Потребовав, чтобы максимальное отклонение модели от экспериментальной кривой не превышало 10%, зависимость $f_p^*(x)$ обнаружили во втором классе сложности (метод оценивания — метод наименьших квадратов):

$$y = f_2^*(x) = c_1 x^{c_2} (\sigma = 5{,}4\%).$$

При увеличении требуемой точности (5%) модели удалось обнаружить только в третьем классе сложности (см. таблицу):

$$y = f_3^*(x) = \mathrm{sh}\left(c_2 x^{c_1}\right) (\sigma < 3\%);$$

$$y = f_3^*(x) = c_2\,\mathrm{sh}\left(x^{c_1}\right) (\sigma < 2{,}5\%).$$

Дальнейшее увеличение точности (2,0%) привело к моделям четвертого класса сложности:

$$y = f_4^*(x) = c_2 x^{c_1} + c_3 x (\sigma = 1,\ 8\%);$$

$$y = f_4^*(x) = c_3\,\mathrm{sh}\left(c_2 x^{c_1}\right) (\sigma = 1{,}5\%).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арсенин В. Я.** Методы математической физики и специальные функции.— М.: Наука, 1984.
2. **Вапник В. Н.** Восстановление зависимостей по эмпирическим данным.— М.: Наука, 1979.
3. **Вапник В. Н.** Алгоритмы и программы восстановления зависимостей.— М.: Наука, 1984.
4. **Кузин Л. Т.** Основы кибернетики.— М.: Энергия, 1979, т. 2.
5. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел.— М.: Мир, 1969, т. 2.

Поступила в редакцию 19 марта 1985 г.

УДК 62—501.5

О. А. КАЦЮБА

(Куйбышев)

О МЕТОДЕ КВАЗИПРАВДОПОДОБНЫХ ОЦЕНОК В ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

Нелинейные относительно параметров модели находят широкое применение в теории фильтрации, идентификации нелинейных объектов, распознавания образов и т. д. Проблема решения задачи нелинейного оценивания (а именно к ней сводится задача идентификации нелинейных относительно параметров объектов управления) без априорного знания плотности распределения помех наблюдений рассматривалась многими авторами [1—5]. Наиболее полно эта задача применительно к проблеме идентификации изложена в [2, 3], однако здесь имеют место трудности проверки условий состоятельности и асимптотической нормальности оценок параметров нелинейных моделей, к тому же случайные наблюдения одинаково распределены и область изменения неизвестных параметров — компакт.

В настоящей работе, во-первых, решается задача идентификации нелинейных объектов на основе оригинальной разновидности метода эмпирического риска, когда функция потерь принадлежит априорно только классу плотностей распределения, т. е. имеет место прямое обобщение метода максимального правдоподобия (ММП) на случай априорной неопределенности о законах распределения с помощью введения простых и конструктивных с точки зрения их проверки дополнительных условий состоятельности и асимптотической нормальности оценок параметров. Эти дополнительные условия тождественно выполняются, когда функция потерь порождается истинной плотностью распределения. Еще раз необходимо подчеркнуть, что основной идеей метода оценивания является распространение метода максимального правдоподобия на случай, когда вместо истинного закона распределения f употребляется закон φ (такие оценки естественно названы квазиправдоподобными [6, 7]). Во-вторых, рассматривается случай независимых неоднородных наблюдений. В-третьих, область определения неизвестных параметров нелинейных моделей не обязательно компактна.

Доказаны теоремы о состоятельности квазиправдоподобных оценок, причем условия, налагаемые на функцию $\ln\varphi$, достаточно широки: от существования первой производной до простой непрерывности этих функций; приведена также теорема об асимптотической несмещенности и нормальности оценок метода максимального квазиправдоподобия (МКП).

Постановка задачи. Рассмотрим задачу несмещенного оценивания регрессионных функций: наблюдаемые величины y_i представлены в виде $y_i=\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{b}_0)+\xi_i$, где ξ_i — случайные независимые величины $(i=\overline{1, N})$, удовлетворяющие условиям $E(\xi_i)=0$, $E(\xi_i^2)=\sigma_i^2<\infty$ (E — оператор математического ожидания); $\eta(\mathbf{x}_i, \mathbf{b}_0)$ — известная функция переменных $\mathbf{x}_i$; $\mathbf{b}_0\in B$ — вектор истинных параметров, причем B — p-мерный открытый гиперпараллелепипед $c_j'<b^{(j)}<c_j''$, $j=\overline{1, p}$. Предположим, что распределение величины y_i задается некоторой плотностью $\varphi_i(y_i, \mathbf{b})\neq f_i(y_i, \mathbf{b})$, $\mathbf{b}\in B$ по отношению к некоторой σ-конечной мере ν, причем для каждого $\mathbf{b}\in B$ и всех y_i $\varphi_i(y_i, \mathbf{b})\neq 0$. Рассмотрим выборку $Y=(y_1, \ldots, y_N)$, которой отвечает логарифмическая функция квазиправдоподобия [6, 7]:

$$\ln\varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{b})=\sum_{i=1}^{N}\ln\varphi_i(y_i, \mathbf{b}).$$

Если $\varphi_i(y_i, \mathbf{b})$ имеют частные производные по всем аргументам $b^{(j)}$, то

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\ln\varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}=0\quad (j=1, p)$$

— система уравнений максимального квазиправдоподобия, корень уравнения — оценка максимального квазиправдоподобия в широком смысле.

Как уже было изложено выше, имеет смысл рассматривать состоятельность оценки МКП при независимых неоднородных наблюдениях y_i, так как оценивание параметров регрессионных функций практически всегда сводится к процедуре параметрического оценивания при неоднородных наблюдениях y_i (хотя бы за счет $E(y_i)\neq\text{const}$). Для оценки МКП в широком смысле имеет место

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. При достаточно больших N система уравнений квазиправдоподобия имеет один корень.

2. Векторы $\mathbf{x}_i$ неслучайные.

3. Для каждого y_i и всех $\mathbf{b}\in B$ существуют и непрерывны, первые производные $\mathbf{K}(y_i, \mathbf{b})$ и соответственно матрица $\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{b})=\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\ln\varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right|$.

4. Для всех $b\in B$ и $b_0^{(j)}\neq b^{(j)}$ существует и конечен

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_{b_0}\left(\frac{\partial\ln\varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right).$$

5. Выполняется условие $(b_0^{(j)}\neq b^{(j)})$

$$(b^{(j)}-b_0^{(j)})\lim_{N\to\infty}E_{b_0}\left(\frac{1}{N}\frac{\partial\ln\varphi(Y, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right)<0,\quad j=1, p. \tag{1}$$

6. При каждом $\mathbf{b}_0 \in B$ для дисперсии величин $D_{\mathbf{b}_0}\left(\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, b)}{\partial b^{(j)}}\right)$ выполняются условия теоремы Маркова [8, с. 209] равномерно относительно $\mathbf{b} \in B_0 \subset B$, тогда последовательность оценок МКП $\{\beta_\varphi(\mathbf{Y})\}$ состоятельная в широком смысле.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — любое число, причем $b_0^{(j)} - \varepsilon \leqslant \leqslant b^{(j)} \leqslant b_0^{(j)} + \varepsilon$ принадлежит области B. Зафиксируем любой индекс j и рассмотрим функцию

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\bigg|_{b^{(j)}=b_0^{(j)}+\varepsilon};$$

эта функция зависит от остальных параметров $b^{(m)}$ $(m \neq j)$ и

$$b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j-1)}, b_0^{(j)}, b^{(j+1)}, \ldots, b^{(p)} \in B.$$

Докажем, что последовательность

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\bigg|_{b^{(j)}=b_0^{(j)}+\varepsilon}$$

сходится по вероятности к

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E_{\mathbf{b}_0}\left(\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right)\bigg|_{b^{(j)}=b_0^{(j)}+\varepsilon} \qquad (2)$$

равномерно относительно $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(j-1)}, b^{(j+1)}, \ldots$, удовлетворяющих условию $b_0^{(j)} - \varepsilon \leqslant b^{(j)} \leqslant b_0^{(j)} + \varepsilon$. Из условия

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} D_{b_0}\left(\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, b)}{\partial b^{(j)}}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

равномерно относительно $\mathbf{b} \in B_0 \subset B$ следует, что для любого $\bar{\varepsilon} > 0$ существует $N^1(\varepsilon)$ такое, что при $N > N^1$

$$\left\| \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} D_{\mathbf{b}_0}\left(\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right) \right\| < \bar{\varepsilon}$$

для всех $\mathbf{b} \in B_0$. Тогда по неравенству Чебышева [9, с. 209] имеем

$$q_{\mathbf{b}_0}\left(\left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\bigg|_{b^{(j)}=b_0^{(j)}+\varepsilon} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E_{b_0}\left(\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right)\bigg|_{b^{(j)}=b_0^{(j)}+\varepsilon} \right\| \geqslant \bar{\delta}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{\bar{\delta}^2}$$

равномерно относительно $\mathbf{b} \in B_0$. Так как по условию 5 выражение (2) отрицательно, то при любом $\delta > 0$ можно найти такое $N_1(\varepsilon, \delta, b_0)$, что при $N > N_1$

$$q_{\mathbf{b}_0}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\bigg|_{b^{(j)}=b_0{}^{(j)}+\varepsilon} \geqslant 0\right) < \frac{1}{2p}\delta.$$

Рассуждая аналогично, находим, что имеет место такое число $N_2 = N_2(\varepsilon, \delta, \mathbf{b}_0)$, что при $N > N_2$

$$q_{\mathbf{b}_0}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\bigg|_{b^{(j)}=b_0^{(j)}-\varepsilon} \leqslant 0\right) < \frac{1}{2p}\delta.$$

Из последних выражений следует, что при $N > N_0 = \max(N^{(1)}, N^{(2)})$

$$q_{\mathbf{b}_0}\left\{\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\bigg|_{b^{(j)}=b_0^{(j)}+\varepsilon} < 0\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times U\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\bigg|_{b^{(j)}=b_0^{(j)}-\varepsilon} > 0\right)\right],\ j=\overline{1,p}\right\} > 1-\delta.$$

Однако по условию теоремы функция непрерывна в $B_0 \subset B$, поэтому имеем $(q_{\mathbf{b}_0}(\boldsymbol{\beta}_\varphi(\mathbf{Y}))$ существует $U(\|\boldsymbol{\beta}_\varphi^{(j)}(\mathbf{Y}) - b_0^j\| < \varepsilon\,(j=\overline{1,p})))>1-\delta$. Так как δ, ε выбраны произвольно, то последнее неравенство означает сходимость по вероятности $\beta_\varphi(\mathbf{Y})$ к $\mathbf{b}_0$.

Известная ограниченность рассмотренных теорем заключается в том, что требуется, во-первых, единственность корня, во-вторых, выполнение довольно жестких ограничений на поведение функции квазиправдоподобия (существование производных и т. д.), поэтому необходимо рассмотреть доказательство состоятельности оценок МКП, не требующее существования производных и основанное на понятии точной верхней грани.

Теорема 2. Введем следующие обозначения: $s_\rho(\mathbf{b})$ — замкнутый шар в B с центром в точке $\mathbf{b}$ и радиусом ρ:

$$\varphi_i^*(y_i, \mathbf{b}, \rho) = \sup_{\overline{b}\in s_\rho(\mathbf{b})} \varphi_i(y_i, \overline{\mathbf{b}}), \quad \varphi_i^{**}(y_i, r) = \sup_{\|\overline{b}\|>r} \varphi_i(y_i, \overline{\mathbf{b}}), \quad r>0.$$

Пусть выполняются условия:

1. При каждом $\mathbf{Y}\in\mathbf{X}$ функция $\varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{b})$ непрерывна относительно $\mathbf{b}$ в B (B — открытое множество).
2. Векторы $\mathbf{x}_i$ неслучайные.
3. Для каждого $\mathbf{b}_0\in B$ существует $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}[\log\varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)]$.
4. Для всех $\mathbf{Y}$ и каждого $\mathbf{b}\in B$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{b}_0$ существуют:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}[\log\varphi_i(y_i, \mathbf{b})] < \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}[\log\varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)];$$

$$\lim_{\rho\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}\left[\log\varphi_i^*(y_i, \mathbf{b}, \rho)\right] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}[\log\varphi_i(y_i, \mathbf{b})]; \tag{3}$$

$$\lim_{r\to\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}\left[\log\varphi_i^{**}(y_i, r)\right] = -\infty.$$

5. При каждом $\mathbf{b}\in B$ для дисперсии величин $\log\varphi_i^*(y_i, \mathbf{b}, \rho)$, $\log\varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)$, $\log\varphi_i^{**}(y_i, r)$ выполняются условия теоремы Маркова [8, с. 209].

Возьмем произвольное замкнутое множество $B'\subset B$ и $\mathbf{b}_0\notin B'$, тогда для любых $\varepsilon>0$, $\delta>0$ имеет место

$$q_{\mathbf{b}_0}\left(\left\|\frac{\sup_{\mathbf{b}\in B'}\varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{b})}{\varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{b}_0)}\right\| < \varepsilon\right) > 1-\delta, \text{ если } N > N(\varepsilon, \delta).$$

Следствие. Пусть выполняются все предположения теоремы и для каждого $N\geqslant 1$ определена на X измеримая функция $\beta_\varphi(\mathbf{Y})$ такая, что для всех $\mathbf{Y}\in\mathrm{X}$ верно равенство

$$\sup_{\mathbf{b}\in B'}\varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\beta}_\varphi(\mathbf{Y})),$$

тогда $\{\beta_\varphi(\mathbf{Y})\}$ — состоятельная последовательность оценивающих функций для $\mathbf{b}\in B'$.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что из условия теоремы ($\varphi_i(y_i, \mathbf{b})$ измерима) φ^*, φ^{**} тоже измеримы. Далее выберем $r = r_0$ так, чтобы

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_{\mathbf{b}_0}\left[\log \varphi_i^{**}(y_i, r_0)\right] < \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_{\mathbf{b}_0}\left[\log \varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)\right];$$

существование такого r_0 вытекает из (3). Обозначим через $B'' \subset B'$ множество, состоящее из всех точек $\mathbf{b}$ из B', для которых выполняется неравенство $\|\mathbf{b}\| \leqslant r_0$, тогда в соответствии с условиями 3, 4 теоремы для каждой точки $\mathbf{b} \in B''$ поставим в соответствие значение $\rho_{\mathbf{b}}$ такое, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_{\mathbf{b}_0}\left[\log \varphi_i^{*}(y_i, \mathbf{b}, \rho)\right] < \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_{\mathbf{b}_0}\left[\log \varphi_i(y^i, \mathbf{b}_0)\right].$$

Множество B'' компактно, поэтому по теореме Бореля о покрытиях [10, с. 13] в B'' найдется конечное число таких точек $b_1, \ldots, b_\mu$, что $B'' \subset \subset \bigcup_{k=1}^{\mu} S_{\rho_{\mathbf{b}_k}}(\mathbf{b}_k)$. Очевидно, для каждого $\mathbf{Y}$ имеем

$$0 \leqslant \sup_{\mathbf{b}\in B'} \varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{b}) \leqslant \sum_{k=1}^{\mu}\prod_{i=1}^{N} \varphi_i^*(y_i, \mathbf{b}_k, \rho_k) + \prod_{i=1}^{N}\varphi_i^{**}(y_i, r_0).$$

Следовательно, достаточно доказать, что для любых ε', δ', ε'', δ''

$$q_{\mathbf{b}_0}\left(\left\|\frac{\prod_{i=1}^{N}\varphi_i^*(y_i, \mathbf{b}_k, \rho_k)}{\varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{b}_0)}\right\| < \varepsilon'\right) > 1 - \delta^1,\ N > N(\varepsilon', \delta', \mathbf{b}_k),\quad k = \overline{1, \mu}; \tag{4}$$

$$q_{\mathbf{b}_0}\left(\left\|\frac{\prod_{i=1}^{N}\varphi_i^{**}(y_i, r_0)}{\varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{b}_0)}\right\| < \varepsilon''\right) > 1 - \delta'',\quad N > N(\varepsilon'', \delta'', r_0),$$

так как μ не зависит от N. Заметим, что (4) равносильны соотношениям

$$q_{\mathbf{b}_0}\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\log\varphi_i^*(y_i, \mathbf{b}_k, \rho_k) - \sum_{i=1}^{N}\log\varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)\right) < \log\varepsilon'\right) > 1 - \delta';$$

$$q_{\mathbf{b}_0}\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\varphi_i^{**}(y_i, r_0) - \sum_{i=1}^{N}\log\varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)\right) < \log\varepsilon''\right) > 1 - \delta''.$$

Из условий доказываемой теоремы и теоремы Слуцкого [11, с. 282] следует, что

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\varphi_i^*(y_i, \mathbf{b}_k, \rho_k) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.в.}} \frac{1}{N}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}\left(\log\varphi_i^*(y_i, \mathbf{b}_k, \rho_k)\right) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}\left(\log\varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)\right);$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\varphi_i^{**}(y_i, r_0) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log\varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.в.}} \frac{1}{N}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}\left(\log\varphi_i^{**}(y_i, r_0)\right) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}\left(\log\varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)\right).$$

В соответствии с (3) это влечет (4) и доказательство теоремы.

Доказательство следствия. По определению $\beta_\varphi(\mathbf{Y})$

$$\varphi(\mathbf{Y}, \beta_\varphi(\mathbf{Y}))/_{\varphi(\mathbf{Y}, \mathbf{b}_0)} \geqslant 1$$

для всех N и всех $y_1, \ldots, y_N$. Предположим, что $\{\beta_\varphi(\mathbf{Y})\}$ — несостоятельная последовательность, тогда можно выбрать последовательность целых чисел $0 < N_1 < N_2 < \ldots$ и указать два положительных числа ε_0, δ_0 таких, что

$$q_{\mathbf{b}_0}\left(\left\|\boldsymbol{\beta}_{\varphi N_i}\left(\mathbf{Y}^{(N_i)}\right) - \mathbf{b}_0\right\| < \varepsilon_0\right) \leqslant 1 - \delta_0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

т. е. имеют место такие множества Θ_{N_i}, во всех точках $\mathbf{Y}^{(N_i)}$ которых с определенной вероятностью $\left\|\boldsymbol{\beta}_{\varphi N_i}\left(\mathbf{Y}^{N_i}\right) - \mathbf{b}_0\right\| \geqslant \varepsilon_0$, откуда следует

$$\sup_{\substack{\|\mathbf{b}-\mathbf{b}_0\| \geqslant \varepsilon_0 \\ \mathbf{b} \in B'}} \varphi^{(N_i)}\left(\mathbf{Y}^{(N_i)}, \mathbf{b}\right) \geqslant \varphi^{(N_i)}\left(\mathbf{Y}^{(N_i)}, \boldsymbol{\beta}_{\varphi N_i}\left(\mathbf{Y}^{(N_i)}\right)\right)$$

и

$$\sup_{\substack{\|\mathbf{b}-b_0\| \geqslant \varepsilon_0 \\ \mathbf{b} \in B'}} \frac{\varphi^{(N_i)}\left(\mathbf{Y}^{(N_i)}, \mathbf{b}\right)}{\varphi^{(N_i)}\left(\mathbf{Y}^{(N_i)}, \mathbf{b}_0\right)} \geqslant 1$$

для неограниченно больших N_i. Так как множество $B' \cap \{\mathbf{b}\colon \|\mathbf{b} - \mathbf{b}_0\| \geqslant \varepsilon_0\}$ замкнуто, то по теореме 2 множества Θ_{N_i} должны иметь произвольно малую $q_{\mathbf{b}_0}$ меру, если N_i достаточно велико, что приводит к противоречию и доказательству следствия.

Докажем далее, что при определенных условиях квазиправдоподобная оценка асимптотически несмещенная и нормальная.

Теорема 3. Пусть выполняются:

1. Все условия состоятельности (теорема 1).
2. Для каждого $\mathbf{b} \in B$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E_{\mathbf{b}}\left(\frac{\partial \ln \varphi_i\,(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right) = 0.$$

3. При всех $\mathbf{b} \in B$ и любых N существует положительно определенная матрица

$$\frac{1}{N}\, E_{\mathbf{b}}\left\{\sum_{i=1}^{N} K\,(y_i, \mathbf{b})\, K^T\,(y_i, \mathbf{b})\right\} = \frac{1}{N}\,\mathbf{M}_N$$

и

$$\mathbf{R}\,(\mathbf{b}) = \lim_{N\to\infty} \left(-\,E_{\mathbf{b}}\,(\mathbf{L}\,(\mathbf{Y}, \mathbf{b}))\right) = \lim_{N\to\infty}\left(-\,E_{\mathbf{b}}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 \ln \varphi_i\,(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(m)}\partial b^{(j)}}\right|\right)$$

также положительно определенная.

4. Для каждого $\mathbf{b} \in B$ дисперсия величин $\dfrac{\partial^2 \ln \varphi_i\,(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(m)}\partial b^{(j)}}$ подчиняется условиям теоремы Маркова [8, с. 209].
5. Для любых $\mathbf{b} \in B$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} E_{\mathbf{b}}\left\|\left([\mathbf{M}_N]^{-1/2}\,\frac{\partial \ln \varphi_i\,(y_i, \mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}}\right)\right\|^{2+\delta} = 0, \quad \delta > 0.$$

6. Существует такая положительная дифференцируемая функция $g(\mathbf{b})$, что все функции

$$\frac{\partial}{\partial b^{(m)}}\left(g\,(\mathbf{b})\,\frac{\partial \ln \varphi_i\,(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right)$$

равномерно относительно i непрерывны по $\mathbf{b}$, тогда оценка МКП является асимптотически несмещенной и нормальной с ковариационной матрицей

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{N} E_{\mathbf{b}_0}[\mathbf{L}\,(y_i, \mathbf{b}_0)]\right\}^{-1} \mathbf{M}_N\,(\mathbf{b}_0)\left\{\sum_{i=1}^{N} E_{\mathbf{b}_0}\,[\mathbf{L}\,(y_i, \mathbf{b}_0)]\right\}^{-1}.$$

Рассмотрим выражение $g(\mathbf{b})\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{b})$, которое разложим в ряд Тейлора b_0:

$$g(\mathbf{b})\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}} = \frac{1}{N}g(\mathbf{b}_0)\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)}{\partial b^{(j)}} +$$

$$+\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial b^{(m)}}\left[g(\mathbf{b})\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(i)}}\right]\Bigg|_{\widetilde{\mathbf{b}}_j}\left(b^{(m)}-b_0^{(m)}\right),$$

$$\widetilde{\mathbf{b}}_j = \mathbf{b}_0 + \nu_j(\mathbf{b} - \mathbf{b}_0);$$

$\|\nu_j\| < 1$, ν_j зависит от $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{Y}$. Пусть $\beta_\varphi(\mathbf{Y})$ — корень уравнения квазиправдоподобия, тогда

$$\frac{1}{N}g(\mathbf{b}_0)\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)}{\partial b^{(j)}} = -\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial b^{(m)}}\times$$

$$\times\left[g(\mathbf{b})\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right]\Bigg|_{\widetilde{\mathbf{b}}_j}\left(\beta_\varphi^{(m)}(\mathbf{Y}) - \mathbf{b}_0^{(m)}\right).$$

Запишем данную систему уравнений в матричной форме, для чего обозначим

$$\mathbf{G} = |g_{jm}| = \left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial b^{(m)}}\left[g(\mathbf{b})\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right]\Bigg|_{\mathbf{b}=\widetilde{\mathbf{b}}_j}\right|, \tag{5}$$

тогда

$$(\beta_\varphi(\mathbf{Y}) - \mathbf{b}_0) = \mathbf{G}\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{b}_0)\mathbf{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{b}_0). \tag{6}$$

Так как уравнение квазиправдоподобия имеет один корень, то определитель (5) отличен от нуля и система уравнений разрешима относительно $(\beta_\varphi(\mathbf{Y}) - \mathbf{b}_0)$. При выполнении условий 5 легко показать, что числитель выражения (6) распределен по p-нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсионной матрицей $g^2(\mathbf{b}_0)\mathbf{M}_N/N^2$. Покажем теперь, что случайная матрица G при $N \to \infty$ сходится по вероятности к $g(\mathbf{b}_0)\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}[\mathbf{L}(y_i, \mathbf{b}_0)]$. Для этого вначале докажем, что при $N \to \infty$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial b^{(m)}}\left(g(\mathbf{b})\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right)\Bigg|_{\mathbf{b}=\widetilde{\mathbf{b}}_j} - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial b^{(m)}}\left(g(\mathbf{b}_0)\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)}{\partial b^{(j)}}\right)\xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.в.}} 0.$$

По условию 6 можно для данного $\delta > 0$ найти такое $\varepsilon(\delta, \mathbf{b}_0)$, что

$$\left\|\frac{\partial}{\partial b^{(m)}}\left(g(\mathbf{b})\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right) - \frac{\partial}{\partial b^{(m)}}\left(g(\mathbf{b}_0)\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)}{\partial b^{(j)}}\right)\right\| < \delta.$$

Если $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_0\| < \varepsilon$ для всех y_i, следовательно,

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial b^{(m)}}\left(g(\mathbf{b})\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial b^{(m)}}g\mathbf{b}_0\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)}{\partial b^{(j)}}\right)\right\| \leqslant \delta.$$

Из п. 1 следует, что

$$q_{\mathbf{b}_0}(\|\beta_\varphi(\mathbf{Y}) - \mathbf{b}_0\| < \varepsilon) > 1 - \pi,$$
$$N > N(\pi, \delta, \mathbf{b}_0),$$

откуда

$$q_{\mathbf{b}_0}\left(\left\|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial b^{(m)}}\left(g(\mathbf{b})\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b})}{\partial b^{(j)}}\right)\Bigg|_{\mathbf{b}_0+\nu_j(\beta_\varphi(\mathbf{Y})-\mathbf{b}_0)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial b^{(m)}}\left(g(\mathbf{b}_0)\frac{\partial \ln \varphi_i(y_i, \mathbf{b}_0)}{\partial b^{(j)}}\right)\right\| < \delta\right) > 1 - \pi \; (j, m = \overline{1, p}).$$

В силу произвольности δ, π сходимость доказана. Из теоремы Слуцкого [11, 12] следует, что матрица $\mathbf{G}^{-1}$ сходится к $g^{-1}(\mathbf{b}_0)\lim\limits_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}[\mathbf{L}(y_i, \mathbf{b}_0)]\right\}^{-1}$. Применив лемму [13, с. 187], получаем, что распределение вектора $(\beta_\varphi-\mathbf{b}_0)\,(N\to\infty)$ p нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсионной матрицей

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}[\mathbf{L}(y_i, \mathbf{b}_0)]\right\}^{-1}\mathbf{M}_N(\mathbf{b}_0)\left\{\sum_{i=1}^{N}E_{\mathbf{b}_0}[\mathbf{L}(y_i, \mathbf{b}_0)]\right\}^{-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Иванов А. В., Козлов О. М.** О свойствах оценок параметров регрессии для нелинейных объектов.— Кибернетика, 1980, № 5.
2. **Xuber P. J.** The behavior of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions.— Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., 1967, v. 1, p. 222—234.
3. **Цыбаков А. Б.** О методе минимизации эмпирического риска в задачах идентификации.— Автоматика и телемеханика, 1981, № 12.
4. **Цыпкин Я. З.** Адаптация и обучение в автоматических системах.— М.: Наука, 1968.
5. **Демиденко Е. З.** Линейный и нелинейный регрессионный анализ.— М.: Наука, 1981.
6. **Кацюба О. А., Хакимов Б. Б.** Алгоритм нелинейного параметрического оценивания в многомерных задачах статистической обработки.— Автометрия, 1984, № 2.
7. **Мудров В. И., Кушко В. Л.** Методы обработки измерений.— М.: Сов. радио, 1976.
8. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятности.— М.: Наука, 1969.
9. **Ширяев А. Н.** Вероятность.— М.: Наука, 1980.
10. **Шметтерер Л.** Введение в математическую статистику.— М.: Наука, 1976.
11. **Крамер Г.** Математические методы статистики.— М.: Мир, 1975.
12. **Elgerd O. I.** Control Systems Theory.— N. Y.: Mc-Craw-Hill, 1967.
13. **Дюге Д.** Теоретическая и прикладная статистика.— М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 5 августа 1985 г.

УДК 621.317 : 519.21

М. Г. ЗОТОВ

(Москва)

СПОСОБ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БУТОНА

Интегральное уравнение Винера следует из решения задачи оптимальной фильтрации в установившемся режиме. Оптимальный фильтр получается с не зависящими от времени параметрами. Теория Винера была развита и обобщена в работе Бутона, в которой предложен критерий минимума мгновенного значения средней квадратической ошибки для линейной системы с переменными параметрами при нестационарных входных сигналах. Результат Бутона заключается в получении интегрального уравнения. Однако общее решение этого уравнения было найдено Шинбротом, предложившим приближенный метод, позволяющий получить инженерное решение для широкого класса практически важных задач. Этот метод изложен в [1]. Там же приведены ссылки на оригинальные работы Бутона и Шинброта. Позже Калман предложил способ решения не только одномерного, но и многомерного интегрального уравнения Бутона. Решение получено в пространстве состояний. Однако, несмотря на успехи конструирования фильтров в пространстве состояний, выявились и некоторые недостатки [2, 3]: