АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

№ 4 1986

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 528.85 : 519.2 : 681.5

В. С. КИРИЧУК, Г. И. ПЕРЕТЯГИН, А. И. ПУСТОВСКИХ,
Н. С. ЯКОВЕНКО

(Новосибирск)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ДВУМЕРНЫХ ПОЛЕЙ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Введение. В данной статье предлагается и исследуется методика установления связи между изображениями местности, зарегистрированными в различных спектральных диапазонах. С этой целью в первом разделе будут представлены математические понятия, связанные с «морфологическим» анализом множества двумерных полей и их взаимных преобразований. В основе морфологического анализа лежит понятие пространственной структуры — совокупности однородных областей двумерного поля (например, аэрокосмического снимка), составляющих изображение и характеризующих так называемую «форму» исследуемого природного объекта [1]. Развитие соответствующих математических средств позволяет выявить взаимосвязь между распределениями измеряемых параметров полей и, в частности, найти наилучшую «аппроксимацию» некоторого заданного изображения в базисе остальных изображений местности. Установленная таким образом взаимосвязь может быть применена к анализу дистанционных данных, относящихся к другому региону, с целью «восстановления» структуры соответствующего ему природного объекта.

Во втором разделе описываются алгоритмические средства, реализующие предлагаемую методику восстановления, и приводятся результаты вычислительного эксперимента.

Структурный анализ двумерных полей. Будем считать, что имеются измеренные на дискретной решетке характеристики двумерных полей различного содержания — $\{u_0(x, y), u_1(x, y), \ldots, u_k(x, y); (x, y) \in \Omega\}$, предварительно скорректированные и совмещенные друг с другом путем приведения к единой системе координат. Ставится задача: найти взаимосвязь между функцией $U_0(\Omega) = \{u_0(x, y); (x, y) \in \Omega\}$ и функциями $U_1(\Omega), U_2(\Omega), \ldots, U_k(\Omega)$. В общем случае пространственно-инвариантного преобразования можно привлечь методы морфологического анализа [2] и предложить следующее решение задачи.

Предположим, что каждое из «изображений» $U_1(\Omega), U_2(\Omega), \ldots, U_k(\Omega)$ с известной точностью может быть представлено в виде

$$u_j(x, y) = \sum_{i=1}^{m_j} a_{ji} \mathrm{X}_{A_{ji}}(x, y), \quad \mathrm{X}_{A_{ji}}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in A_{ji}; \\ 0, & (x, y) \notin A_{ji}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jm_j}$ — непересекающиеся подмножества области Ω, $A_{ji} \cap A_{jk} = \varnothing$, $i \neq k$, $\bigcup_{i=1}^{m_j} A_{ji} = \Omega$. Пространственная структура двумерной функции $U_j(\Omega)$ определяется областями $\{A_{ji}, i = \overline{1, m_j}\}$, соответствующими «однородным» участкам двумерного поля, значения «яркости» которых $\{a_{ji}\}$ при различных i не равны между собой.

Будем считать, что поля $U_1(\Omega)$ и $U_2(\Omega)$ совпадают по форме [2] (изоморфны между собой), если $U_1(\Omega)=F(U_2(\Omega))$ для некоторой функции F. Так, если F выбираются из класса линейных функций — $F(U)=\alpha U+\beta$, то совпадающими по форме будут лишь пространственные поля (или изображения), заданные с точностью до параметров «средней яркости» β и «контраста» α.

Переходя собственно к проблеме аппроксимации поля $U_0(\Omega)$ двумерными функциями, изоморфными $U_1(\Omega)$, рассмотрим оператор P_u такой, что оценка $\{u_0(x, y);\ (x, y)\in\Omega\}$ имеет вид

$$\widehat{u}_0(x, y) = P_{u_1}u_0(x, y) = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\mathrm{X}_{A_{1i}}(x, y)}{n_{A_{1i}}} \sum_{(x,y)\in A_{1i}} u_0(x, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m_1} \bar{u}_0(A_{1i})\,\mathrm{X}_{A_{1i}}(x, y). \tag{2}$$

Здесь $n_{A_{1i}}$ — число точек подмножества A_{1j}, $\bigcup\limits_{i=1}^{m_1} A_{1i}=\Omega$ и $\mathrm{X}_{A_{1i}}$ — характеристические функции подмножеств A_{1i}, соответствующих однородным областям на поле $U_1(\Omega)$. Если поле $U(\Omega)$ изоморфно полю $U_1(\Omega)$, то оно представимо в виде $\sum\limits_{i=1}^{m_1} b_{1i}\mathrm{X}_{A_{1i}}(x, y)$, где индикаторы $\{\mathrm{X}_{A_{1i}}(x, y)\}$ образуют так называемый ортогональный базис изображений $U(\Omega)$, изоморфных с $U_1(\Omega)$. Норма разности $\sigma^2_{\Delta u}=\|U-\widetilde{U}\|^2_\Omega=\Big[\sum\limits_{(x,y)\in\Omega}(u(x, y)-\widetilde{u}(x, y))^2\Big]$ принимает минимальное значение, если $\widetilde{U}(\Omega)=\widehat{U}(\Omega)=P_{u_1}U(\Omega)$, то есть $b_{1i}=\bar{u}_{A_{1i}}$. Отсюда формула (2) приобретает простую интерпретацию: чтобы определить соответствие наблюдаемых величин $u_0(x, y)$ и $u_1(x, y)$, необходимо по полю $U_1(\Omega)$ выделить индикатор l-го «уровня» переменной $u_1(x, y)$ и подсчитать среднее значение функции в точках, для которых индикатор $\mathrm{X}_{A_{1l}}(x, y)\neq 0$. Качество выполненной аппроксимации (амплитудного преобразования) характеризуется нормой разности $\sigma^2_{\Delta u}=\|U-\widehat{U}\|^2_\Omega$.

Если поле $U_0(\Omega)$ неизоморфно $U_1(\Omega)$ (т. е. имеется часть $U_0(\Omega)$, не представимая в базисе $\{\mathrm{X}_{A_{1i}}(x, y);\ (x, y)\in\Omega\}$), то для более точной аппроксимации необходимо привлечь $U_2(\Omega)$, $U_3(\Omega)$ и т. д. до тех пор, пока базис полей $U_1(\Omega), \ldots, U_k(\Omega)$ не станет достаточным для восстановления структуры природного объекта $U_0(\Omega)$. Исходя из этого, будем представлять $U_0(\Omega)$ в виде

$$\widehat{u}_0(x, y) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{m_j} \widehat{b}_{ji}\mathrm{X}_{A_{ji}}(x, y) \tag{3}$$

или, упорядочив нумерацию подмножеств $\{A_{ji}\}$ некоторым способом,

$$\widehat{u}_0(x, y) = \sum_{l=1}^{L} \widehat{b}_l\mathrm{X}_{A_l}(x, y), \tag{4}$$

где $L=\sum\limits_{j=1}^{k} m_j-k+1$ $\left(\text{здесь учтено, что } \bigcup\limits_{i=1}^{m_j} A_{ji}=\Omega,\ j=\overline{1, k}\right)$. Запишем последнее выражение в векторно-матричном виде, предполагая, что «полевые» переменные $u(x, y)$ в области наблюдения упорядочены в лексико-графическом порядке (столбец за столбцом) и $U=(u(1, 1), u(2, 1), \ldots, u(n, n))^{\mathrm{T}}$ — вектор с $N=n^2$ компонентами:

$$U_0 = GB+\Xi, \tag{5}$$

где G — матрица размером $N\times L$, составленная из 0 и 1 (значений индикаторных функций X_{A_l} в точках $(x, y) \in \Omega$); B — вектор оцениваемых коэффициентов, состоящий из L компонент, а Ξ — вектор остатков, соответствующий части поля $U_0(\Omega)$, неизоморфной $U_1(\Omega), \ldots, U_k(\Omega)$. Оценка вектора коэффициентов B по методу наименьших квадратов имеет обычный вид

$$\hat{B} = (G^{\mathrm{T}}G)^{-1}G^{\mathrm{T}}U_0. \tag{6}$$

Знание B позволяет восстановить изображение местности в заданном спектральном диапазоне по серии «косвенных» измерений $U_1'(\Omega)$, $U_2'(\Omega), \ldots, U_k'(\Omega)$:

$$\hat{U}' = G'B, \; G' = G\left(U_1', \ldots, U_k'\right). \tag{6'}$$

Нужно отметить, что в определенных ситуациях набор изображений $(U_1(\Omega), \ldots, U_k(\Omega))$ может оказаться избыточным, и необходимо выделить достаточное подмножество $(U_1(\Omega), \ldots, U_q(\Omega);\; q < k)$. При реализации этой процедуры будем исходить из того, что матрица G состоит из блоков (матриц), соответствующих аппроксимации изображения $U_0(\Omega)$ одним из изображений $U_1(\Omega), \ldots, U_k(\Omega)$: $G = (G_1 \vdots G_2 \vdots \ldots \vdots G_k)$. Тогда и вектор B разбивается на k частей: $B = \left(B_1^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}} \ldots B_k^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$. Предположение, что изображение U_k не вносит «вклад» в аппроксимацию U_0, соответствует проверке гипотезы $H_k : B_k = 0$. Если для любого $j\; B_j \neq 0,\; j = \overline{1, k}$, то, очевидно, выборочное пространство W_N можно представить в виде прямой суммы «пространства оценок» W_L и «пространства ошибок» W_{N-L}[3] : $W_N = W_L \oplus W_{N-L}$, а операторами проектирования на W_L и W_{N-L} являются соответственно $G(G^{\mathrm{T}}G)^{-1}G^{\mathrm{T}}$ и $(I - G(G^{\mathrm{T}}G)^{-1}G^{\mathrm{T}})$. Для проверки гипотез $H_k : B_k = 0$; H_k и $H_{k-1} : B_k = 0,\; B_{k-1} = 0$; $\ldots$ введем k подпространств $W_k, \ldots, W_1$, попарно ортогональных и порождающих все W_L: $W_L = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$. Пусть $C_0 = W_L$ и $C_r = \left(\bigoplus_{i=k-r+1}^{k} W_i\right)^{\perp}$, так что $C_k = \varnothing$. Подпространства C_i образуют убывающую последовательность подпространств таких, что $W_L = C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_k$ и $W_L = \bigoplus_{i=0}^{k-1} (C_i \ominus C_{i+1})$. Обозначая через P_i проектор на подпространство C_i, получаем «убывающую» последовательность проекционных операторов

$$G(G^{\mathrm{T}}G)^{-1}G^{\mathrm{T}} = P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_k = 0.$$

Поскольку оператор ортогонального проектирования на подпространство $(C_i \ominus C_{i+1})$ равен разности $(P_i - P_{i+1})$, то разложение W_L можно описать в терминах проекционных операторов:

$$G\left(G^{\mathrm{T}}G\right)^{-1}C^{\mathrm{T}} = \sum_{i=0}^{k-1} (P_i - P_{i+1}). \tag{7}$$

Это дает разложение вектора U_0 на сумму k взаимно ортогональных векторов:

$$U_0 = G\left(G^{\mathrm{T}}G\right)^{-1}G^{\mathrm{T}}U_0 + \left(I - G\left(G^{\mathrm{T}}G\right)^{-1}G^{\mathrm{T}}\right)U_0 =$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} (P_i - P_{i+1})U_0 + \left(I - G\left(G^{\mathrm{T}}G\right)^{-1}G^{\mathrm{T}}\right)U_0. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что проекционные операторы

$$P_i = GE_i(E_iG^{\mathrm{T}}GE_i)^{-1}E_iG^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

где матрицы $E_1, E_2, \ldots$ получаются из единичной матрицы «занулением» диагональных элементов, соответствующих номерам элементов векторов $B_k, B_{k-1}, \ldots$ в общем векторе B. В результате приходим к разложению квадратичной формы, на котором основывается проверка гипотез (теорема Кокрана [3]):

$$U_0^{\text{т}}U_0 = U_0^{\text{т}}GE_{k-1}(E_{k-1}G^{\text{т}}GE_{k-1})^{-1}E_{k-1}G^{\text{т}}U_0 + \\ + U_0^{\text{т}}[GE_{k-2}(E_{k-2}G^{\text{т}}GE_{k-2})^{-1}E_{k-2}G^{\text{т}} - \\ - GE_{k-1}(E_{k-1}G^{\text{т}}GE_{k-1})^{-1}E_{k-1}G^{\text{т}}]U_0 + \ldots \\ \ldots + U_0^{\text{т}}[G(G^{\text{т}}G)^{-1}G^{\text{т}} - GE_1(E_1G^{\text{т}}GE_1)^{-1}E_1G^{\text{т}}]U_0 + U_0^{\text{т}}(I - G(G^{\text{т}}G)^{-1}G^{\text{т}})U_0. \quad (10)$$

Каждая из составляющих квадратичной формы характеризует «вклад» соответствующего изображения в аппроксимацию $U_0(\Omega)$. Норма остатка данного приближения $\sigma_{\Delta u}^2 = U_0^{\text{т}}(I - G(G^{\text{т}}G)^{-1}G^{\text{т}})U_0/(N-L)$ распределена по центральному закону χ^2. Если изображение U_k «неинформативно», т. е. ничего нового не добавляет к оценке U_0 образами полей $U_1, \ldots, U_{k-1}$, то установление данного факта сводится к проверке равенства нулю параметра нецентральности:

$$\delta_k^2 = U_0^{\text{т}}(G(G^{\text{т}}G)^{-1}G^{\text{т}} - GE_1(E_1G^{\text{т}}GE_1)^{-1}E_1G^{\text{т}})U_0/(N-L).$$

Эта проверка основывается на отношении $Z_k = \hat{\delta}_k^2/\hat{\sigma}_{\Delta u}^2$, имеющем центральное F-распределение при нулевой гипотезе H_k: $B_k = 0$.

Алгоритмические средства сравнительного анализа и результаты вычислительного эксперимента. В соответствии с изложенной методикой восстановления необходимо в исходных полях $V_j(\Omega)$ выделить индикаторные функции информативных подмножеств $(A_{ji},\ i = \overline{1,\ m_j})$, составляющих область Ω рассматриваемой серии снимков. Для осуществления этой операции использовалась процедура эквализации гистограмм распределений наблюдаемых переменных $v_j(x, y)$ с их последующим квантованием. Входное изображение $V_j(\Omega)$, преобразованное данной процедурой, представляется в виде

$$U_j(x, y) = \sum_{i=1}^{m_j} \bar{u}_{A_{ji}} \mathrm{X}_{A_{ji}}(x, y), \quad (11)$$

что является наилучшей аппроксимацией $v_j(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ при заданном числе m_j уровней квантования. Число уровней квантования для каждого из полей $V_j(\Omega)$ подбирается путем «проб» таким образом, чтобы нормы разностей между базисными изображениями и их аппроксимациями $\sigma_{\Delta u_j}^2 = \|V_j - U_j\|_\Omega^2$ были примерно одинаковыми. Рассмотренный алгоритм реализован на комплексе обработки изображений на базе ЭВМ ЕС-1010 [4]. Вычислительная мощность базовой ЭВМ ограничивает размерность матрицы $G^{\text{т}}G$ до 80×80.

Для апробации разработанных программных средств проводился сравнительный структурный анализ цветного снимка, оцифрованного на устройстве ввода «Colormation» с использованием серого -W- и R-, G-, B-фильтров. Размер изображений 256×256 элементов с 256 уровнями квантования. Изображения, полученные с R-, G-, B-фильтрами, выбирались в качестве базисных, по которым проводилось восстановление поля плотностей, соответствующего серому фильтру (рис. 1). Проведенный анализ показал, что наибольшим сходством с восстанавливаемым W-полем обладает R-изображение. Его изоморфный образ, в определенном смысле «наиболее похожий» на оригинал (W-поле), имеет коэффициент корреляции с ним, равный 0,969. Норма разности данного приближения $\sigma_{\Delta U_1}^2 = 65$, что составляет 6% от общих вариаций W-поля $(\sigma_{U_W}^2 = 1056{,}2)$. На рис. 2 представлено изображение «поля расхождений» между оригиналом и его оценкой. Дальнейшее приближение к структуре W-поля последовательным включением G- и B-изображений позволило выяснить, что для восстановления достаточно R-, G-полей. Их совместная оценка образа имеет коэффициент корреляции с оригиналом $\rho_{RG} = 0{,}991$, а $\sigma_{\Delta U_2}^2 = 19$ (1,9% вариаций W-поля). В то же время добав-

Рис. 1

ление к ним B-изображения лишь ухудшает оценку из-за того, что сильная корреляция тройки базисных полей приводит к плохой обусловленности матрицы $G^{\mathrm{T}}G$ $(\rho_{RGB} = 0{,}988; \sigma^2_{\Delta U_3} = 27)$. Дисперсионный анализ показал, что включение B-изображения в оценку W-поля нецелесообразно. Действительно, составляющая квадратичной формы (10), со-

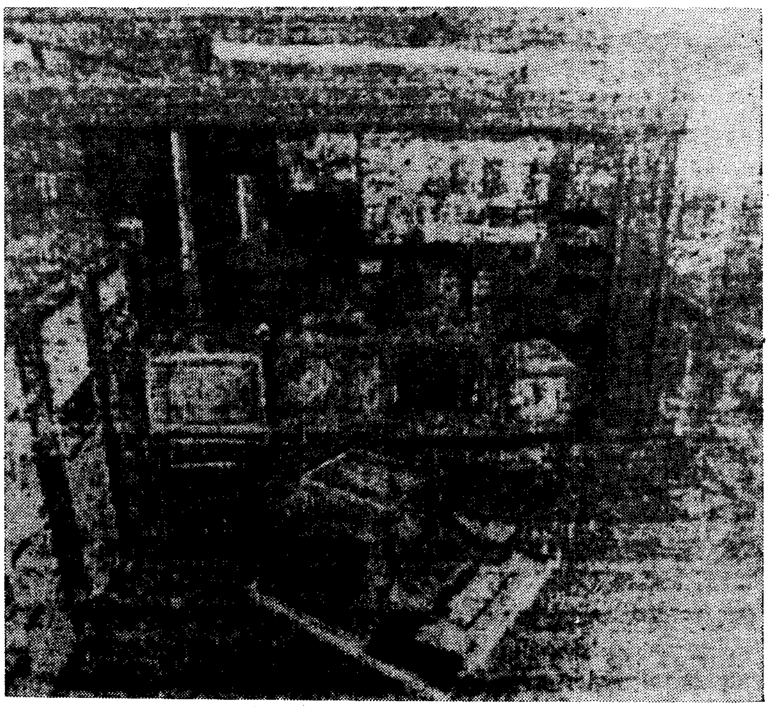

Рис. 2

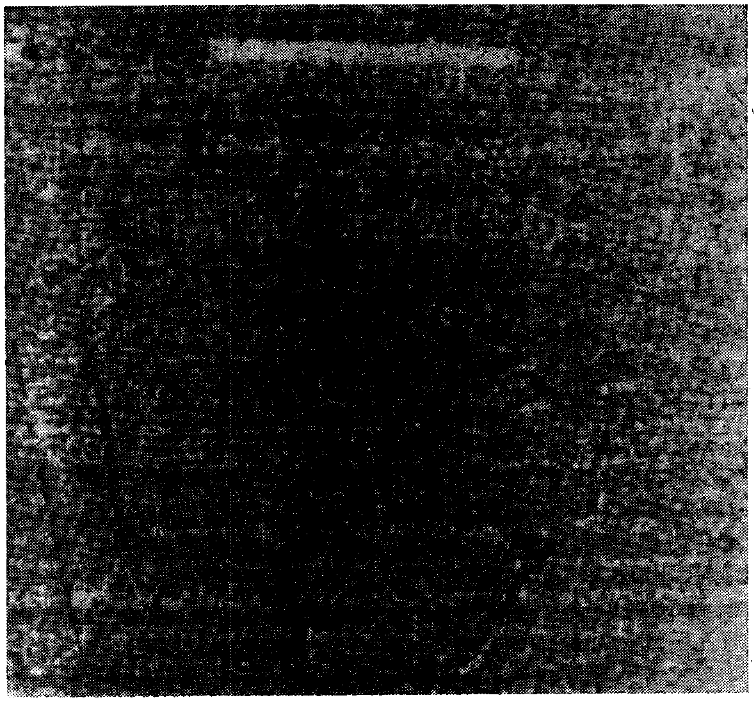

Рис. 3

ответствующая «вкладу» G-изображения в оценку W-поля, равна $\sigma_G^2 = \|\widehat{U}_{RG} - \widehat{U}_R\|^2 = 44$, в то время как вклад B-изображения оценивается величиной $\sigma_B^2 = \|\widehat{U}_{RGB} - \widehat{U}_{RG}\|^2 = 25$, что при норме остатка данного приближения $\sigma_{\Delta U_3}^2 = \|U_W - \widehat{U}_{RGB}\|^2 = 27$ свидетельствует о незначимости $\sigma_B^2 (\sigma_B^2/\sigma_{\Delta U_3}^2 < 1)$. На рис. 3 дано поле разностей между W-полем и его R-, G-оценкой. Можно заметить, что белая полоса не вкладывается в восстанавливаемый образ W-изображения по R-, G-, B-копиям сцены.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Пытьев Ю. П.** Морфологические понятия в задачах анализа изображений.— Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 6.
2. **Пытьев Ю. П.** Задачи морфологического анализа изображений.— В кн.: Математические методы исследования природных ресурсов Земли из космоса. М.: Наука, 1984.
3. **Шеффе Г.** Дисперсионный анализ.— М.: Наука, 1980.
4. **Киричук В. С., Косых В. П., Нестерихин Ю. Е., Яковенко Н. С.** Методы и средства оперативной цифровой обработки изображений.— Автометрия, 1984, № 4.

Поступила в редакцию 13 февраля 1986 г.

УДК 519.713 : 007.5 : 681.5

В. С. КИРИЧУК, Г. И. ПЕРЕТЯГИН

(Новосибирск)

ОБ УСТАНОВЛЕНИИ СХОДСТВА ФРАГМЕНТОВ С ЭТАЛОНОМ

Введение. В практике обработки изображений хорошо известна задача «поиска по образцу». Формально ее можно рассматривать как процесс отождествления эталонного изображения (образа) с одним из множества предъявленных (независимых) фрагментов. В данной статье поставленная проблема характеризуется с точки зрения симметричных байесовских решающих правил и находится оптимальный в известном