ЛИТЕРАТУРА

1. Носов Ю. Р., Петросянц К. О., Шилин В. А. Математические модели элементов интегральной электроники.— М.: Сов. радио, 1976.
2. Slotboom J. W. Computer-aided two-dimensional analysis of bipolar transistors.— IEEE Trans., 1973, v. ED-20, N 8, p. 669—679.
3. Sguhar M. A. Two-dimensional MOS-transistor simulation.— Közp. fiz. cuf. intez., 1981, N 13, p. 1—19.
4. Mock M. S. A two-dimensional mathematical model of the insulated-gate field effect transistor.— Sol. St. Electron., 1973, v. 16, p. 601.
5. Toyabe T., Ujiie K., Okaba T. e. a. Method and application of a two-dimensional analysis of I²L.— Trans. Inst. Electron. and Commun., 1979, v. 62, N 3, p. 215—222.
6. Sharfetter D. L., Gummel H. K. Large-signal analysis of silicon Read diode oscillator.— IEEE Trans., 1969, v. ED-16, p. 64—77.
7. Stone H. L. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations.— SIAM J. Numer. Anal., 1968, v. 5, N 3, p. 530—558.
8. Meijerink J. A., van der Vorst H. A. An iterative solution method for linear system of which the coefficient matrix is a symmetrical M-matrix.— Math. Comput., 1977, v. 31, N 137, p. 148—162.
9. Абрамов И. И., Мулярчик С. Г. Метод векторной релаксации систем в задачах многомерного численного анализа полупроводниковых приборов.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1981, т. 24, № 6.
10. Мулярчик С. Г., Соловьев В. Г. Автоматическое формирование уравнений при численном моделировании элементов интегральных схем.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1983, т. 26, № 6.

Поступила в редакцию 25 ноября 1985 г.

УДК 621.315.592 : 517.949.2

Ю. А. БЕРЕЗИН, О. Е. ДМИТРИЕВА

(Новосибирск)

СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ДРЕЙФОВО-ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

В статье [1] предложена схема численного интегрирования системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих нестационарную дрейфово-диффузионную модель полупроводниковой плазмы. Область применения схемы существенно ограничена предположением о постоянстве коэффициентов подвижности и диффузии. В настоящей работе изложено обобщение схемы [1] на случай произвольных зависимостей этих коэффициентов от координат и времени. Запишем исходную систему уравнений в следующем виде (см., например, [2]):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{4\pi q}{\varepsilon}(n-p-N);$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_n n\frac{\partial\varphi}{\partial x}-D_n\frac{\partial n}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_n n\frac{\partial\varphi}{\partial y}-D_n\frac{\partial n}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_n n\frac{\partial\varphi}{\partial z}-D_n\frac{\partial n}{\partial z}\right)=G-R; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_p p\frac{\partial\varphi}{\partial x}+D_p\frac{\partial p}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_p p\frac{\partial\varphi}{\partial y}+D_p\frac{\partial p}{\partial y}\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_p p\frac{\partial\varphi}{\partial z}+D_p\frac{\partial p}{\partial z}\right)=G-R,$$

где φ — потенциал; n, p — концентрация электронов и дырок; μ_n, μ_p — коэффициенты подвижности электронов и дырок; D_n, D_p — коэффициенты диффузии электронов и дырок; G, R — скорости генерации и рекомбинации электронно-дырочных пар; N — плотность заряда легирующих примесей. Все независимые переменные и коэффициенты являются функциями координат x, y, z и времени t.

Представим алгоритм решения системы (1), не конкретизируя краевую задачу. Заметим лишь, что область интегрирования и граничные условия могут быть произвольными. Произведя дифференцирование в левых частях уравнений непрерывности и учитывая связь скоростей носителей заряда с потенциалом $\mathbf{v} = \mu_n \nabla \varphi$, $\mathbf{w} = -\mu_p \nabla \varphi$, перепишем систему (1) в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{4\pi q}{\varepsilon}(n - p - N);$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial n}{\partial t} + \left(v_x - \frac{\partial D_n}{\partial x}\right)\frac{\partial n}{\partial x} - D_n\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial \mu_n}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}n + \left(v_y - \frac{\partial D_n}{\partial y}\right)\frac{\partial n}{\partial y} - \\ - D_n\frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu_n}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}n + \left(v_z - \frac{\partial D_n}{\partial z}\right)\frac{\partial n}{\partial z} - D_n\frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + \frac{\partial \mu_n}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}n + \\ + \mu_n n\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = G - R; \qquad (2) \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \left(w_x - \frac{\partial D_p}{\partial x}\right)\frac{\partial p}{\partial x} - D_p\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial \mu_p}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}p + \left(w_y - \frac{\partial D_p}{\partial y}\right)\frac{\partial p}{\partial y} - \\ - D_p\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\partial \mu_p}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}p + \left(w_z - \frac{\partial D_p}{\partial z}\right)\frac{\partial p}{\partial z} - D_p\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial \mu_p}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}p - \\ - \mu_p p\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = G - R.\end{gathered}$$

Интегрирование системы (2) осуществляется в пять этапов. На первом этапе решается уравнение Пуассона каким-либо итерационным методом (нами использовался метод верхней релаксации с ускорением сходимости [3]). Последующие четыре этапа относятся к интегрированию уравнений непрерывности для электронов и дырок. Запишем схему расщепления для электронного уравнения непрерывности (для дырок все делается аналогично). Итак, на втором этапе аппроксимируем конвективный перенос и диффузию по оси x неявной схемой

$$\begin{gathered}\frac{n_{ijl}^{k+1/4} - n_{ijl}^{k}}{\tau_k} + \left(v_{xijl}^{k+1} - \Lambda_1 D_{nijl}^{k}\right)\Lambda_1 n_{ijl}^{k+1/4} - \\ - D_{nijl}^{k}\Lambda_{11}n_{ijl}^{k+1/4} + \Lambda_1\varphi_{ijl}^{k+1}\Lambda_1\mu_{nijl}^{k}n_{ijl}^{k+1/4} = G_{ijl} - R_{ijl}. \qquad (3)\end{gathered}$$

Здесь и далее используются стандартные обозначения: f_{ijl}^{k} — сеточные функции; i, j, l — номера точек по x, y, z (допустима произвольная сетка, как равномерная, так и неравномерная, с шагами h_1, h_2, h_3); k — номер временно́го слоя; τ_k — шаг по времени на слое с номером k; Λ_1, Λ_{11} — разностные аналоги первой и второй производной по оси x. Результат выполнения второго этапа — определение значений $n_{ijl}^{k+1/4}$, $p_{ijl}^{k+1/4}$. На третьем этапе аппроксимируем перенос и диффузию по оси y неявной схемой

$$\begin{gathered}\frac{n_{ijl}^{k+2/4} - n_{ijl}^{k+1/4}}{\tau_k} + \left(v_{yijl}^{k+1} - \Lambda_2 D_{nijl}^{k}\right)\Lambda_2 n_{ijl}^{k+2/4} - \\ - D_{nijl}^{k}\Lambda_{22}n_{ijl}^{k+2/4} + \Lambda_2\varphi_{ijl}^{k+1}\Lambda_2\mu_{nijl}^{k}n_{ijl}^{k+2/4} = 0, \qquad (4)\end{gathered}$$

откуда могут быть найдены значения $n_{ijl}^{k+2/4}$. Здесь $\Lambda_2 \infty \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\Lambda_{22} \infty \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

На четвертом этапе аппроксимируем перенос и диффузию по оси z неявной схемой

$$\begin{gathered}\frac{n_{ijl}^{k+3/4} - n_{ijl}^{k+2/4}}{\tau_k} + \left(v_{zijl}^{k+1} - \Lambda_3 D_{nijl}^{k}\right)\Lambda_3 n_{ijl}^{k+3/4} - \\ - D_{nijl}^{k}\Lambda_{33}n_{ijl}^{k+3/4} + \Lambda_3\varphi_{ijl}^{k+1}\Lambda_3\mu_{nijl}^{k}n_{ijl}^{k+3/4} = 0, \qquad (5)\end{gathered}$$

откуда можно найти значения $n_{ijl}^{k+3/4}$. Здесь $\Lambda_3 \infty \frac{\partial}{\partial z}$, $\Lambda_{33} \infty \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Для дырок выписываются уравнения, аналогичные (3)—(5). Неявные уравнения (3)—(5) и подобные им разностные уравнения для дырок эффективно решаются методом немонотонной прогонки [3], где не требуется выполнения условия диагонального преобладания элементов матрицы.

На последнем, пятом, этапе произведем адаптацию плотности, аппроксимировав неявными схемами «остатки» уравнений непрерывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mu_n n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \mu_p p \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0,$$

которые в силу уравнения Пуассона могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{4\pi q}{\varepsilon} \mu_n n (n - p - N) = 0; \\ &\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{4\pi q}{\varepsilon} \mu_p p (n - p - N) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Разностный аналог уравнений (6) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{n_{ijl}^{k+1} - n_{ijl}^{k+3/4}}{\tau_k} + \frac{4\pi q}{\varepsilon} \mu_{nijl}^k n_{ijl}^k \left(n_{ijl}^{k+1} - p_{ijl}^{k+1} - N_{ijl} \right) = 0; \\ &\frac{p_{ijl}^{k+1} - p_{ijl}^{k+3/4}}{\tau_k} - \frac{4\pi q}{\varepsilon} \mu_{pijl}^k p_{ijl}^k \left(n_{ijl}^{k+1} - p_{ijl}^{k+1} - N_{ijl} \right) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Алгебраическая система (7) решается совместно, в результате чего определяются концентрации носителей заряда на новом, $(k+1)$-м, временнóм слое и цикл вычислений заканчивается.

Предложенная схема (3)—(7) имеет первый порядок точности по времени, а по i-й ($i = 1, 2, 3$) пространственной переменной точность определяется минимальным порядком аппроксимации производных их разностными аналогами Λ_i, Λ_{ii}. Если члены переноса аппроксимируются на равномерной сетке центральными разностями, схема имеет порядок $o(\tau, h_1^2, h_2^2, h_3^2)$.

Запишем предложенную схему расщепления в целых шагах для электронного уравнения непрерывности:

$$\begin{aligned} \frac{n_{ijl}^{k+1} - n_{ijl}^k}{\tau_k} &+ (B_1 + B_2 + B_3) n_{ijl}^{k+1} + f_{ijl} = G - R - \\ &- \tau_k (B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3) n_{ijl}^{k+1} - \tau_k (B_1 + B_2 + B_3) f_{ijl} - \\ &- \tau_k^2 \left[B_1 B_2 B_3 n_{ijl}^{k+1} + (B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3) f_{ijl} \right] - \tau_k^3 B_1 B_2 B_3 f_{ijl}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь

$$B_1 = \left(v_{xijl}^{k+1} - \Lambda_1 D_{nijl}^k \right) \Lambda_1 - D_{nijl}^k \Lambda_{11} + \Lambda_1 \varphi_{ijl}^{k+1} \Lambda_1 \mu_{ijl}^k;$$

$$B_2 = \left(v_{yijl}^{k+1} - \Lambda_2 D_{nijl}^k \right) \Lambda_2 - D_{nijl}^k \Lambda_{22} + \Lambda_2 \varphi_{ijl}^{k+1} \Lambda_2 \mu_{ijl}^k;$$

$$B_3 = \left(v_{zijl}^{k+1} - \Lambda_3 D_{nijl}^k \right) \Lambda_3 - D_{nijl}^k \Lambda_{33} + \Lambda_3 \varphi_{ijl}^{k+1} \Lambda_3 \mu_{ijl}^k;$$

$$f_{ijl} = n_{ijl}^k \mu_{nijl}^k (\Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \Lambda_{33}) \varphi_{ijl}^{k+1}.$$

Методические расчеты МДП- и ПЗС-структур показали, что схема расщепления допускает устойчивый счет при $\tau \gg h$, но при этом величина временнóго шага τ не должна превышать некоторого значения $\tau_{\max}$, поскольку при $\tau > \tau_{\max}$ возможно неконтролируемое нарастание ошибки в процессе счета.

Для расчета быстропротекающих процессов с большими градиентами полей и концентраций удобно использовать переменный шаг τ_k, выбирая его из условия не слишком резкого изменения функций. Если считать, например, допустимым максимальное изменение функций за один временной шаг на $\alpha\%$ ($\alpha = 1-2\%$), максимальное увеличение временного шага τ при переходе к следующему моменту времени — в β раз ($\beta = 1{,}5$), то новое значение τ_{k+1} можно вычислить через старое значение τ_k следующим образом:

$$\tau_{k+1} = \min_{i,j,l}\left[10^{-2}\alpha\frac{n_{ijl}^{k+1}\tau_k}{|n_{ijl}^{k+1} - n_{ijl}^k|},\quad 10^{-2}\alpha\frac{p_{ijl}^{k+1}\tau_k}{|p_{ijl}^{k+1} - p_{ijl}^k|},\right.$$
$$\left.10^{-2}\alpha\frac{\varphi_{ijl}^{k+1}\tau_k}{|\varphi_{ijl}^{k+1} - \varphi_{ijl}^k|},\ \beta\tau_k,\ \tau_{\max}\right].$$

Предложенная схема расщепления позволяет рассчитывать стационарные и нестационарные процессы в полупроводниковой плазме и является весьма эффективной и экономичной. Так, расчет двумерной ПЗС-структуры показал, что наша схема увеличивает скорость счета более чем в 10^4 раз по сравнению со схемой продольно-поперечной прогонки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Березин Ю. А., Яненко Н. Н.** Метод расщепления для задач физики полупроводников.— ДАН СССР, 1984, т. 274, № 6.
2. **Зи С. М.** Физика полупроводниковых приборов.— М.: Энергия, 1973.
3. **Самарский А. А., Николаев Е. С.** Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 20 ноября 1985 г.

УДК 621.372.54

Х. И. КЛЯУС, Г. А. ПЕШКОВ, Е. И. ЧЕРЕПОВ

(Новосибирск)

РАСЧЕТ ПЗС-ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ

Приборы с зарядовой связью (ПЗС) находят широкое применение в устройствах дискретно-аналоговой обработки информации, в частности фильтрации [1, 2]. Наиболее удобными для реализации на ПЗС считаются трансверсальные фильтры с разрезными электродами [3]. Весовые коэффициенты (ВК), определяющие частотные характеристики фильтров, задаются положением разрезов считывающих электродов. Строгая линейность фазочастотной характеристики (ФЧХ) может быть достигнута выбором соответствующей симметрии весовых коэффициентов [4]. ВК чаще всего рассчитываются по методу расчета оптимальных линейно-фазовых трансверсальных фильтров с оптимизацией по Ремезу [4, 5], при этом, однако, невозможно учесть дискретизацию ВК на фотошаблоне в ходе оптимизации. Дискретизация ВК приводит к отличию реальных АЧХ от идеальных, в основном к уменьшению подавления в полосе заграждения [2]. Методы дискретной оптимизации, как следует, например, из результатов работ [6, 7], более перспективны для расчета трансверсальных фильтров с точки зрения величины подавления в полосе заграждения. Цель данной работы — разработка пакета прикладных программ (ППП) для расчета линейно-фазовых ПЗС-трансверсальных фильтров с разрезными электродами и дискретной оптимизацией.

В основу пакета положен метод расчета оптимальных (в минимаксном смысле) цифровых фильтров [4, 5]. Минимизируется максимальная