

В. Н. МОИСЕЕВ, И. Н. ТРОИЦКИЙ, Н. Д. УСТИНОВ  
(Москва)

## ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

### Ч. I. АНАЛИЗ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АДДИТИВНОГО ФОНА В ВОССТАНОВЛЕННОМ ИЗОБРАЖЕНИИ. ФУНКЦИОНАЛ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Постановка задачи.** Одним из важных вопросов, которые приходится решать при организации томографического процесса, является оценка точности, с которой восстанавливается томографическое изображение. В общем случае эта точность зависит от характеристик шума, сопровождающего регистрацию отдельных проекций изображения. Помимо этого точность зависит и от того конкретного алгоритма, с помощью которого реализуется процедура восстановления.

Для того чтобы оценить, как сказываются особенности используемого алгоритма на точность восстановления, необходимо ориентироваться на какую-то объективную характеристику. Одна из таких возможных характеристик — точность, потенциально достижимая при оценке неизвестных параметров функции, описывающей восстанавливаемое томографическое изображение. В общем случае потенциальная точность характеризуется системой неравенств [1], которым удовлетворяет дисперсия оцениваемых параметров. В частном случае регулярных оценок эти неравенства сводятся к неравенствам Крамера — Рао.

Цель настоящей работы — получение аналитических выражений и анализ потенциальных точностей томографического процесса. Методически такой анализ сопровождается детальным исследованием флуктуационных характеристик фона в восстановленном изображении и нахождением функционала плотности вероятностей, описывающего это изображение. Данные исследования составляют первую часть работы. Во второй части выводятся общие выражения для элементов информационной матрицы Фишера и приводятся примеры, иллюстрирующие применение полученных выражений для анализа потенциальной точности измерения неизвестных параметров.

**Обозначения и исходные соотношения.** Пусть некоторый объект в сечении плоскостью, в которой введена прямоугольная декартова система координат  $\{x, y\}$ , описывается функцией  $f(x, y)$ . Проекция этой функции на ось  $s$ , составляющей угол  $\varphi$  с осью  $x$ , равна [2]

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - p \sin \varphi, s \sin \varphi + p \cos \varphi) dp, \quad (1)$$

здесь ось  $p$  перпендикулярна оси  $s$ .

В качестве иллюстрации на рис. 1 изображены функция  $f(x, y) = \lambda_1 \exp\{-\lambda_2^2[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\}$ , ее сечение (штриховая кривая) плоскостью, перпендикулярной плоскости  $x, y$ , содержащей прямую, параллельную оси  $s$ , проходящей под углом  $\varphi$  к оси  $x$  через точку  $x_0, y_0$ , и проекция на ось  $s$  (сплошная кривая). На рис. 2 показана функция  $R(s, \varphi)$ , являющаяся результатом проецирования функции  $f(x, y)$  на ось  $s$  и проходящая под всевозможными углами

$$\varphi (0 \leq \varphi \leq \pi), R(s, \varphi) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\pi} \exp\{-\lambda_2^2 [s - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi]^2\}.$$

Задача томографии состоит в том, чтобы по совокупности проекций, соответствующих разным углам  $\varphi$ , или, другими словами, по функции  $R(s, \varphi)$  двух переменных  $s$  и  $\varphi$  восстановить исходное изображение, т. е.

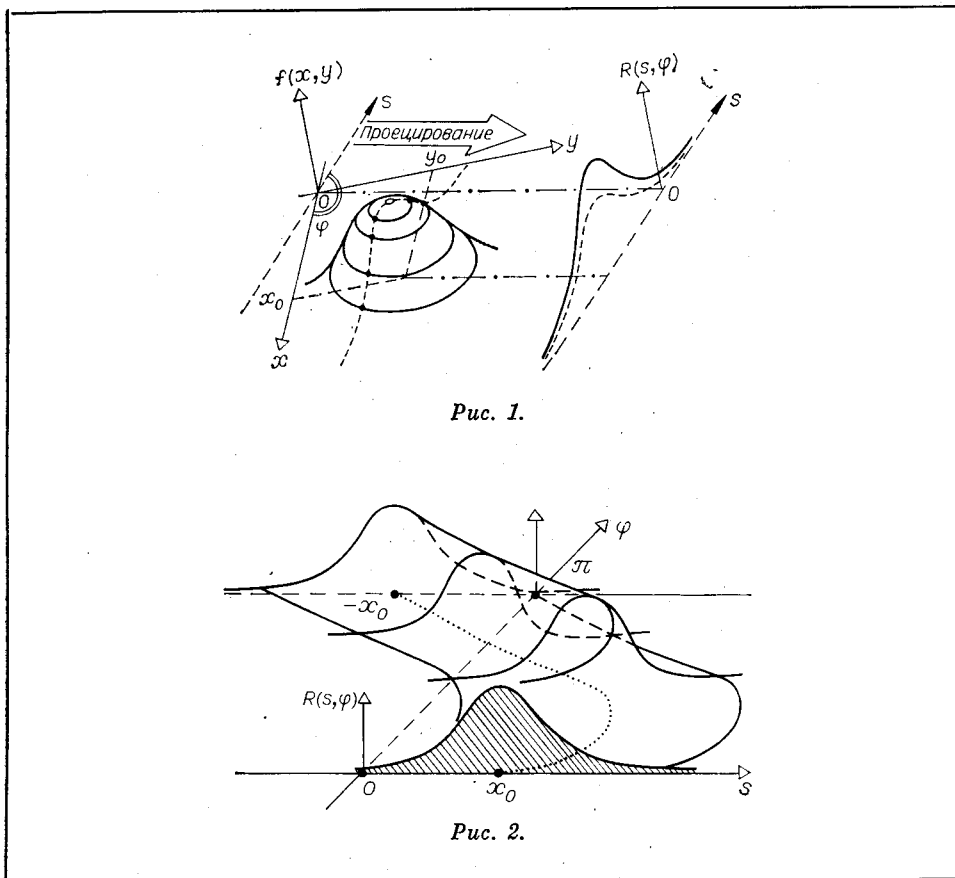


Рис. 1.

Рис. 2.

функцию  $f(x, y)$ , которая также является функцией двух переменных, но этими переменными уже будут не  $s$  и  $\varphi$ , а  $x$  и  $y$ . С математической точки зрения данная задача сводится к решению интегрального уравнения (1). В настоящее время разработаны различные методы поиска искомого решения [2]. Один из таких методов приводит к регуляризованному решению, т. е. решению, устойчивому по отношению к возможным искажениям, которое задается равенством

$$f_{\alpha}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} R(s, \varphi) q_{\alpha}(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) ds. \quad (2)$$

Здесь функция  $q_{\alpha}(\zeta)$  зависит от параметра регуляризации  $\alpha$ . Различные виды функции  $q_{\alpha}(\zeta)$  приведены в [3]. Независимо от конкретного вида  $q_{\alpha}(\zeta)$  функция  $f_{\alpha}(x, y)$ , определяемая по формуле (2), при  $\alpha \rightarrow 0$  стремится к  $f(x, y)$ .

В дальнейшем при конкретизации получаемых выражений будет привлекаться  $q_{\alpha}(\zeta)$  в виде

$$q_{\alpha}(\zeta) = \pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \zeta t} w_{\alpha}(t) |t| dt, \quad (3)$$

где  $w_{\alpha}(t) = w_{\alpha}(|t|)$  — некоторая функция, свойства которой рассмотрены, например, в [3].

Предположим, что регистрация проекции сопровождается добавлением к истинной проекции некоторого аддитивного нормального шума  $n(s, \varphi)$ . Тогда зарегистрированная проекция

$$R_p(s, \varphi) = R(s, \varphi) + n(s, \varphi). \quad (4)$$

Будем предполагать, что шум складывается из двух независимых между собой составляющих, имеющих нулевые средние значения и  $\delta$ -коррелированных по  $\varphi$ . Последнее обусловлено тем, что проекция для каждого угла  $\varphi$  регистрируется независимо от других. Относительно корреляционных свойств шумовых составляющих по координате  $s$  будем считать, что одна из них  $\delta$ -коррелирована со спектральной плотностью  $N_0$ , а другая обладает четной функцией корреляции  $k(s_1 - s_2) = k(|s_1 - s_2|)$ . Таким образом,

$$\overline{n(s, \varphi)} = 0; \quad (5)$$

$$\overline{n(s_1, \varphi_1)n(s_2, \varphi_2)} = k(s_1 - s_2)\delta(\varphi_1 - \varphi_2) + N_0\delta(s_1 - s_2)\delta(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (6)$$

Спектральную плотность первой шумовой составляющей по координате  $s$  будем обозначать функцией  $g(\omega)$ , так что

$$k(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega s} d\omega. \quad (7)$$

**Корреляционная функция шума в восстановленном томографическом изображении.** Для аддитивного шума, сопровождающего регистрацию проекции изображения, в силу линейности соотношения (2) шум в восстановленном изображении также является аддитивным, а его реализация определяется равенством

$$n_\alpha(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} n(s, \varphi) q_\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) ds. \quad (8)$$

Среднее значение шума в томографическом изображении находится путем усреднения (8). Учитывая (5), получаем

$$\overline{n_\alpha(x, y)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \overline{n(s, \varphi)} q_\alpha(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) ds = 0. \quad (9)$$

Функция корреляции шумовой составляющей томографического изображения определяется в результате перемножения значений функции  $n_\alpha(x, y)$  (8), взятых в двух различных точках плоскости  $\{x, y\}$ , и усреднением полученного произведения. Учитывая (6), находим

$$\begin{aligned} K(x_1, y_1; x_2, y_2) &= \overline{n_\alpha(x_1, y_1)n_\alpha(x_2, y_2)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \int_0^\pi d\varphi_2 \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 \times \\ &\times \overline{n(s_1, \varphi_1)n(s_2, \varphi_2)} q_\alpha(x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1 - s_1) q_\alpha(x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2 - s_2) = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 [k(s_1 - s_2) + N_0\delta(s_1 - s_2)] \times \\ &\times q_\alpha(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - s_1) q_\alpha(x_2 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi - s_2). \quad (10) \end{aligned}$$

Подставим (7) в (10), заменим функции  $q_\alpha(\cdot)$ , входящие в (10), через их интегральное представление (3) и учтем, что  $\delta(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} d\omega$ . После этого выражение (10) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} K(x_1, y_1; x_2, y_2) &= \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [g(\omega) + N_0/2\pi] \times \\ &\times |t_1| |t_2| w_\alpha(t_1) w_\alpha(t_2) \exp\{is_1(\omega - 2\pi t_1) + is_2(\omega + 2\pi t_2) + \\ &+ 2\pi i[(t_1 x_1 + t_2 x_2) \cos \varphi + (t_1 y_1 + t_2 y_2) \sin \varphi]\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Интегрирование по переменным  $s_1, s_2$  приводит к произведению двух

$\delta$ -функций  $(2\pi)^2 \delta(\omega - 2\pi t_1) \delta(\omega + 2\pi t_2)$ . Последующее интегрирование по переменным  $t_1$  и  $t_2$  позволяет представить (11) в виде

$$K(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\pi} d\varphi \omega^2 w_{\alpha}^2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) \times \\ \times [g(\omega) + N_0/2\pi] \exp \{ i\omega [(x_1 - x_2) \cos \varphi + (y_1 - y_2) \sin \varphi] \}. \quad (12)$$

При переходе от (11) к (12) было также учтено, что  $w_{\alpha}(t) = w_{\alpha}(|t|)$ . Легко убедиться, что равенство (12) не нарушится, если область интегрирования в (12) заменить на область  $\{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \omega \leq \infty\}$ . Введем вектор  $\rho = \{u, v\}$ , координаты которого  $u = x_1 - x_2, v = y_1 - y_2$ , и перейдем в (12) к полярным координатам в плоскости  $\{u, v\}$ , положив  $u = \rho \cos \theta, v = \rho \sin \theta$ . Сохраняя и в новых координатах прежнее обозначение корреляционной функции, имеем

$$K(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\omega \left( \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 w_{\alpha}^2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) [g(\omega) + N_0/2\pi] \exp \{ i\omega \rho \cos(\varphi - \theta) \}. \quad (13)$$

Привлекая известное тождество

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \{ ia \cos(\varphi - \theta) \} d\varphi, \quad (14)$$

где  $J_0(a)$  — функция Бесселя, убеждаемся, что выражение (13) есть не что иное, как преобразование Фурье, записанное в полярных координатах от некоторой функции  $G(\omega)$ , равной

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{2\pi} w_{\alpha}^2 \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) [g(\omega) + N_0/2\pi]. \quad (15)$$

По определению [4] эта функция является пространственной спектральной плотностью шумовой составляющей, которая присутствует в восстановленном изображении. Тот факт, что функция  $G(\omega)$  зависит только от модуля  $\omega$  (и не зависит от угла  $\varphi$ ), свидетельствует о том, что случайное поле, порождаемое шумами, оказывается однородным и изотропным. Об этом же говорит и то обстоятельство, что корреляционная функция (13) зависит только от модуля вектора  $\rho$ . Что касается выражения (13), то оно представляет собой так называемое преобразование Ханкеля нулевого порядка [5], или иначе — преобразование Фурье — Бесселя от функции

$$G_0(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} G(2\pi\omega). \quad (16)$$

Из свойств этого преобразования следует, что обратное преобразование функции  $K(\rho)$  можно представить как

$$G_0(\omega) = 2\pi \int_0^{\infty} \rho K(\rho) J_0(2\pi\omega\rho) d\rho. \quad (17)$$

При значении  $\rho = 0$  выражение (13) дает величину дисперсии, и так как  $J_0(0) = 1$ , то

$$\sigma^2 = 2\pi \int_0^{\infty} \omega^2 w_{\alpha}^2(\omega) [2\pi g(2\pi\omega) + N_0] d\omega. \quad (18)$$

Из (18) следует, что дисперсия складывается из двух слагаемых: первое соответствует составляющей, имеющей функцию корреляции  $k(s)$ , а второе —  $\delta$ -коррелированной составляющей. Чтобы проследить, как корреляционные связи в шумах проекции сказываются на величине шумов дисперсии в томографическом изображении, рассмотрим следующий пример.

Пусть корреляционная функция и функция  $w_\alpha(\omega)$  имеют вид гауссовых кривых, так что  $k(s) = k(0) e^{-s^2/2l^2}$ , а  $w_\alpha(\omega) = e^{-\alpha^2\omega^2/2}$  [3]. Тогда  $g(\omega) = k(0) (2\pi)^{-1/2} l \exp(-\omega^2 l^2/2)$ . Подставляя это выражение в (18) и интегрируя, получаем

$$\sigma^2 = \frac{\pi^{3/2}}{2\alpha^3} N_0 \left[ \frac{k(0) l \sqrt{2\pi}}{N_0 (1 + 2\pi^2 l^2/\alpha^2)^{3/2}} + 1 \right]. \quad (19)$$

Для рассматриваемой функции корреляции параметр  $l$  пропорционален радиусу корреляции, и, для того чтобы при  $l \rightarrow 0$  шум стремился к  $\delta$ -коррелированному со спектральной плотностью  $N_0$ , необходимо выполнение условия  $k(0) = N_0 \sqrt{2\pi} l$ . Подставляя значение  $k(0)$  в (19), находим, что первое слагаемое в квадратных скобках равно  $(1 + 2\pi^2 l^2/\alpha^2)^{-3/2}$ . При  $l = 0$  оно равно единице, а с увеличением  $l$  уменьшается, причем на величине уменьшения сказывается отношение  $l/\alpha$ .

Этот наглядный пример иллюстрирует общее правило: чем больше радиус корреляции шумовой составляющей, сопровождающей регистрацию проекции, тем меньший вклад она вносит в дисперсию шумового фона восстановленного изображения.

Вычислим теперь величину эффективного радиуса корреляции шумового фона в томографическом изображении. По определению [4]

$$\rho_k = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty K(\rho) d\rho. \quad (20)$$

Так как  $\int_0^\infty J_0(2\pi\rho r) d\rho = 1/2\pi\omega$ , а  $\sigma^2$  определяется выражением (18), то

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_0^\infty \omega w_\alpha^2(\omega) [2\pi g(2\pi\omega) + N_0] d\omega}{\int_0^\infty \omega^2 w_\alpha^2(\omega) [2\pi g(2\pi\omega) + N_0] d\omega}. \quad (21)$$

Для рассмотренного выше примера и при условии, что присутствует только составляющая с корреляционной функцией  $k(s) = N_0 \sqrt{2\pi} l e^{-s^2/2l^2}$ , находим

$$\rho_k = \frac{\alpha}{\pi^{3/2}} \sqrt{1 + 2\pi^2 l^2/\alpha^2}, \quad (22)$$

а если бы присутствовала только  $\delta$ -коррелированная составляющая ( $k(0) = 0$ ), то

$$\rho_k = \alpha/\pi^{3/2}. \quad (23)$$

Сравнивая выражения (22) и (23), видим, что минимальный радиус корреляции шумовых флуктуаций в томографическом изображении реализуется для  $\delta$ -коррелированных шумов и его величина пропорциональна параметру регуляризации  $\alpha$ . Для коррелированных шумов, сопровождающих регистрацию проекций и имеющих радиус корреляции, пропорциональный  $l$ , радиус корреляции шумов в изображении тем больше, чем больше отношение  $l/\alpha$ .

**Функционал плотности вероятностей шумовой составляющей в томографическом изображении.** Так как шум в изображении  $n_\alpha(x, y)$  связан с  $n(s, \varphi)$  линейным соотношением, то он так же, как и  $n(s, \varphi)$ , является нормальным. Это означает, что его функционал плотности ве-

роятностей имеет вид [6]

$$F [n_\alpha(x, y)] = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 dy_2 Q(x_1, y_1; x_2, y_2) \times \right. \\ \left. \times n_\alpha(x_1, y_1) n_\alpha(x_2, y_2) \right\}, \quad (24)$$

где  $C$  — коэффициент, не зависящий от реализации  $n_\alpha(x, y)$ ;  $Q(\cdot)$  — функция, связанная с корреляционной функцией  $K_0(\cdot)$  уравнением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x_1, y_1; x_2, y_2) K_0(x_2, y_2; x_3, y_3) dx_2 dy_2 = \delta(x_1 - x_3, y_1 - y_3). \quad (25)$$

Будем предполагать, что помимо шумов, обусловленных регистрацией проекций, в томографическом изображении присутствуют «собственные» шумы, появление которых связано, в частности, с дальнейшей обработкой восстановленного изображения. Относительно «собственных» шумов будем предполагать, что они статистически независимы от шумов регистрации проекции,  $\delta$ -коррелированы и имеют спектральную плотность  $N^0$ . Тогда

$$K_0(x_1, y_1; x_2, y_2) = K(x_1, y_1; x_2, y_2) + N^0 \delta(x_1 - x_2, y_1 - y_2), \quad (26)$$

где функция  $K(\cdot)$  определяется равенством (12).

В случае однородных полей решение уравнения (25) легко находится. Для этого вводится спектральная плотность  $g_0(\omega_1, \omega_2)$ , так что

$$K(x_1, y_1; x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\omega_1, \omega_2) e^{i[\omega_1(x_1 - x_2) + \omega_2(y_1 - y_2)]} d\omega_1 d\omega_2 \quad (27)$$

и решение уравнения (25) ищется в виде

$$Q(x_1, y_1; x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega_3, \omega_4) e^{i[\omega_3(x_1 - x_2) + \omega_4(y_1 - y_2)]} d\omega_3 d\omega_4 + \\ + (1/N^0) \delta(x_1 - x_2, y_1 - y_2). \quad (28)$$

Подставим (27) и (28) в (25) и проинтегрируем по переменным  $x$  и  $y$ . После такого интегрирования в первом слагаемом получаем произведение двух  $\delta$ -функций, а именно  $(2\pi)^2 \delta(\omega_1 - \omega_3) \delta(\omega_2 - \omega_4)$ , и после интегрирования по  $\omega_3$  и  $\omega_4$  приходим к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (2\pi)^2 g_0(\omega_1, \omega_2) v(\omega_1, \omega_2) + N^0 v(\omega_1, \omega_2) + \frac{1}{N^0} g_0(\omega_1, \omega_2) \right] \times \\ \times e^{i[\omega_1(x_1 - x_2) + \omega_2(y_1 - y_2)]} d\omega_1 d\omega_2 = 0, \quad (29)$$

откуда видно, что данное равенство выполняется, если

$$v(\omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{N^0} \frac{\frac{1}{N^0} g_0(\omega_1, \omega_2)}{1 + \frac{(2\pi)^2}{N^0} g_0(\omega_1, \omega_2)}. \quad (30)$$

Таким образом, действительно, решение уравнения (25) может быть представлено в виде (28), где функция  $v(\cdot)$  должна определяться выражением (30). Подставляя (28) в (24), получаем

$$F [n_\alpha(x, y)] = C \exp \left\{ -\frac{1}{2N^0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_\alpha^2(x, y) dx dy - \right. \\ \left. -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega_1, \omega_2) \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_\alpha(x, y) \exp \{i(\omega_1 x + \omega_2 y)\} dx dy \right|^2 d\omega_1 d\omega_2 \right\}. \quad (31)$$

Для шумов в томографическом изображении согласно (16)  $g_0(\omega_1, \omega_2) = G(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})$ . Подставляя (30) в (31) и переходя в плоскости  $\{\omega_1, \omega_2\}$  к полярным координатам  $\omega, \psi$ , имеем

$$F[n_\alpha(x, y)] = C \exp \left\{ -\frac{1}{2N^0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_\alpha^2(x, y) dx dy + \frac{1}{2N^0} \int_0^\infty \omega d\omega \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\frac{1}{N^0} G(\omega)}{1 + \frac{(2\pi)^2}{N^0} G(\omega)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_\alpha(x, y) \exp\{i\omega(x \cos \psi + y \sin \psi)\} dx dy \right|^2 \right\}. \quad (32)$$

Найденное выражение для функционала плотности вероятностей шума дает возможность определить функционал плотности вероятностей и для функции, описывающей само восстановленное изображение  $f_b(x, y)$ . В силу аддитивности шумовой составляющей  $f_b(x, y) = f_\alpha(x, y) + n_\alpha(x, y)$  искомый функционал  $\Phi[f_b(x, y) | f(x, y)]$  при условии, что проекция была получена для функции  $f(x, y)$ , находится из функционала  $F[n_\alpha(x, y)]$  путем подстановки  $n_\alpha(x, y) = f_b(x, y) - f_\alpha(x, y)$ . Знание функционала  $\Phi[f_b(x, y) | f(x, y)]$  позволяет ставить и решать задачи по оптимальной обработке информации, содержащейся в восстановленном томографическом изображении, и анализировать потенциальную точность, с которой искомая информация может быть получена. Пример такого анализа для потенциальной точности измерения неизвестных параметров будет рассмотрен во второй части настоящей работы.

## Приложение

В проведенных исследованиях было сделано одно важное упрощающее предположение: рассматривалась неограниченная область в плоскости  $x, y$ . Реально эта область всегда ограничена, так что может быть описана некоторой окружностью с центром в начале координат. Радиус этой окружности обозначим через  $a$ . Проанализируем, как сказывается данное условие на полученных результатах.

Формально изменяются пределы интегрирования в (2), а следовательно, и в (10): вместо  $-\infty \leq s \leq \infty$  имеем  $-a \leq s \leq a$ . Сделаем в (10) замену переменных  $s_1 - s_2 = \xi$ ,  $s_1 + s_2 = 2\eta$  и предположим, что интервал корреляции  $s_{\text{кор}}$  для  $k(s)$  удовлетворяет условию  $s_{\text{кор}} \ll a$ . Тогда после данной замены переменных переходим к новой области интегрирования, в которой благодаря неравенству  $s_{\text{кор}} \ll a$  существенный вклад в интеграл (10) вносит только узкая полоса по оси  $\xi$ , в пределах которой функция  $k(\cdot)$  заметно отлична от нуля. Поэтому пределы интегрирования по  $\xi$  можно считать бесконечными, а интеграл по  $\eta$  брать от  $-a$  до  $a$ . С учетом этого замечания вместо (10) имеем

$$K(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\varphi \int_{-a}^a d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\xi [k(\xi) + N_0 \delta(\xi)] g_\alpha(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - \eta - \frac{1}{2} \xi) g_\alpha(x_2 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi - \eta + \frac{1}{2} \xi). \quad (\text{П1})$$

Теперь сделаем все те же операции, которые осуществлялись при переходе от (10) к (11). Тогда получаем

$$K(x_1, y_1; x_2, y_2) = \int_0^\pi d\varphi \int_{-a}^a d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 |t_1| |t_2| w_\alpha(t_1) w_\alpha(t_2) \times \\ \times \left[ g(\omega) + \frac{1}{2\pi} N_0 \right] \exp \{ i(\omega - \pi t_1 + \pi t_2) \xi - i(t_1 + t_2) 2\pi \eta + \\ + i2\pi [(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi) t_1 + (x_2 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi) t_2] \}. \quad (\text{П2})$$

Интегрирование по  $\zeta$  дает  $2\pi\delta(\omega - \pi t_1 + \pi t_2)$ . Последующее интегрирование по  $t_2$  и  $\eta$  приводит к выражению

$$K(x_1, y_1; x_2, y_2) = 2\pi \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt |t| \left| t - \frac{\omega}{\pi} \right| w_\alpha(t) w_\alpha\left(t - \frac{\omega}{\pi}\right) \times \\ \times \left[ g(\omega) + \frac{N_0}{2\pi} \right] \frac{\sin\left(2\pi\left(2t - \frac{\omega}{\pi}\right)a\right)}{\pi\left(2t - \frac{\omega}{\pi}\right)} \exp\left\{2\pi i \left[ (x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi) t + \right. \right. \\ \left. \left. + (x_2 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi) \left(t - \frac{\omega}{\pi}\right) \right] \right\}. \quad (\text{ПЗ})$$

Из всех функций, входящих в (ПЗ), только одна  $\kappa(t, \omega, a) = (\pi(2t - (\omega/\pi)))^{-1} \sin(2\pi(2t - (\omega/\pi))a)$  зависит от  $a$ , причем она тем быстрее изменяется по координатам  $t$  и  $\omega$ , чем больше величина  $a$ . Поэтому при определенных соотношениях между  $a$  и характерными параметрами  $\alpha$  и  $l$ , определяющими размах функций  $w_\alpha(t)$  и  $g(\omega)$ , функция  $\kappa(\cdot)$  будет всегда более острой. Для функций  $w_\alpha(t)$  и  $g(\omega)$ , использованных в рассмотренных выше примерах, искомые условия таковы:  $1/\alpha \ll a$ ;  $l \ll a$ . Что касается экспоненциального множителя, то аналогичное требование приводит к условию: точки с координатами  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  должны лежать недалеко от начала координат, т. е.  $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \ll a$ ,  $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \ll a$ .

Если перечисленные условия выполнены, то благодаря остроте функции  $\kappa(t, \omega, a)$  основной вклад в интеграл (ПЗ) вносят только те значения функций, входящих под знак интеграла (ПЗ), которые они принимают в окрестности точки  $t \approx \omega/2\pi$ . Поэтому, полагая во всех множителях, кроме  $\kappa(t, \omega, a)$ ,  $t = \omega/2\pi$ , получаем

$$K(x_1, y_1; x_2, y_2) \approx 2\pi \int_0^\pi d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} w_\alpha^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \left[ g(\omega) + \frac{1}{2\pi} N_0 \right] \times \\ \times \exp\{i\omega [(x_1 - x_2) \cos \varphi + (y_1 - y_2) \sin \varphi]\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(2\pi a\left(2t - \frac{\omega}{\pi}\right)\right)}{\pi\left(2t - \frac{\omega}{\pi}\right)} dt. \quad (\text{П4})$$

Так как последний интеграл равен  $1/2\pi$ , то (П4) совпадает с (12).

Таким образом, учет ограниченных размеров области, с которой получают проекции и для которой осуществляется томографическое восстановление, приводит к изменению статистических свойств шумов, сопровождающих процесс восстановления. Однако в области, достаточно удаленной от границы, и при выполнении сформулированных выше условий все статистические характеристики шумов практически такие же, как и для неограниченной области.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уилкс С. Математическая статистика.— М.: Наука, 1967.
2. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии.— М.: Мир, 1983.
3. Лунт Р. М. Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований.— ТИИЭР, 1983, т. 71, № 3, с. 125.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику, ч. 2. Случайные поля.— М.: Наука, 1978.
5. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику.— М.: Мир, 1970.
6. Троицкий И. Н., Устинов П. Д. Статистическая теория голографии.— М.: Радио и связь, 1981.

Поступила в редакцию 22 ноября 1984 г.