (3) при $t \leqslant 0_-$:

$$a_n R_{22}^{(n)}(t) + \ldots + a_1 R_{22}'(t) + R_{22}(t) = b_m R_{12}^{(m)}(t) + \ldots$$
$$\ldots + b_1 R_{12}'(t) + b_0 R_{12}(t), \quad t < 0, \tag{8}$$

здесь $R_{12}(t) = \sum_{k=1}^{q_1} d_{1k} e^{\beta_{1k} t}$. Воздействие $R_{12}(t)$ к системе прикладывалось в бесконечно отдаленный момент времени (т. е. в момент $t = -\infty$), ко времени t все переходные процессы затухали, и поэтому решение $R_{22}(t)$ можно искать в виде

$$R_{22}(t) = \sum_{k=1}^{q_1} v_{2k} e^{\beta_{1k} t}. \tag{9}$$

Подставляя значения $R_{12}(t)$ и $R_{22}(t)$ в (8) и объединяя коэффициенты при функциях $e^{\beta_{1k} t}$, получим систему линейных алгебраических уравнений, из которой можно найти v_{2k} через a_i, b_i. Дифференцируя (9) $n - 1$ раз и полагая $t = 0$, определим систему нелинейных уравнений, из которой и определяются оставшиеся неизвестные. Некоторые из коэффициентов b_i могут быть нулевыми, что выясняется в процессе определения значений этих параметров. Рассмотрим пример, поясняющий описанный выше алгоритм.

Пример 1. Найти дифференциальный оператор, описывающий фильтр, который в установившемся режиме обеспечивает оптимальную фильтрацию сигнала $m(t)$ от не коррелированной с ним помехи $n(t)$. Спектральные плотности воздействий $m(t)$ и $n(t)$ заданы: $S_{mm}(s) = 3/(1 - s^2)$, $S_{nn}(s) = 5/(9 - s^2)$. Найдем корреляционные функции $R_1(\tau) = R_{\varphi\varphi}(\tau) = R_{mm}(\tau) + R_{nn}(\tau)$ и $R_2(\tau) = R_{mm}(\tau)$:

$$R_1(\tau) = \begin{cases} R_{11}(\tau) = 3/2e^{-\tau} + 5/6e^{-3\tau} \text{ при } \tau \geqslant 0_+; \\ R_{12}(\tau) = 3/2e^{\tau} + 5/6e^{3\tau} \text{ при } \tau < 0_-; \end{cases}$$
$$R_2(\tau) = \{R_{21}(\tau) = 3/2e^{-\tau} \text{ при } \tau \geqslant 0_+. \tag{1.1}$$

В этом случае имеем $n = r - 1 = 1$. Уравнение фильтра, согласно (3), примет вид

$$a_1 R_2'(t) + R_2(t) = b_1 R_1'(t) + b_0 R_1(t), \quad t \geqslant 0_+. \tag{1.2}$$

Используя (5), получим

$$R_1(t) = 3/2e^{-t} + 5/6e^{-3t}; \quad R_1'(t) = -3/2e^{-t} - 5/2e^{-3t} +$$
$$+ [R_{11}(0) - R_{12}(0)]\,\delta(t);$$
$$R_2(t) = 3/2e^{-t}; \quad R_2'(t) = -3/2e^{-t} + [R_{21}(0) - R_{22}(0)]\,\delta(t). \tag{1.3}$$

Подставив (1.3) в (1.2), получим

$$a_1\{-3/2e^{-t} + [R_{21}(0) - R_{22}(0)]\,\delta(t)\} + 3/2e^{-t} =$$
$$= b_1\{-3/2e^{-t} - 5/2e^{-3t} + [R_{11}(0) - R_{12}(0)]\,\delta(t)\} +$$
$$+ b_0\{3/2e^{-t} + 5/6e^{-3t}\}. \tag{1.4}$$

Согласно (1.1), $R_{21}(0) = 3/2$, $R_{11}(0) - R_{12}(0) = 0$; $R_{22}(0)$ неизвестно. Из (1.4) следует система уравнений

$$-a_1 + b_1 - b_0 = -1;$$
$$-3b_1 + b_0 = 0;$$
$$[1{,}5 - R_{22}(0)]\,a_1 = 0. \tag{1.5}$$

Из (1.5) находим $b_1 = (1 - a_1)/2$, $b_0 = 3(1 - a_1)/2$, $R_{22}(0) = 1{,}5$. Таким образом, коэффициенты уравнения (1.2) b_1 и b_0 выражены через a_1. Определим этот параметр. С учетом полученных значений b_1 и b_0 уравнение (1.2) при $t < 0_-$ запишется так:

$$a_1 R'_{22}(t) + R_{22}(t) = (1 - a_1)/2 R'_{12}(t) + 3(1 - a_1)/2 R_{12}(t). \tag{1.6}$$

Так как воздействие $R_{12}(t)$ было приложено к системе в бесконечно удаленный момент времени, т. е. в момент $t = -\infty$, то все переходные процессы к моменту t уже затухли и решение можно искать в виде $R_{22}(t) = d_{21}e^t + d_{22}e^{3t}$. Из (1.6) имеем

$$a_1(d_{21}e^t + 3d_{22}e^{3t}) + d_{21}e^t + d_{22}e^{3t} = 0{,}5(1 - a_1)(3/2e^t + \\ + 5/2e^{3t}) + 1{,}5(1 - a_1)(3/2e^t + 5/6e^{3t}). \tag{1.7}$$

Из (1.7) найдем

$$d_{21} = 3(1 - a_1)/(1 + a_1), \quad d_{22} = 5(1 - a_1)/2(1 + 3a_1). \tag{1.8}$$

Из (1.8) следует

$$R_{22}(t) = (1 - a_1)[3e^t/(1 + a_1) + 5e^{3t}/2(1 + 3a_1)]_{t=0} = 1{,}5. \tag{1.9}$$

Решая (1.9), получим $a_1 = \pm 0{,}5$. Решение $a_1 = -0{,}5$ отбрасываем, так как оно не удовлетворяет условию устойчивости. Таким образом, оптимальный фильтр имеет вид

$$0{,}5x'(t) + x(t) = 0{,}5\varphi'(t) + 0{,}75\varphi(t). \tag{1.10}$$

Это совпадает с решением, полученным обычным методом.

Решение интегрального уравнения Бутона. Интегральное уравнение Бутона имеет вид [1]

$$\int_0^t k(t, \tau) R_1(\sigma, \tau)\, d\tau - R_2(t, \sigma) = 0 \text{ при } \sigma \leqslant t. \tag{10}$$

Требуется, зная $R_1(\sigma, \tau)$ и $R_2(t, \sigma)$, найти $k(t, \tau)$. Предположим, что корреляционные функции могут быть с достаточной степенью точности представлены в виде [1]

$$R_1(t, \sigma) = \begin{cases} R_{11}(t, \sigma) = \sum_{k=1}^{p_1} d_{1k}(t)\beta_{1k}(\sigma) + c_{10}\delta(t - \delta) \text{ при } \sigma \leqslant t; \\ R_{12}(t, \sigma) = \sum_{k=1}^{q_1} \rho_{1k}(\sigma)\gamma_{1k}(t) \text{ при } \sigma > t; \end{cases} \tag{11}$$

$$R_2(t, \sigma) = \left\{ R_{21}(t, \sigma) = \sum_{k=1}^{p_1} d_{2k}(t)\beta_{2k}(\sigma) \text{ при } \sigma \leqslant t. \right.$$

Здесь, в отличие от метода Шинброта, векторы $\alpha_1(t) \neq \rho_1(t) \neq \alpha_2(t)$, $\beta_1(t) \neq \gamma_1(t)$ и, самое главное, вектор $\beta_1(t) \neq \beta_2(t)$. Некоторые из компонентов векторов могут совпадать.

Корреляционные функции, представимые таким образом, имеют достаточно широкий класс случайных процессов [4]. Функция $R_2(t, \sigma)$ при $\sigma > t$ хотя и определена, но, так как при этих условиях не выполняется (10), для решения не используется, поэтому в (11) опущена. Алгоритм решения задачи остается прежним, но учитывается, что дифференциальное уравнение, описывающее фильтр, будет с переменными параметрами, т. е. записывается так [7]:

$$a_n(t) R_2^{(n)}(t, \sigma) + \ldots + a_1(t) R'_2(t, \sigma) + R_2(t, \sigma) = b_m(t) R_1^{(m)}(t, \sigma) + \ldots \\ \ldots + b_1(t) R'_1(t, \sigma) + b_0(t) R_1(t, \sigma), \quad \sigma \leqslant t. \tag{12}$$

Аналогичные (4) соотношения в рассматриваемом случае примут вид

$$R_i(t, \sigma) = R_{i1}(t, \sigma), \; R'_i(t, \sigma) = R'_{i1}(t, \sigma) + [R_i(\sigma_+, \sigma) - R_i(\sigma_-, \sigma)]\,\delta(t - \sigma) \tag{13};$$

$$R_i''(t,\sigma) = R_{i1}''(t,\sigma) + [R_i'(\sigma_+,\sigma) - R_i'(\sigma_-,\sigma)]\,\delta(t-\sigma) + [R_i(\sigma_+,\sigma) - R_i(\sigma_-,\sigma)]\,\delta'(t-\sigma) \text{ и т. д., } \sigma \leqslant t.$$

Из (13) с учетом (11) имеем

$$R_i(t,\sigma) = R_{i1}(t,\sigma),\quad R_i'(t,\sigma) = R_{i1}'(t,\sigma) + [R_{i1}(\sigma,\sigma) - R_{i2}(\sigma,\sigma)]\,\delta(t-\sigma);$$

$$R_i''(t,\sigma) = R_{i1}''(t,\sigma) + [R_{i1}'(\sigma,\sigma) - R_{i2}'(\sigma,\sigma)]\,\delta(t-\sigma) + [R_{i1}(\sigma,\sigma) - R_{i2}(\sigma,\sigma)]\,\delta'(t-\sigma) \text{ и т. д., } \sigma \leqslant t. \tag{14}$$

Уравнение (12) с учетом (14) перепишется следующим образом:

$$\begin{gathered}
a_n(t)\{R_{21}^{(n)}(t,\sigma) + [R_{21}^{(n-1)}(\sigma,\sigma) - R_{22}^{(n-1)}(\sigma,\sigma)]\delta(t-\sigma) + \ldots + [R_{21}(\sigma,\sigma) - R_{22}(\sigma,\sigma)]\,\delta^{(n-1)}(t-\sigma)\} + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ a_1(t)\{R_{21}'(t,\sigma) + [R_{21}(\sigma,\sigma) - R_{22}(\sigma,\sigma)]\,\delta(t-\sigma)\} + R_{21}(t,\sigma) = \\
= b_m(t)\{R_{11}^{(m)}(t,\sigma) + [R_{11}^{(m-1)}(\sigma,\sigma) - R_{12}^{(m-1)}(\sigma,\sigma)]\,\delta(t-\sigma) + \ldots \\
\ldots + [R_{11}(\sigma,\sigma) - R_{12}(\sigma,\sigma)]\,\delta^{(m-1)}(t-\sigma) + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ b_1(t)\{R_{11}'(t,\sigma) + [R_{11}(\sigma,\sigma) - R_{12}(\sigma,\sigma)]\,\delta(t-\sigma)\} + \\
+ b_0(t)\,R_{11}(t,\sigma), \quad \sigma \leqslant t.
\end{gathered} \tag{15}$$

Значения n и m определяются так же, как и при решении уравнения Винера — Хопфа. Группируя в (15) члены при $\beta_{1k}(\sigma)$, $\beta_{2k}(\sigma)$ и $\delta^{(i)}(t-\sigma)$, получим систему алгебраических уравнений, из которой можно найти $a_i(t)$ и $b_i(t)$. В $a_i(t)$ и $b_i(t)$ входят $R_{21}^{(i)}(\sigma,\sigma) - R_{22}^{(i)}(\sigma,\sigma)$ и $R_{11}^{(i)}(\sigma,\sigma) - R_{12}^{(i)}(\sigma,\sigma)$. Значения $R_{21}^{(i)}(\sigma,\sigma)$, $R_{11}^{(i)}(\sigma,\sigma)$ и $R_{12}^{(i)}(\sigma,\sigma)$ определяются из (11). Значения $R_{22}^{(i)}(\sigma,\sigma)$ предстоит найти. Как и в случае решения уравнения Винера — Хопфа, может оказаться, что из полученной системы уравнений в силу его специфики определяются некоторые $R_{22}^{(i)}(\sigma,\sigma)$, но тогда такое же количество параметров $a_i(t)$ и $b_i(t)$ останется неизвестным. Рассмотрим дифференциальное уравнение (12) при $\sigma > t$:

$$\begin{gathered}
a_n(t)\,R_{22}^{(n)}(t,\sigma) + \ldots + a_1(t)\,R_{22}'(t,\sigma) + R_{22}(t,\sigma) = \\
= b_m(t)\,R_{12}^{(m)}(t,\sigma) + \ldots + b_1(t)\,R_{12}'(t,\sigma) + b_0(t)\,R_{12}(t,\sigma), \quad \sigma > t.
\end{gathered} \tag{16}$$

Параметры $a_i(t)$, $b_i(t)$ дифференциального уравнения (16), как отмечалось выше, зависят, к сожалению, нелинейно от пока неизвестных функций $R_{22}^{(i)}(t,t)$. Аналитическое решение возможно лишь в частных случаях. В общем случае решение (16) можно получить только численно. Поясним изложенное. На рис. 2, *а*, *б* показаны система, описываемая дифференциальным уравнением (16), а также значение выходной координаты $R_{22}(t,\sigma)$. Коэффициенты $a_i(t)$ и $b_i(t)$ нелинейно зависят от значения выходной координаты, т. е. $R_{22}(t,\sigma)$ и ее производных, при $\sigma = t$. Приведенный выше алгоритм решения интегрального уравнения Бутона используем для решения прикладных задач. Такие задачи даны, например, в [1]. Там же подробно очерчена область, в которой возникают подобные задачи.

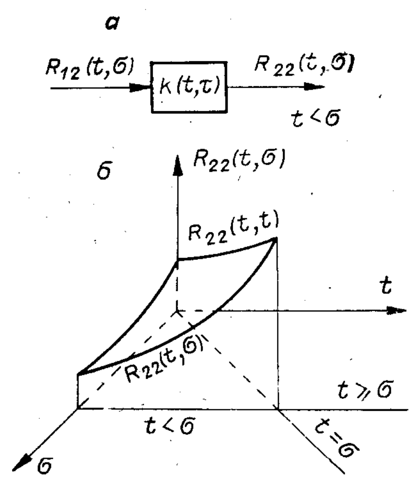

Рис. 2

П р и м е р 2. Найти дифференциальное уравнение, описывающее фильтр, который обеспечивает оптимальную фильтрацию сигнала $m(t)$ от помехи $n(t)$ в произвольный момент времени. Корреляционная функция $R_1(t, \sigma) = R_{mm}(t, \sigma) + R_{nn}(t, \sigma)$, а $R_2(t, \sigma) = R_{mm}(t, \sigma)$. Значения $R_1(t, \sigma)$ и $R_2(t, \sigma)$ заданы выражениями

$$R_1(t, \sigma) = \begin{cases} R_{11}(t, \sigma) = \overline{\alpha}^2 tN\delta(t-\sigma) \text{ при } \sigma \leqslant t; \\ R_{12}(\sigma, t) = \overline{\alpha}^2 \text{ при } \sigma > t; \end{cases}$$

$$R_2(t, \sigma) = \{R_{21}(t, \sigma) = \overline{\alpha}^2 \text{ при } \sigma \leqslant t. \tag{2.1}$$

Исходя из структуры исходных данных, определим порядок операторов дифференциального уравнения, описывающего фильтр. Так как $c_{10} = N \neq 0$, то $n > m$, а $n = r = 1$. Таким образом, дифференциальное уравнение фильтра имеет вид

$$a_1(t) R_2'(t, \sigma) + R_2(t, \sigma) = b_0(t) R_1(t, \sigma), \quad \sigma \leqslant t. \tag{2.2}$$

На основе (14) с использованием (2.1) запишем

$$R_2(t, \sigma) = R_{21}(t, \sigma) = \overline{\alpha}^2, \quad R_2'(t, \sigma) = R_{21}'(t, \sigma) + [R_{21}(\sigma, \sigma) -$$
$$- R_{22}(\sigma, \sigma)]\,\delta(t-\sigma) = [\overline{\alpha}^2 - R_{22}(\sigma, \sigma)]\,\delta(t-\sigma), \quad R_1(t, \sigma) =$$
$$= R_{11}(t, \sigma) = \overline{\alpha}^2 + N\delta(t-\sigma) \text{ при } \sigma \leqslant t. \tag{2.3}$$

Подставим (2.3) в (2.2). В результате получим

$$a_1(t)[\overline{\alpha}^2 - R_{22}(\sigma, \sigma)]\,\delta(t-\sigma) + \overline{\alpha}^2 = b_0(t)[\overline{\alpha}^2 + N\delta(t-\sigma)], \quad \sigma \geqslant t. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует:

$$[\overline{\alpha}^2 - R_{22}(t, t)]\,a_1(t) - Nb_0(t) = 0;$$
$$b_0(t) = 1. \tag{2.5}$$

Из (2.5) имеем

$$b_0(t) = 1, \quad a_1(t) = N/[\overline{\alpha}^2 - R_{22}(t, t)]. \tag{2.6}$$

Остается найти $R_{22}(t, t)$. Для определения этого параметра запишем дифференциальное уравнение фильтра на интервале $\sigma > t$. На этом интервале известен только вход, т. е. $R_1(t, \sigma)$, но не известен выход, т. е. $R_2(t, \sigma)$. Из изложенного с учетом соотношений (2.6) можно записать

$$\{N/[\overline{\alpha}^2 - R_{22}(t, t)]\}\,R_{22}'(t, \sigma) + R_{22}(t, \sigma) = \overline{\alpha}^2, \quad \sigma > t. \tag{2.7}$$

Решением этого дифференциального уравнения будет

$$R_{22}(t, \sigma) = \frac{\overline{\alpha}^2/N}{1 + (\overline{\alpha}^2/N)\,t}\,t = R_{22}(t, t). \tag{2.8}$$

Используя (2.6) и (2.8), определим

$$a_1(t) = [1 + (\overline{\alpha}^2/N)\,t]/(\overline{\alpha}^2/N). \tag{2.9}$$

Рассчитанный фильтр совпадает с полученным в [1] методом Шинброта.

П р и м е р 3. Найти дифференциальное уравнение, описывающее фильтр, который обеспечивает в каждый момент времени упреждение на h секунд полезного сигнала $m(t)$ и его фильтрацию от наложенной на него помехи $n(t)$. Исходные данные для примера взяты из [1]. Корреляционная функция $R_1(t, \sigma) = R_{mm}(t, \sigma) + R_{nn}(t, \sigma)$, а $R_2(t, \sigma) = R_{\mu m}(t, \sigma)$, $\mu(t) = m(t+h)$ — желаемый сигнал. Значения $R_1(t, \sigma)$ и $R_2(t, \sigma)$ заданы:

$$R_1(t, \sigma) = \begin{cases} R_{11}(t, \sigma) = \overline{\alpha}^2 t\sigma + N\delta(t-\sigma) \text{ при } \sigma \leqslant t; \\ R_{12}(t, \sigma) = \overline{\alpha}^2 t\sigma \text{ при } \sigma > t; \end{cases}$$

$$R_2(t, \sigma) = \{R_{21}(t, \sigma) = \overline{\alpha}^2 (t\sigma + h\sigma) \text{ при } \sigma \leqslant t. \tag{3.1}$$

Определим порядок инерционного и форсирующего звена дифференциального оператора искомого фильтра. Если $c_{10} = N \neq 0$, то $n > m$; если

$n = r = 1$, то $m = 0$. Таким образом, можно записать

$$a_1(t)\,R_2'(t, \sigma) + R_2(t, \sigma) = b_0(t)\,R_1(t, \sigma), \quad \sigma \leqslant t. \qquad (3.2)$$

На основе (14) с учетом исходных данных (3.1) запишем

$$R_2(t, \sigma) = R_{21}(t, \sigma) = \bar{\alpha}^2(t\sigma + h\sigma), \quad R_2'(t, \sigma) = R_{21}'(t, \sigma) + [R_{21}(\sigma, \sigma) - R_{22}(\sigma, \sigma)]\,\delta(t - \sigma) = \bar{\alpha}^2\sigma + [\bar{\alpha}^2(\sigma^2 + h\sigma) - R_{22}(\sigma, \sigma)]\,\delta(t - \sigma), \quad R_1(t, \sigma) = R_{11}(t, \sigma) = \bar{\alpha}^2 t\sigma + N\delta(t - \sigma) \text{ при } \sigma \leqslant t. \qquad (3.3)$$

Подставим (3.3) в (3.2). В результате получим

$$a_1(t)\,\{\bar{\alpha}^2\sigma + [\bar{\alpha}^2(\sigma^2 + h\sigma) - R_{22}(\sigma, \sigma)]\,\delta(t - \sigma)\} + \bar{\alpha}^2(t\sigma + h\sigma) = b_0(t)\,\{\bar{\alpha}^2 t\sigma + N\delta(t - \sigma)\}, \quad \sigma \leqslant t. \qquad (3.4)$$

Из (3.4) запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &a_1(t) - tb_0(t) = -(t + h); \\ &[\bar{\alpha}^2 t(t + h) - R_{22}(t, t)]\,a_1(t) - Nb_0(t) = 0. \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Из этой системы найдем

$$a_1(t) = \frac{N(t + h)}{[\bar{\alpha}^2 t(t + h) - R_{22}(t, t)]\,t - N}; \qquad (3.6)$$

$$b_0(t) = \frac{[\bar{\alpha}^2 t(t + h) - R_{22}(t, t)]\,(t + h)}{[\bar{\alpha}^2 t(t + h) - R_{22}(t, t)]\,t - N}.$$

Для отыскания неизвестной функции $R_{22}(t, t)$ запишем дифференциальное уравнение фильтра на интервале $\sigma > t$:

$$a_1(t)\,R_{22}'(t, \sigma) + R_{22}(t, \sigma) = b_0(t)\,R_{12}(t, \sigma) = b_0(t)\,\bar{\alpha}^2 t\sigma, \ \sigma > t. \qquad (3.7)$$

Решением этого дифференциального уравнения с учетом (3.6) будет

$$R_{22}(t, \sigma) = \frac{t + h}{1 + \dfrac{\bar{\alpha}^2}{N}\dfrac{t^3}{3}}\,\frac{(\bar{\alpha}^2)^2}{N}\,\sigma\,\frac{t^3}{3}, \quad \sigma > t. \qquad (3.8)$$

Подставим (3.8) при $\sigma = t$ в (3.6). В результате

$$a_1(t) = \frac{(t + h)\left(1 + \dfrac{\bar{\alpha}^2}{N}\dfrac{t^3}{3}\right)}{\dfrac{\bar{\alpha}^2}{N}ht^2 + \dfrac{2}{3}\dfrac{\bar{\alpha}^2}{N}t^3 - 1}; \quad b_0(t) = \frac{\bar{\alpha}^2 t(t + h)^2}{\left[\dfrac{\bar{\alpha}^2}{N}ht^2 + \dfrac{2}{3}\dfrac{\bar{\alpha}^2}{N}t^3 - 1\right]N}. \qquad (3.9)$$

Найденные значения $a_1(t)$ и $b_0(t)$ совпадают с полученными в [1] методом Шинброта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Питерсон И. Л.** Статистический анализ и оптимизация систем автоматического управления.— М.: Сов. радио, 1964.
2. **Алиев Ф. А., Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н.** Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления.— Киев: Наук. думка, 1978.
3. **Воронов А. А.** Устойчивость, управляемость, наблюдаемость.— М.: Наука, 1979.
4. **Цейтлин Я. М.** Проектирование оптимальных линейных систем.— Л.: Машиностроение, 1973.
5. **Современная** теория систем управления/Под ред. К. Т. Леондеса.— М.: Наука, 1970.
6. **Шилов Г. Е.** Математический анализ (второй специальный курс).— М.: Наука, 1965.
7. **Солодов А. В., Петров Ф. С.** Линейные автоматические системы с переменными параметрами.— М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 13 июля 1984 г.