УДК 519.28.669

И. Г. КОВТУНОВА
(Воронеж)

К ВОПРОСУ О ПОРЯДКЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ФАКТОРОВ В МАТРИЦЕ ПЛАНИРОВАНИЯ ДРОБНОГО ДВУХУРОВНЕВОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Цель многих экспериментов в научных и прикладных исследованиях состоит в нахождении зависимости между некоторой выходной переменной — откликом (y) — и независимыми переменными, которые варьируются в процессе эксперимента,— факторами ($x_1, \ldots, x_k$). Распространенным методом нахождения зависимостей является регрессионный анализ экспериментальных данных. Суть его заключается в определении неизвестных параметров $b_0, \ldots, b_n$ уравнения

$$y = f(x_1, \ldots, x_k, b_0, \ldots, b_n), \tag{1}$$

описывающего зависимость, при заданном виде функции f.

Часто вид функции, аппроксимирующей зависимость, нельзя предсказать точно, особенно если исследуются сложные системы управления или технологические процессы. В этом случае поверхность отклика описывается полиномиальной моделью, для определения коэффициентов которой используется последовательное планирование эксперимента [1, 2]. Последовательное планирование представляет собой многошаговую процедуру усложнения уравнения регрессии, которое в общем случае имеет вид

$$= b_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i b_i + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} b_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} \sum_{l=j+1}^{k} b_{i,j,l} x_i x_j x_l + \\ + b_{1,\ldots,k} x_1 x_2 \ldots x_k + \sum_{i=1}^{k} b_{i,i} x_i^2 + \ldots \tag{2}$$

и проверки гипотезы о числе его членов и степени, что дает возможность получать адекватное для заданной точности уравнение регрессии с минимальным числом членов. Обычно на первом шаге планирования зависимость y от $x_1, \ldots, x_k$ аппроксимируется неполной квадратичной моделью, содержащей линейные члены $\{b_i x_i\}$ и некоторые наиболее важные взаимодействия факторов $\{b_{i,j} x_i x_j\}$. Коэффициенты $\{b_i\}$ и $\{b_{i,j}\}$ рассчитываются по результатам дробных двухуровневых экспериментов (2^{k-p}). Степень дробности плана p определяется числом взаимодействий, включенных в регрессионную модель, и выбирается исходя из условия

$$2^{k-p} > n, \tag{3}$$

где n — число коэффициентов регрессии. Причем берется максимальное значение p, удовлетворяющее условию (3). Способы построения дробных реплик хорошо известны [3]: уровни $k - p$-факторов представляют собой полный факторный эксперимент $2^{k'}$ ($k' = k - p$), остальные p-факторов приравниваются к незначимым взаимодействиям первых $k - p$-факторов, в соответствии с чем задаются их уровни и определяется система смешивания оценок коэффициентов регрессии.

При произвольном расположении факторов в матрице планирования эксперимента 2^{k-p}, даже в том случае, когда p-факторов приравниваются к незначимым взаимодействиям, оценки коэффициентов при взаимодействиях факторов, включенных в регрессионную модель, могут оказаться смешанными между собой или с оценками коэффициентов при линейных членах. Например, для определения коэффициентов уравнения

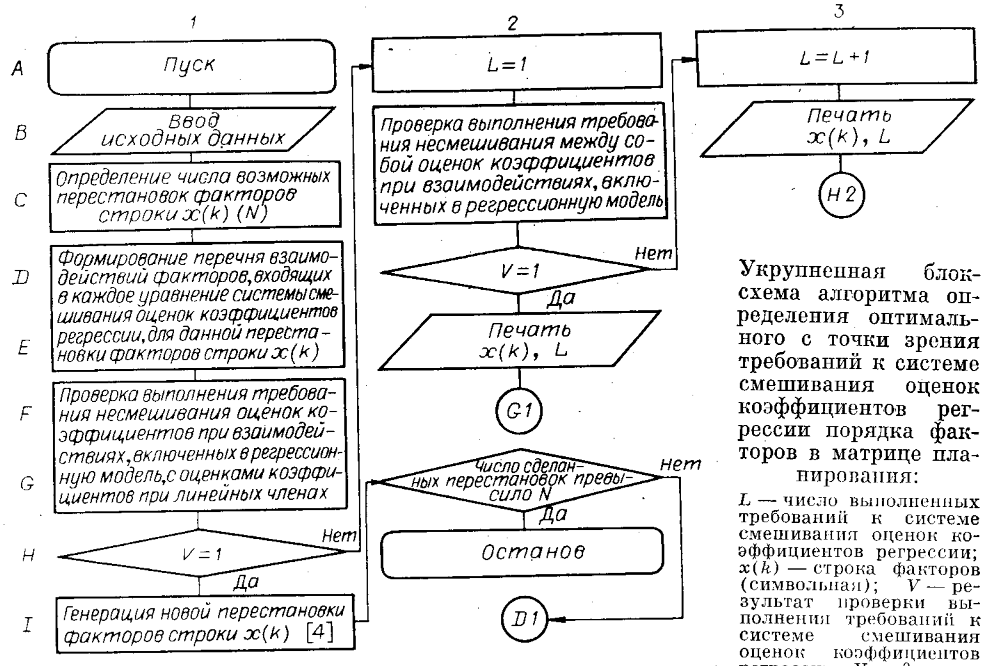
$$y = b_0 + b_A A + b_B B + b_C C + b_D D + b_E E + b_{A,D} AD + b_{B,D} BD \tag{4}$$

можно использовать результаты эксперимента 2^{5-2} с обобщающим определяющим контрастом

$$x_1x_2x_4 = x_1x_2x_3x_5 = x_3x_4x_5, \tag{5}$$

которому соответствует следующая система смешивания оценок коэффициентов при линейных членах и парных взаимодействиях:

$$\begin{aligned} b_1 &= \beta_1 + \beta_{2,4}; & b_5 &= \beta_5 + \beta_{3,4}; \\ b_2 &= \beta_2 + \beta_{1,4}; & b_{1,3} &= \beta_{1,3} + \beta_{2,5}; \\ b_3 &= \beta_3 + \beta_{4,5}; & b_{1,5} &= \beta_{1,5} + \beta_{2,3}; \\ b_4 &= \beta_4 + \beta_{3,4}; & & \end{aligned} \tag{6}$$



Укрупненная блок-схема алгоритма определения оптимального с точки зрения требований к системе смешивания оценок коэффициентов регрессии порядка факторов в матрице планирования:

L — число выполненных требований к системе смешивания оценок коэффициентов регрессии; $x(k)$ — строка факторов (символьная); V — результат проверки выполнения требований к системе смешивания оценок коэффициентов регрессии, $V=0$ — требование выполняется, $V=1$ — требование не выполняется.

где b_i, $b_{i,j}$ — вычисленные по результатам эксперимента значения коэффициентов регрессии; β_i, $\beta_{i,j}$ — неизвестные истинные значения коэффициентов.

При $x_1 \equiv A$, $x_2 \equiv B$, $x_3 \equiv C$, $x_4 \equiv D$, $x_5 \equiv E$, как видно из (6), оценки коэффициентов b_{AD} и b_B, $b_{B,D}$ и b_A получаются смешанными между собой. В таких случаях, как правило [3], рекомендуется уменьшать степень дробности плана, т. е. увеличивать число опытов в матрице планирования. Однако, когда проведение одного опыта занимает много времени или требует больших затрат средств, такой подход неприемлем.

Для получения несмешанных оценок коэффициентов регрессии, рассчитываемых по результатам эксперимента, предлагается изменять первоначальный порядок факторов в матрице планирования без проведения дополнительных опытов. В рассматриваемом примере (уравнение (4)) не смешанные между собой оценки коэффициентов получаются при обработке результатов эксперимента 2^{5-2} с обобщающим контрастом (5), если $x_1 \equiv A$, $x_2 \equiv B$, $x_3 \equiv D$, $x_4 \equiv E$, $x_5 \equiv C$ (см. (6)).

Укрупненная блок-схема алгоритма определения оптимального с точки зрения требований к системе смешивания оценок коэффициентов регрессии порядка факторов в матрице планирования дробных двухуровневых экспериментов представлена на рисунке. Процедура поиска оптимального порядка заключается в получении всех возможных перестановок факторов, включенных в эксперимент, и проверке выполнения требований к смешиванию между собой оценок коэффициентов регрессии, вычисляемых по результатам эксперимента. Проверка выполнения требований осуществляется последовательно в соответствии со степенью важности: вначале находится порядок факторов, для которого коэффициенты при линейных членах не смешаны с коэффициентами при взаимодействиях первого, второго и более высоких порядков, включенных в регрессионную модель. Затем для найденного порядка проверяется выполнение требования несмешивания между собой коэффициентов при взаимодействиях первого, второго и т. д. порядков. Как только получается перестановка факторов, удовлетворяющая всем требованиям, генерация новых перестановок прекращается. Алгоритм поиска оптимального порядка расположения факторов в матрице планирования реализован на языке ПЛ-1. Время определения оптимального порядка на ЭВМ ЕС-1022 при числе факторов, включенных в эксперимент, равном 7, и числе членов в уравнении регрессии, равном 14, составляет 2 мин.

Предложенный подход к построению дробных факторных планов первого порядка целесообразно применять при $p \geqslant 2$, когда первоначальное (произвольное) расположение факторов в матрице планирования не дает возможности оценить все необходимые эффекты отдельно. Не требуя больших затрат, оптимальное расположение факторов позволяет минимум в 2 раза сократить число опытов в эксперименте по определению коэффициентов выбранной регрессионной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Клейнер Дж.** Статистические методы в имитационном моделировании. Вып. 2.— М.: Статистика, 1978.
2. **Налимов В. В., Чернова Н. А.** Статистические методы планирования экстремальных экспериментов.— М.: Наука, 1965.
3. **Адлер Ю. Г. и др.** Планирование экспериментов при поиске оптимальных условий.— М.: Наука, 1976.
4. **Библиотека** алгоритмов 101б — 151б.— М.: Сов. радио, 1978.

Поступило в редакцию 9 ноября 1983 г.

УДК 621.382 : 523

А. О. БАКРУНОВ, О. С. СЛАДКОВ, И. В. ЩУКИН

(Москва)

ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРА СПИРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ПРОСТРАНСТВЕННО-СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Введение. Спиральная структура — довольно частое явление для астрономических (а также гидро- и газодинамических) объектов, она наблюдается примерно у 70% галактик [1]. Для вывода и обоснования теоретических моделей образования спиральной структуры необходимо сравнение наблюдаемой формы спиралей с теоретическими. Однако такое сравнение связано с определенными трудностями. Хотя может показаться очевидным, что данная галактика имеет спиральные «рукава» и части этих «рукавов» отчетливо видны, очертить спиральную структуру в целом, как отмечается в [1], иногда бывает исключительно трудно. Примером может служить туманность Андромеды М31 (рис. 1). Спиральная структура в астрономических приложениях определяется, как правило, логарифмической спиралью с двумя «рукавами» (рис. 2). Важным параметром модели, тесно связанным с предполагаемым механизмом возникновения спиральной структуры, является угол φ, определяющий коэффициент роста спирали. Рассмотрим возможность нахождения этого параметра пространственно-спектральным методом [2, 3] путем использования углового спектра (УС) изображения спиральной структуры.

УС спиральной структуры. УС определим соотношением [3]

$$I_\beta = I_\beta(\beta) = I_\beta(\beta;\rho_1,\rho_2) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} I(\rho,\beta)\,\rho d\rho,\quad I(\rho,\beta) = |\dot F(\rho,\beta)|^2, \tag{1}$$

где $I(\rho,\beta)$ — интенсивность пространственного спектра; $\dot F(\rho,\beta)$ — пространственный спектр изображения; ρ, β — полярные координаты в плоскости пространственного спектра; значение ρ_1 выбрано так, что выполняются условия нахождения УС методом стационарной фазы [3].

Найдем УС для спиральной структуры, заданной одним «рукавом» логарифмической спирали

$$r(\alpha) = r_0 e^{a\alpha},\quad \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_m, \tag{2}$$

с параметрами $\alpha_0 = 0°$, $\alpha_m = 360°$, $r_0 = r(\alpha = 0)$, $a = \operatorname{tg}\psi$, $\psi = \pi/2 - \varphi$; r, α — полярные координаты в плоскости изображения. В данном случае УС определяется

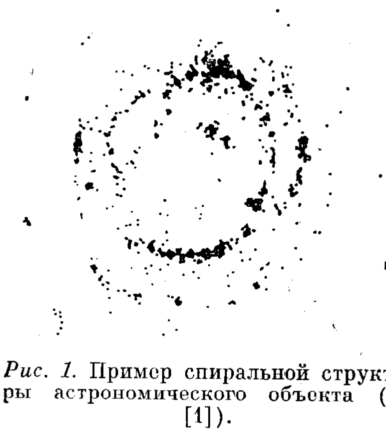


Рис. 1. Пример спиральной структуры астрономического объекта (по [1]).

Рис. 2. Модель спиральной структуры.
Показаны точки стационарной фазы.